

具偏差泛函微分方程的正周期解^{*}

白定勇^{1,2}, 徐远通¹

(1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275)

2. 韶关学院数学系, 广东 韶关 512005)

摘 要: 考虑如下的一阶泛函微分方程

$$u'(\eta) = a(\eta)g(u(h_1(\eta)))u(\eta) - \lambda b(\eta)f(u(h_2(\eta)))$$

其中 $\lambda > 0$ 是正参数, $a(\eta)$, $b(\eta)$, $h_1(\eta)$ 和 $h_2(\eta)$ 是可具有不同周期的周期函数. 利用锥上的不动点指数定理, 通过讨论 $f(u)/u$ 的渐近行为 (在零点和无穷远处) 与参数 λ 的区间之间的关系, 得到方程一个正周期解的存在性, 两个正周期解的存在性以及正周期解的不存在性.

关键词: 周期解; 泛函微分方程; 不动点; 锥

中图分类号: O175.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 04-0001-05

1 主要结果

设 $p_i (i=0, 1, 2)$ 是有理数, p 是使得 $\frac{p}{p_0}, \frac{p}{p_1}, \frac{p}{p_2}$

为正整数的最小正整数, $T > 0$ 为正实数. 考虑如下的一阶泛函微分方程

$$u'(\eta) = a(\eta)g(u(h_1(\eta)))u(\eta) - \lambda b(\eta)f(u(h_2(\eta))) \quad (1)$$

其中, $\lambda > 0$ 是正参数, 其余函数约束条件如下:

(1) $a \in C(\mathbb{R}^+ [0, \infty))$ 是 T -周期函数, 且存在 $t \in (0, T)$ 使得 $a(t) > 0$.

(2) $b \in C(\mathbb{R}^+ [0, \infty))$ 是 pT -周期函数, 且存在 $t \in (0, pT)$ 使得 $b(t) > 0$.

(3) $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是 2 个周期偏差, 周期分别为 $p_1 T$ 和 $p_2 T$.

(4) $f, g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 连续, 且对 $u \geq 0$, $0 < \lambda \leq g(u) < L < \infty$, L 是正常数; 对 $u > 0$, $f(u) > 0$.

为方便起见, 记

$$\sigma = \exp\left\{-\int_0^T a(\eta) d\eta\right\}$$

$$f_\alpha := \liminf_{u \rightarrow \alpha} f \frac{f(u)}{u}, \quad f^\alpha := \limsup_{u \rightarrow \alpha} f \frac{f(u)}{u}, \quad (\alpha = 0^+, \infty),$$

$$M(\eta) = \max_{0 \leq \eta \leq T} \{f(u)\},$$

$$m(\eta) = \min \{f(u) : \frac{\sigma^L(1-\sigma^L)}{1-\sigma} \leq u \leq \eta\},$$

$$B_1 = \frac{1-\sigma^L}{\int_0^{pT} b(\eta) d\eta}, \quad B_2 = \frac{(1-\sigma^L)^2}{\sigma^{2L}(1-\sigma^L) \int_0^{pT} b(\eta) d\eta}$$

$$\lambda_{01} = \frac{1-\sigma^L}{m(1)\sigma^L \int_0^{pT} b(\eta) d\eta},$$

$$\lambda_{02} = \frac{1-\sigma^L}{M(1) \int_0^{pT} b(\eta) d\eta}$$

显然, $\lambda_{01} \geq \lambda_{02} > 0$.

本文的目的是讨论 $\frac{f(u)}{u}$ 的渐近行为 (在零点和

无穷远处) 以及与参数 λ 的区间之间的关系, 使得方程 (1) 不存在正的 pT -周期, 存在一个正的 pT -周期解以及 2 个正的 pT -周期解. 具体叙述如下:

定理 1 假设约束条件 (1)–(4) 满足. 则在下列情形之一下, 方程 (1) 至少存在一个正的 pT -周期解.

$$(1) \quad f < \infty, \lambda_{01} < \lambda < \frac{B_1}{f} \quad (\alpha = 0^+ \text{ 或 } \infty);$$

$$(2) \quad f > 0, \frac{B_2}{f} < \lambda < \lambda_{02} \quad (\alpha = 0^+ \text{ 或 } \infty);$$

$$(3) \quad f < \infty, f > 0, \frac{B_2}{f} < \lambda < \frac{B_1}{f};$$

$$(4) \quad f > 0, f < \infty, \frac{B_2}{f} < \lambda < \frac{B_1}{f}.$$

* 收稿日期: 2005-10-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471155, 10571183)

作者简介: 白定勇 (1972 年生), 男, 博士, 副教授, 通讯联系人: 徐远通, E-mail: xy@zs1.edu.cn

定理 2 设方程约束条件 (1)–(4) 满足.

(1) 若 $f < \infty$, $g < \infty$, 则当 $\lambda_0 < \lambda < \frac{B}{\max\{f, g\}}$

时, 方程 (1) 至少存在 2 个正的 PT -周期解, 且存在充分大的正数 $\varepsilon > 0$ 使得对 $0 < \lambda < \frac{B}{\varepsilon}$, 方程 (1) 不存在正的 PT -周期解.

(2) 若 $f > 0$, $g > 0$ 则当 $\frac{B}{\min\{f, g\}} < \lambda < \lambda_{02}$ 时, 方程 (1) 至少存在 2 个正的 PT -周期解, 且存在充分大的正数 $\varepsilon > 0$ 使得对 $\lambda > \frac{B}{\varepsilon}$, 方程 (1) 不存在正的 PT -周期解.

在下一部分将给出一些证明上述定理必需的引理, 再最后完成上述定理的证明. 证明主要是利用了如下锥上的不动点指数定理.

不动点指数定理^[1-3] 设 K 是 Banach 空间 $X = (X, \|\cdot\|)$ 中的锥. 对 $r > 0$, 定义 $K_r = \{u \in K \mid \|u\| < r\}$. 设 $A: K \rightarrow K$ 是全连续算子, 使得对 $u \in \partial K_r = \{u \in K \mid \|u\| = r\}$, 有 $Au \neq u$.

(1) 若对 $u \in \partial K_r$ 有 $\|Au\| \geq \|u\|$, 则 $i(A, K_r, K) = 0$;

(2) 若对 $u \in \partial K_r$ 有 $\|Au\| \leq \|u\|$, 则 $i(A, K_r, K) = 1$.

我们指出, 由于 $\frac{p}{p_1}, \frac{p}{p_2}, \frac{p}{p_3}$ 为正整数的最小正整数, 因此 PT 是方程 (1) 正周期解的最小正周期. 另外, 方程 (1) 中的 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 是周期偏差, 可具有不同的周期. 由于关心的是方程 (1) 正周期解的存在性, 则若用 $\tau(t)$ ($\tau(t)$ 是周期函数) 来代替 $h_1(t)$ 或 $h_2(t)$, 尽管它们不再是周期函数了, 但是本文的结果仍然成立.

本文受文 [4] 的启发, 但本文结果涵盖了文献 [4] 中的所有结果. 对于方程 (1) 形式的泛涵微分方程的数学背景及其应用, 可参见文 [5–8] 及其参考文献. 对于此类方程的其它相关结果可参见文 [9–10].

2 一些引理

记 X 为 Banach 空间 $\{u(t) \mid u(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), u(t+PT) = u(t)\}$, 范数 $\|u\| = \sup_{t \in [0, PT]} |u(t)|$, $u \in X$. 定义 X 中的锥 K 为:

$$K = \{u \in X \mid u(t) \geq \frac{\sigma^L(1-\sigma^L)}{1-\sigma^L} \|u\|, t \in [0, PT]\}$$

定义算子 $A_\lambda: K \rightarrow X$:

$$(A_\lambda u)(t) = \lambda \int_0^{PT} G_\lambda(t, s) b(s) f(u(h_1(s))) ds$$

$$\text{其中, } G_\lambda(t, s) = \frac{\exp\left[-\int_\alpha^\theta g(u(h_1(\theta))) d\theta\right]}{1 - \exp\left[-\int_0^{PT} \alpha(\theta) g(u(h_1(\theta))) d\theta\right]}$$

对 $u \in X$ 容易验证 $G_\lambda(t, s)$ 的下列性质:

$$\frac{\sigma^L}{1-\sigma^L} \leq G_\lambda(t, s) \leq \frac{1}{1-\sigma^L}, \quad 0 \leq t \leq t+PT$$

$$G_\lambda(t+PT, s+PT) = G_\lambda(t, s)$$

$$\frac{\partial G_\lambda(t, s)}{\partial t} = \alpha(t) g(u(h_1(t))) G_\lambda(t, s)$$

$$\frac{\partial G_\lambda(t, s)}{\partial s} = -\alpha(s) g(u(h_1(s))) G_\lambda(t, s)$$

$$G_\lambda(t, t+PT) - G_\lambda(t, t) = -1$$

引理 1 设条件 (1)–(4) 满足, 则算子 $A_\lambda: K \rightarrow K$ 且紧连续. 方程 (1) 的正 PT -周期解等价于算子 A_λ 在锥 K 中的不动点.

证明 首先证 $A_\lambda K \subset K$ 且紧连续. 设 $u \in K$ 注意到 $b(s) f(u(h_1(s)))$ 的周期性, 有

$$(A_\lambda u)(t+PT) =$$

$$\lambda \int_{t+PT}^{t+2PT} G_\lambda(t+PT, s) b(s) f(u(h_1(s))) ds =$$

$$\lambda \int_t^{t+PT} G_\lambda(t+PT, s+PT) b(s+PT) \cdot$$

$$f(u(h_1(s+PT))) ds =$$

$$\lambda \int_t^{t+PT} G_\lambda(t, s) b(s) f(u(h_1(s))) ds = (A_\lambda u)(t)$$

另外, 我们有

$$(A_\lambda u)(t) = \lambda \int_t^{t+PT} G_\lambda(t, s) b(s) f(u(h_1(s))) ds \leq$$

$$\frac{\sigma^L}{1-\sigma^L} \lambda \int_t^{t+PT} b(s) f(u(h_1(s))) ds =$$

$$\frac{\sigma^L}{1-\sigma^L} \lambda \int_0^{PT} b(s) f(u(h_1(s))) ds =$$

$$\frac{\sigma^L(1-\sigma^L)}{1-\sigma^L} \frac{1}{1-\sigma^L} \lambda \int_0^{PT} b(s) f(u(h_1(s))) ds$$

和

$$\|A_\lambda u\| \leq$$

$$\frac{1}{1-\sigma^L} \sup_{t \in [0, PT]} \lambda \int_t^{t+PT} b(s) f(u(h_1(s))) ds =$$

$$\frac{1}{1-\sigma^L} \sup_{t \in [0, PT]} \lambda \int_0^{PT} b(s) f(u(h_1(s))) ds$$

这样, $(A_\lambda u)(t) \geq \frac{\sigma^L(1-\sigma^L)}{1-\sigma^L} \|A_\lambda u\|$, $t \in [0, PT]$. 所以, $A_\lambda K \subset K$. 对于 A_λ 的紧连续可利用 Arzelà-Ascoli 定理完成.

下面证明方程 (1) 的正 PT -周期解等价于算子 A_λ 在锥 K 中的不动点.

设 $u \in K$ 且 $A_\lambda u = u$ 则

$$u'(t) = \frac{d}{dt} \left(\lambda \int_0^{PT} G_1(t, s) b(s) f(u(h(s))) ds = \right. \\ \left. \lambda G_1(t, t+PT) b(t+PT) f(u(h(t+PT))) - \right. \\ \left. \lambda G_1(t, t) b(t) f(u(h(t))) + \right. \\ \left. \lambda \int_0^{PT} a(t) g(u(h(t))) G_1(t, s) b(s) f(u(h(s))) ds = \right. \\ \left. \lambda [G_1(t, t+PT) - G_1(t, t)] b(t) f(u(h(t))) + \right. \\ \left. a(t) g(u(h(t))) (\Lambda u)(t) = \right. \\ \left. -\lambda b(t) f(u(h(t))) + a(t) g(u(h(t))) u(t) \right. \\ \text{即 } u \text{ 是方程 (1) 的正 } PT\text{-周期解。反过来, 设 } u \\ \text{ 是方程 (1) 的正 } PT\text{-周期解, 则 } \lambda b(t) f(u(h(t))) \\ = a(t) g(u(h(t))) u(t) - u'(t). \text{ 从而}$$

$$(\Lambda u)(t) = \int_0^{PT} G_1(t, s) (a(s) g(u(h(s))) - u'(s)) ds = \\ \int_0^{PT} G_1(t, s) (a(s) g(u(h(s)))) ds - \\ \int_0^{PT} G_1(t, s) u'(s) ds = \\ \int_0^{PT} G_1(t, s) (a(s) g(u(h(s)))) ds - \\ G_1(t, s) u(s) \Big|_0^{PT} + \int_0^{PT} \frac{\partial}{\partial s} G_1(t, s) u(s) ds = u(t)$$

另外, 由前面的讨论可以知道 $u(t) \geq \frac{\sigma^L(1-\sigma^1)}{1-\sigma^L} \|\Lambda u\|, t \in [0, PT]$ 。所以, u 是 Λ 在 K 中的不动点。

下面的引理 2—引理 5 可用文 [4] 中方法类似地证明。

引理 2 设条件 (1)–(4) 成立, $\zeta > 0$ 。若有 $f(u(t)) \geq u(t)\zeta, u \in K, t \in [0, PT]$ 则 $\|\Lambda u\| \geq \lambda \frac{\zeta}{B} \|u\|$ 。

引理 3 设条件 (1)–(4) 成立。设 $\tau > 0$ 。若 $u \in \partial K$ 且存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$f(u(t)) \geq \varepsilon u(t), \quad t \in [0, PT]$$

则 $\|\Lambda u\| \leq \lambda \frac{\varepsilon}{B} \|u\|$ 。

引理 4 设条件 (1)–(4) 成立。若 $u \in \partial K, r > 0$ 则 $\|\Lambda u\| \geq \lambda \frac{\sigma^L \int_0^{PT} b(s) ds}{1-\sigma^L} m(r)$ 。

引理 5 设条件 (1)–(4) 成立。若 $u \in \partial K, r > 0$ 则 $\|\Lambda u\| \leq \lambda \frac{B}{M(r)}$ 。

另外还需要下面几个引理。

引理 6 设条件 (1)–(4) 成立。取 $\delta = 1$ 。则

(1) 若 $\lambda > \lambda_{01} > 0$ 有 $i(\Lambda, K, K) = 0$ 。

(2) 若 $0 < \lambda < \lambda_{02}$, 有 $i(\Lambda, K, K) = 1$ 。

证明 (1) 由引理 4 若 $\lambda > \lambda_{01} > 0$ 则有 $\|\Lambda u\| > \|u\|, u \in \partial K_0$ 。由不动点指数定理知 $i(\Lambda, K_0, K) = 0$ 。

(2) 由引理 5 若 $0 < \lambda < \lambda_{02}$, 则有 $\|\Lambda u\| < \|u\|, u \in \partial K_0$ 。再由不动点指数定理知 $i(\Lambda, K_0, K) = 1$ 。

引理 7 设条件 (1)–(4) 成立。若 $f < \infty$, 则存在 $0 < \tau < 1$ 使得对 $0 < \lambda < B/\tau$ 有

$$i(\Lambda, K, K) = 1$$

证明 由 $f < \infty$, 选取 $\varepsilon > 0$ 使 $0 < \lambda < \frac{B}{f+\varepsilon}$ 。存在 $0 < \tau < 1$ 使得对 $0 < u \leq \tau$ 有 $f(u) < (f+\varepsilon)u$ 则

$$f(u(t)) < (f+\varepsilon)u(t), u \in \partial K, t \in [0, PT]$$

利用引理 3 有

$$\|\Lambda u\| \leq \lambda \frac{f+\varepsilon}{B} \|u\| < \|u\|$$

因此, 由不动点指数定理知 $i(\Lambda, K, K) = 1$ 。

引理 8 设条件 (1)–(4) 成立。若 $f < \infty$, 则存在 $\tau > 1$ 使得对 $0 < \lambda < B/\tau$, 有

$$i(\Lambda, K, K) = 1$$

证明 由 $f < \infty$, 选取 $\varepsilon > 0$ 使 $0 < \lambda < \frac{B}{f+\varepsilon}$ 。存在 $R > 0$ 使得

$$f(u) < (f+\varepsilon)u, u \geq R$$

取 $r = \max\{2 \frac{(1-\sigma^L)R}{\sigma^L(1-\sigma^1)}\}$ 。则

$$u(t) \geq \frac{\sigma^L(1-\sigma^1)}{1-\sigma^L} \|u\| \geq R$$

$$u \in \partial K, t \in [0, PT]$$

从而

$$f(u(t)) < (f+\varepsilon)u(t), u \in \partial K, t \in [0, PT]$$

再由引理 3 有

$$\|\Lambda u\| \leq \lambda \frac{f+\varepsilon}{B} \|u\| < \|u\|$$

因此由不动点指数定理, 有 $i(\Lambda, K, K) = 1$ 。

引理 9 设条件 (1)–(4) 成立。若 $f_0 > 0$ 则存在 $0 < \tau < 1$ 使得对 $\lambda > B/f_0 > 0$ 有

$$i(\Lambda, K, K) = 0$$

证明 选取 $0 < \varepsilon < f$ 和 $0 < \tau < 1$ 使得 $\lambda > \frac{B}{f-\varepsilon}$ 且 $f(u) > (f-\varepsilon)u, 0 < u \leq \tau$ 。则

$$f(u(t)) > (f_0-\varepsilon)u(t), u \in \partial K, t \in [0, PT]$$

根据引理 2 有

$$\|\Lambda u\| \geq \lambda \frac{f-\varepsilon}{B} \|u\| > \|u\|$$

所以, 由不动点指数定理知 $\chi(A, K_\lambda, K) = 0$.

引理 10 设条件 (1)–(4) 成立. 若 $f > 0$ 则存在 $\delta > 1$, 使得对 $\lambda > B_2/f > 0$ 有

$$\chi(A, K_\lambda, K) = 0$$

证明 选取 $0 < \varepsilon < f$ 和 $R > 0$, 使得 $\lambda > \frac{B_2}{f - \varepsilon}$, 且 $f(u) > (f - \varepsilon)u \geq R$. 令 $r = \max\{2 \frac{(1 - \sigma^L)R}{\sigma^L(1 - \sigma^L)}\}$, 则

$$u(\vartheta) \geq \frac{\sigma^L(1 - \sigma^L)}{1 - \sigma^L} \|u\| \geq R$$

$$u \in \partial K_\lambda \quad t \in [0, \vartheta]$$

从而,

$$f(u(\vartheta)) > (f - \varepsilon)u(\vartheta) \quad u \in \partial K_\lambda \quad t \in [0, \vartheta]$$

利用引理 2 有

$$\|A_\lambda u\| \geq \lambda \frac{f - \varepsilon}{B_2} \|u\| > \|u\|$$

再由不动点指数定理, 有 $\chi(A, K_\lambda, K) = 0$.

3 两个定理的证明

3.1 定理 1 的证明

(1) 若 $f < \infty$, 由引理 6 之 (1) 和引理 7 存在 $\delta > 0 < \delta = 1$, 使得对 $\lambda > \lambda_{01} > 0$ 有 $\chi(A, K_\lambda, K) = 0$; 对 $0 < \lambda < \frac{B_1}{f}$, 有 $\chi(A, K_\lambda, K) = 1$.

则利用不动点指数的可加性, 当 $\lambda_{01} < \lambda < B_1/f$ 时, 有

$$\chi(A, K_\lambda \setminus K_\lambda, K) = -1$$

因此, 算子 A 至少存在一个不动点 $u \in K_\lambda \setminus K_\lambda$. 再由引理 1, 此不动点即为方程 (1) 的正 PT -周期解.

若 $f < \infty$, 由引理 6 之 (1) 和引理 8 存在 $\delta > \delta = 1$, 使得对 $\lambda > \lambda_{01} > 0$ 有 $\chi(A, K_\lambda, K) = 0$; 对 $0 < \lambda < \frac{B_1}{f}$, 有 $\chi(A, K_\lambda, K) = 1$. 再利用不

动点指数的可加性, 当 $\lambda_{01} < \lambda < \frac{B_1}{f}$ 时, 有

$$\chi(A, K_\lambda \setminus K_\lambda, K) = 1$$

因此, 算子 A 至少存在一个不动点 $u \in K_\lambda \setminus K_\lambda$. 所以由引理 1, 方程 (1) 至少存在一个正的 PT -周期解.

(2) 与上面 (1) 的证明类似. 若 $f > 0$ 则利用引理 6 之 (2) 和引理 9. 若 $f > 0$ 则利用引理 6 之 (2) 和引理 10.

(3) 由 $f < \infty$, $f > 0$ 根据引理 8 和引理 9 存在 $0 < \delta < 1 < \delta$, 使得对 $0 < \lambda < B_1/f$, 有 $\chi(A,$

$K_\lambda, K) = 1$; 对 $\lambda > B_2/f > 0$ 有 $\chi(A, K_\lambda, K) = 0$. 则由不动点指数的可加性, 当 $\frac{B_2}{f} < \lambda < \frac{B_1}{f}$ 时, 有

$$\chi(A, K_\lambda \setminus K_\lambda, K) = 1$$

因此, 方程 (1) 至少存在一个正的 PT -周期解.

(4) 由 $f > 0$, $f < \infty$ 根据引理 7 和引理 10 存在 $0 < \delta < 1 < \delta$, 使得对 $0 < \lambda < B_1/f$ 有 $\chi(A, K_\lambda, K) = 1$; 对 $\lambda > \frac{B_2}{f} > 0$ 有 $\chi(A, K_\lambda, K) = 0$. 则由不动点指数的可加性, 当 $\frac{B_2}{f} < \lambda < \frac{B_1}{f}$ 时, 有

$$\chi(A, K_\lambda \setminus K_\lambda, K) = -1$$

所以方程 (1) 至少存在一个正的 PT -周期解.

3.2 定理 2 的证明

(1) 首先证明 2 个正的 PT -周期解的存在性. 由 $f < \infty$, $f < \infty$, 根据引理 6 之 (1), 引理 7 和引理 8 存在 $0 < \delta < \delta = 1 < \delta$, 使得

$$\chi(A, K_\lambda, K) = 0 \quad \lambda > \lambda_{01} > 0$$

$$\chi(A, K_\lambda, K) = 1 \quad 0 < \lambda < \frac{B_1}{f}$$

$$\chi(A, K_\lambda, K) = 1 \quad 0 < \lambda < \frac{B_1}{f}$$

利用不动点指数的可加性, 当 $\lambda_{01} < \lambda < \frac{B_1}{\max\{f, f\}}$ 时, 有

$$\chi(A, K_\lambda \setminus K_\lambda, K) = -1$$

$$\chi(A, K_\lambda \setminus K_\lambda, K) = 1$$

从而, A 存在 2 个不动点 $u \in K_\lambda \setminus K_\lambda$ 和 $v \in K_\lambda \setminus K_\lambda$ 且 $f < \|u\| < \delta < \|v\| < \delta$. 所以, 当 $f < \infty$, $f < \infty$ 时, 若 $\lambda_{01} < \lambda < \frac{B_1}{\max\{f, f\}}$, 方程 (1)

至少存在 2 个正的 PT -周期解.

下面证明正的 PT -周期解的不存在性. 设 $\varepsilon > 0$ 任意给定. 由 $f < \infty$ 和 $f < \infty$, 选取 $0 < \delta < \delta$ 使得当 $0 < u < \delta$ 时, $f(u) < (f + \varepsilon)u$; 当 $u > \delta$ 时, $f(u) < (f + \varepsilon)u$. 令

$$\zeta > \max\{f + \varepsilon, f + \varepsilon, \max_{f \leq u \leq \delta} \frac{f(u)}{u}\} > 0$$

则对所有的 $u > 0$ 都有 $f(u) < \zeta u$ 即 $f(u(\vartheta)) < \zeta u(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in [0, \vartheta]$. 假设 $v(\vartheta)$ 是方程 (1) 的一个正的 PT -周期解, 则 $v(\vartheta) > 0 \quad t \in [0, \vartheta]$, 且 $A v(\vartheta) = v(\vartheta) \quad t \in [0, \vartheta]$. 由引理 3 对 $0 < \lambda < B_1/f$, 有下面的矛盾发生:

$$\|v\| = \|A v\| \leq \lambda \frac{f}{B} \|v\| < \|v\|$$

因此, 当 $\eta < \infty$, $\zeta < \infty$ 时, 对充分小的 $\lambda > 0$ 方程 (1) 没有正的 PT-周期解存在.

(2) 首先证明方程 (1) 至少存在 2 个正的 PT-周期解. 由 $\delta > 0$, $\delta > 0$ 根据引理 6 之 (2)、引理 9 和引理 10, 存在 $0 < \tau < \delta = 1 < \xi$, 使得

$$\begin{aligned} \varphi(A_\lambda, K_\eta, K) &= 1, \quad 0 < \lambda < \lambda_0, \\ \varphi(A_\lambda, K_\tau, K) &= 0, \quad \lambda > \frac{B_2}{\delta} > 0, \\ \varphi(A_\lambda, K_\xi, K) &= 0, \quad \lambda > \frac{B_2}{\xi} > 0. \end{aligned}$$

由不动点指数的可加性, 对 $\frac{B_2}{\min\{\delta, \xi\}} < \lambda < \lambda_0$, 有

$$\begin{aligned} \varphi(A_\lambda, K_\eta \setminus K_\tau, K) &= 1, \\ \varphi(A_\lambda, K_\xi \setminus K_\tau, K) &= -1. \end{aligned}$$

因此, A_λ 存在 2 个不动点 $\psi \in K_\eta \setminus K_\tau$ 和 $\psi \in K_\xi \setminus K_\tau$ 且 $\tau < \|\psi\| < \delta < \|\psi\| < \xi$. 从而, 当 $\delta > 0$, $\delta > 0$ 时, 若 $\frac{B_2}{\min\{\delta, \xi\}} < \lambda < \lambda_0$, 方程 (1) 至少存在 2 个正的 PT-周期解.

现在证明方程 (1) 正的 PT-周期解的不存在性. 设 $0 < \epsilon < \min\{\delta, \xi\}$ 任意给定. 选取 $0 < \tau < \xi$, 使得当 $0 < u \leq \tau$ 时, $\varphi(u) > (\delta - \epsilon)u$; 当 $u \geq \xi$ 时, $\varphi(u) > (\xi - \epsilon)u$. 令

$$0 < \zeta < \min\{\delta - \epsilon, \xi - \epsilon, \min_{\tau \leq u \leq \xi} \frac{\varphi(u)}{u}\}$$

则对所有的 $u > 0$ 有 $\varphi(u) > \zeta u$, 即 $\varphi(u) > \zeta u$, $\forall u \in [0, \eta]$. 若 $\psi(t)$ 是方程 (1) 的一个正的 PT-周期解, 则由引理 2 对 $\lambda > B_2/\zeta$, 有下面的矛盾发生:

$$\|\psi\| = \|A_\lambda \psi\| \geq \lambda \frac{\zeta}{B_2} \|\psi\| > \|\psi\|$$

因此, 当 $\delta > 0$, $\delta > 0$ 时, 对充分大的 $\lambda > 0$ 方程 (1) 不存在正的 PT-周期解.

参考文献:

- [1] GUO D, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cones[M]. Orlando: Academic Press, 1988.
- [2] KRASNOSELSKIĬ M. Positive Solutions of Operator Equations[M]. Groningen: Noordhoff, 1964.
- [3] DEMLING K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer, 1985.
- [4] WANG H. Positive periodic solutions of functional differential equations[J]. J. Diff. Eqns, 2004, 202: 354—366.
- [5] CHOW S N. Existence of periodic solutions of autonomous functional differential equations[J]. J. Diff. Eqns, 1974, 15: 350—378.
- [6] HADELER K P, TOMILUK J. Periodic solutions of difference differential equations[J]. Arch. Rational Mech. Anal, 1977, 65: 87—95.
- [7] KUANG Y. Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics[M]. New York: Academic Press, 1993.
- [8] HALE J K. Theory of Functional differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [9] JIANG D, WEI J, ZHANG B. Positive periodic solutions of functional differential equations and population models[J]. Electron. J. Diff. Eqns, 2002, 71: 1—13.
- [10] WAN A, JIANG D. Existence of positive periodic solutions for functional differential equations[J]. Kyushu J. Math, 2002, 56: 193—202.

Positive Periodic Solutions of Functional Differential Equations with Deviations

BAIDing Yong², XU Yuanrong²

(1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Department of Mathematics, Shaoguan University, Shaoguan 512005, China)

Abstract: The positive periodic solutions are discussed for the following functional differential equation

$$u'(t) = a(t)g(u(h(t)))u(t) - \lambda b(t)f(u_2(t)),$$

where $\lambda > 0$ is a positive parameter, $a(t)$, $b(t)$, $h(t)$ and $h_2(t)$ have different periods. Applying fixed-point index theory in cones to the equation, the existence, multiplicity and nonexistence of positive periodic solutions for the equation are obtained by discussing the relationship between the asymptotic behaviors of the quotient $f(u)/u$ (at zero and infinity) and the intervals of λ .

Key words: periodic solution; functional differential equation; fixed point; cone