

关于合取范式可满足性问题的复杂性分析*

余丰人, 丘海明

(中山大学电子与通信工程系, 广东 广州 510275)

摘要: 合取范式可满足性问题 (简称 SAT 问题) 是典型的 NP 完全问题, 本文引入了一个饱和子句集的新概念, 利用饱和子句集的特性, 研究了 SAT 问题的复杂性, 证明了 SAT 问题复杂性为多项式的一个充分条件, 并揭示了二元可满足性问题与三元可满足性问题的本质差别。因此, 通过变换来提炼出 SAT 问题的复杂性的本质特征, 并加以研究的方法, 是 SAT 问题的复杂性研究的一种有效方法。

关键词: 合取范式; SAT 问题; 复杂性分析

中图分类号: TN 711.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 02-0121-02

合取范式可满足性问题是计算机科学的重要问题之一, 它是典型的 NP 完全问题, 对它进行深入研究, 有利于 NP 完全问题的解决^[1], 在这方面, 人们已做了不少工作, 得到了许多很有意义的结果^[2~9]。文献 [2] 证明了一个合取范式可满足性的充要条件, 它为合取范式可满足性的判定提供了一个依据。我们通过对文献 [2] 结论的理论化, 对合取范式可满足性问题的复杂性作了深入的分析与研究, 证明了 SAT 问题复杂性为多项式的一个充分条件, 并揭示了二元可满足性问题与三元可满足性问题的本质差别, 为 SAT 问题的复杂性研究提供了一个新的思路。

1 合取范式可满足的充要条件

定义 1: 设 $\bar{x} = \bar{x}$ 和 $x = x$ 是布尔变量 x 的文字, 其中 $i = 1, \dots, n$ 由 k 个不同布尔变量的文字进行或所构成的布尔表达式:

$$c = \sum_{i=1}^k x_{i\eta}^{p_{i\eta}}$$

称为 k 元子句, 其中 $1 \leq k \leq n$, $i, \eta \in \{1, \dots, n\}$, 当 $i' \neq i$ 时, $x_{i'\eta} \neq x_{i\eta}$, $p_{i\eta} \in \{0, 1\}$ 。为了方便表示, 文中布尔变量的与和或将用乘和加来表示。

定义 2: n 个布尔变量的子句的全体加上 0 和 1 构成的集合称为子句全集 M , 共有 $3^n + 1$ 个元素。

定义 3: 设 $\zeta, \xi, \zeta \in M$, M 上的加法运算为:

$$\xi = \zeta + \zeta$$

ξ 是 ζ 和 ζ 进行或运算所得的子句。

定义 4: 设 $\zeta, \xi, \zeta \in M$, M 上乘法运算为:

$$\xi = \begin{cases} \zeta + \zeta & \text{当} \begin{cases} \zeta = \zeta + x_i^p \\ \xi = \xi + x_i^p \end{cases} \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $p \in \{0, 1\}$, $\zeta, \xi \in M$ 。显然乘法运算对 M 是封闭的。

定义 5: 如果 $F \subseteq M$ 则称 F 为子句集。如果乘法运算对 F 是封闭的, 则称 F 为饱和子句集, 记作 F_g 。由 F 通过乘法运算生成的 F_g 称为 F 的饱和子句集。

定义 6: F 的所有子句进行与所形成的布尔表达式称为 F 的合取范式, 记作 $f = f(F)$ 。相反地, 以 f 的所有子句构成的子句集合称为 f 的子句集, 记作 $F = F(f)$ 。

定理 1: 根据文献 [2] 的证明, 子句集 F 的合取范式 f 与子句集 F 的生成饱和子句集 F_g 的合取范式 f_g 恒等, 即:

$$f(F) = f(F_g)$$

定理 2: 根据文献 [2] 的证明和定理 1, 合取范式 f 可满足的充要条件是, 合取范式 f 的子句集 F 所生成的饱和子句集 F_g 不含 0。

2 合取范式的复杂性

定义 7: 如果在 F 的子句中, 文字数最多的子句为 p 元子句, 则称 F 为 p 元的, 记作 $|F| = p$ 。

定理 3: 设子句集 F 的饱和子句集为 F_g , 如果 $|F_g| \leq p$ 则 $f = f(F)$ 可满足性判定的空间复杂度和时间复杂度小于或等于 n^p 。

因为 $|F_g| \leq p$ 则 F_g 子句数最大为:

* 收稿日期: 2005-05-01

基金项目: 广东省自然科学基金重点资助项目 (021753)

作者简介: 余丰人 (1959 年生), 男, 讲师; E-mail: jssyfr@163.com

$$2^1 C_n + 2^2 C_n + \Lambda + 2^p C_n < n^p$$

所以, 在 F 生成 F_g 的过程中所需要的空间小于或等于 n^p , 所需要的时间小于或等于 $n^p n^p n^p = n^{3p}$. 在判定 F_g 是否含零元素所需要的空间和时间小于或等于 n^p . 因此, 根据定理 2, $\models f(F)$ 可满足性判定的空间复杂度和时间复杂度小于或等于 n^p .

定理 4 设 $F \subseteq G_k$, G_k 是饱和子句集, 则 F 的饱和子句集 $F_g \subseteq G_k$.

因为 $F_g \subseteq G_k$, G_k 是饱和子句集, 所以 F 的任何反复乘积生成元素都是 G_k 的元素, $F_g \subseteq G_k$.

定理 5 设 G_k 是饱和子句集, 且它的元数 $|G_k| < p$. 如果子句集 $F \subseteq G_k$, 则 $\models f(F)$ 可满足性判定的空间复杂度和时间复杂度小于 n^p .

因为 G_k 是饱和子句集, 且 $F \subseteq G_k$, 根据定理 4 有 $F_g \subseteq G_k$. 又因为 $|G_k| < p$ 所以 $|F_g| < p$. 根据定理 3 得到 $\models f(F)$ 可满足性判定的空间复杂度和时间复杂度小于 n^p , 因此, 定理 5 成立.

3 讨论与结论

对于二元可满足性问题, 因为它的子句集 F 是二元的, 不难证明 F 的饱和子句集 F_g 一定是二元的^[3], 根据定理 3, 二元可满足性问题判定的复杂度小于或等于 n^p . 对于三元可满足性问题, 因为它的子句集 F 的饱和子句集 F_g 没有上述特性, 这就使得三元可满足性问题与二元可满足性问题具有本质的差别, 即定理 3 揭示了三元可满足性问题与二元可满足性问题的本质差别. 不难看出定理 3 也揭示了合取范式可满足性问题复杂度的本质是合取范式的饱和子句集子句的个数的多少. 寻找子句个数最少的饱和子句集就是合取范式可满足性问题判定的根本, 另外, 如果对于任意合取范式, 最小的饱和子句集的子句个数是指数的, 则初步可断定合取范式可满足性问题判定应该是非多项式的.

定理 4 告诉我们一个不含零元素的饱和子句集 G_k 它可以保证一大类合取范式 $\models f(F)$, $F \subseteq G_k$ 是可满足的, 它为合取范式可满足性问题的判定提供了一种有效的快速算法.

定理 5 说明了这样一个事实, 一个元数小于 p 的饱和子句集 G_k 它规定了一大类合取范式 $\models f(F)$, $F \subseteq G_k$ 可满足性问题是多项式可判定的.

总之, 定理 3、定理 4 和定理 5 为合取范式可满足性问题的判定和它的复杂性分析开辟了一条新的思路. 在这个基础上, 对合取范式可满足性问题的复杂性进行深入细致的分析, 可以对问题有一个更加清晰的认识.

参考文献:

- [1] DUNHAM B, WANG H. Towards feasible solution of the tautology problem [J]. Annals of Math Logic, 1976 (10): 117-154.
- [2] 余丰人, 丘海明. 一个 SAT 问题有解的充要条件 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2004 43(2): 37-39.
- [3] 吴向军, 余丰人. 二元可满足性问题有解的充要条件 [J]. 软件学报, 1996 7(1): 51-58.
- [4] 李未, 黄文奇. 一种求解合取范式可满足性问题的数学物理方法 [J]. 中国科学: A 辑, 1994 24(11): 1208-1217.
- [5] URQUHART A. Hard examples for resolution [J]. J ACM, 1987(31): 209-219.
- [6] 林豪, 赖楚生, 黄文奇. 对于析取范式构造的一个全局性分析 [J]. 计算机学报, 1989 12(2): 118-152.
- [7] 宋恩民, 黄文奇. 求解析取范式永真性问题的一个近似快速算法 [J]. 科学通报, 1992 37(8): 676-677.
- [8] 宋恩民, 黄文奇, 赖楚生. 对于析取范式构造的进一步分析 [J]. 计算机学报, 1994 17(5): 384-387.
- [9] 宋恩民. 用均覆盖和锥形式对析取范式的结构分析 [J]. 计算机学报, 1996 19(11): 871-875.

A Complexity Analysis on SAT Problem

Yu Feng, ren Qiu Haoming

(Department of Electronics and Communication Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The satisfiability of conjunction normal form (abbreviate SAT problem) is a typical NP-complete problem. To study the complexity of SAT problem, a new concept of saturated clause muster has been introduced with using the characteristic of saturated clause muster. The sufficient condition of SAT problem was approved to be a polynomial and has opened out essential distinction of 2 SAT and 3 SAT problems. In conclusion, it will be an effective method for the study of the complexity of SAT problem to abstract the essential characters of the complexity of SAT problem through transform.

Key words: conjunction normal form, SAT problem, complexity analysis