

C-内射 S-系*

张霞¹, 王燕鸣^{1 2}

(1 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;
2 中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

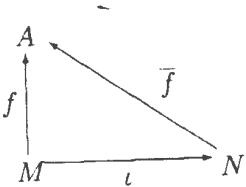
摘 要: 不同的内射性的研究在 S-系研究中起着重要作用。通过定义 C-内射 S-系, 讨论了 C-内射系的性质、充分必要条件。给出了 C-内射系的同调刻划。证明了有限内射系是 C-内射的, C-内射系是主弱内射的, 但对应的逆命题不成立。得到了所有左理想是 C-内射的么半群刻划及 C^{*}-半群上所有 S-系是 C-内射的同余刻划。
关键词: C-内射系; 循环系; S-同态
中图分类号: O152.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 04-0006-05

1 C-内射 S-系

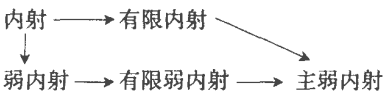
本文中, 如无特别说明, S 表示么半群, S-系 ${}_sA$ (或简记为 A) 表示左 S-系。

S-系的各种内射性的研究是 S-系范畴研究的一个重要课题, 而对所有 S-系满足某种内射性的么半群刻划及弱内射系作成强内射系的同调刻划又是 S-系内射性研究的重点^[1-2]。

S-系 A 称为是内射的, 如果对任意 S-系 M, N, 任意 S-单态 $\iota: M \rightarrow N$ 及 S-同态 $f: M \rightarrow A$, 存在 S-同态 $\bar{f}: N \rightarrow A$ 使如下格式交换:



将图中 M 取成有限生成系时, A 就是有限内射系^[3]; 将图中 N 取成半群 S, M 相应地取成 S 的左理想、左主理想、左有限生成理想, A 相应地就成为弱内射系、主弱内射系、有限弱内射系^[4]。它们之间的关系是:



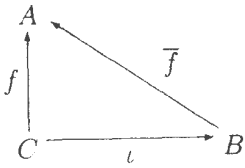
以上箭头均不可逆。文 [3] 与 [4] 分别讨论了有限内射系与主弱内射系, 并给出了所有有限内射系是内射的么半群刻划以及所有 S-系是主弱内射

的么半群刻划。
在此基础上, 本文定义了一类新的内射系称之为 C-内射系。将证明 C-内射系是严格介于有限内射系与主弱内射系之间的 S-系, 即

$$\text{有限内射} \longleftrightarrow \text{C-内射} \longleftrightarrow \text{主弱内射}$$

本文讨论了 C-内射系的各种判定定理及性质, 给出所有 S-系是 C-内射的、所有 C-内射系是内射的及么半群 S 的所有左理想是 C-内射的同调刻划。得到 S 的所有左理想是 C-内射的当且仅当 S 是正则自内射半群; 所有 C-内射系是内射的当且仅当所有 C-内射系是有限内射的且 S 是左 Noetherian 半群。同时给出 C^{*}-半群上所有 S-系是 C-内射的同余刻划, 得到 C^{*}-半群上所有 S-系是 C-内射的当且仅当 S 有右零元, 且对 ${}_sS$ 上的任意同余 ρ , 对任意 $m \in S$, 存在 $a \in Sm$ 使得 $ma \rho m$ 且 $u \rho v \Rightarrow ua \rho va, ub \rho vb \in S$ 。

文中的概念及术语参见文献 [1] 与 [2]。
定义 1 设 A 是 S-系。称 A 是 C-内射的, 如果对任意的从循环系 C 到任意 S-系 B 的 S-单态 ι , 对任意的 S-同态 $f: C \rightarrow A$, 存在 S-同态 $\bar{f}: B \rightarrow A$, 使得下面格式可以交换:



当定义中的 S-系 C 取成有限生成系时 A 就是

* 收稿日期: 2005-06-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571181); 中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (06M02)
作者简介: 张霞 (1972年生), 女, 博士生; 通讯联系人: 王燕鸣; E-mail: stswym@mail.sysu.edu.cn
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

有限内射系; 当 B 取成半群 S , C 取成 S 的左主理想时, A 就是主弱内射系。显然, 有限内射系是 G -内射系, G -内射系是主弱内射系, 但反之不成立, 见注 1, 注 2

定理 1 设 A 是 S -系, 则下面命题等价:

(1) A 是 G -内射 S -系。

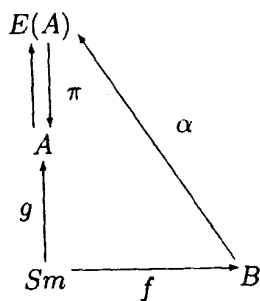
(2) 设 $a \in A$, 则对任意 S -系 $B \geq A$, 存在 S -同态 $f: B \rightarrow A$ 使得 $f(a) = a$ 。

(3) 设 $a \in A$, $E(A)$ 是 A 的内射包。则存在 S -同态 $f: E(A) \rightarrow A$ 使得 $f(a) = a$ 。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 A 是 G -内射系且 $a \in A$ 。考虑自然的嵌入映射 $\iota: Sa \rightarrow A$ 及 $\iota: Sa \rightarrow B$ 。由 A 是 G -内射系知存在 S -同态 $g: B \rightarrow A$, 使得 $g\iota = \iota$ 。故 $g(a) = a$ 。

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然。

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 Sm 是任意循环 S -系, $f: Sm \rightarrow B$ 是 S -单态, $g: Sm \rightarrow A$ 是 S -同态。由 $E(A)$ 是内射系知存在 S -同态 $\alpha: B \rightarrow E(A)$ 使得 $\alpha f(m) = g(m)$ 。由 (3), 存在 S -同态 $\pi: E(A) \rightarrow A$ 使得 $\pi(g(m)) = g(m)$ 。

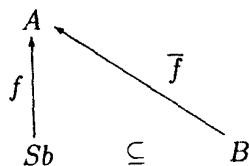


定义映射 $\beta: B \rightarrow A$, $\beta = \pi\alpha$ 。显然, β 是 S -同态且

$$\beta f(m) = \pi\alpha(f(m)) = \pi(g(m)) = g(m)$$

从而 $\beta f = g$ 。

引理 1 S -系 A 是 G -内射的当且仅当对任意 S -系 B , 对任意循环系 $Sb \leq B$, 及对任意 S -同态 $f: Sb \rightarrow A$, 存在 S -同态 $\bar{f}: B \rightarrow A$ 使得 $\bar{f}|_{Sb} = f$ 。

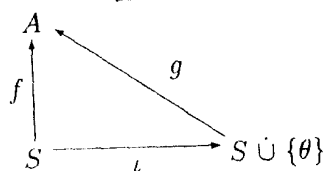


证明 必要性显然, 下证充分性。设 A, B 是 S -系, Sb 是循环系, $f: Sb \rightarrow A$ 是 S -同态, $\iota: Sb \rightarrow B$ 是 S -单态。则 $Sb \cong \iota(Sb) \leq B$ 。考虑映射 $f\iota^{-1}: \iota(Sb) \rightarrow A$, 其中 ι^{-1} 是 ι 的逆映射, 则 ι^{-1} 是 S -同态。由已知存在 S -同态 $g: B \rightarrow A$ 使得 $g|_{\iota(Sb)} =$

$f\iota^{-1}$ 。从而对任意的 $s \in S$ $g\iota(sb) = f\iota^{-1}(\iota(sb)) = f(sb)$, 故 $g\iota = f$ 。

命题 1 每个 G -内射 S -系都含有一个零元。

证明 设 A 是 G -内射 S -系。取 $a \in A$, 定义映射 $f: S \rightarrow A$, $f(s) = sa$, $\forall s \in S$ 。显然 f 是 S -同态。考虑自然的嵌入映射 $\iota: S \rightarrow S \cup \{\theta\}$, 其中 $\{\theta\}$ 是单元 S -系及 S -同态 f 。由于 $S = S1$ 是循环系且 A 是 G -内射的, 故存在 S -同态 $g: S \cup \{\theta\} \rightarrow A$ 使得下面格式可以交换:



故 $g(\theta) \in A$ 且 $sg(\theta) = g(s\theta) = g(\theta)$, $\forall s \in S$, 从而 $g(\theta)$ 是 A 中的零元。

注 1 令 $S = \{1, \theta\}$ 是左零半群, 则 S 是正则半群, 由文 [1] 定理 4.1.6 有 ${}_S S$ 是主弱内射系。但显然 ${}_S S$ 没有零元, 故由命题 1, ${}_S S$ 不是 G -内射系。

引理 2 (文 [5] 引理 4) 设 S 是任意半群, M 是 S -系。则 M 可以唯一地分解为不可分子系的交并。

定理 2 S -系 A 是 G -内射系当且仅当 A 有零元, 且对任意不可分 S -系 T 及其循环子系 Sb , 对任意 S -同态 $f: Sb \rightarrow A$, 存在 S -同态 $g: T \rightarrow A$ 使得 $g|_{Sb} = f$ 。

证明 必要性显然。现证充分性, 假设所给条件成立。设 $Sb \leq B$ 是任意循环 S -系, $f: Sb \rightarrow A$ 是 S -同态。令 $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ 是 B 的不可分分解。则存在唯一的 $j \in I$ 使得 $Sb \leq B_j$ 。由于 B_j 是不可分的, 存在 S -同态 $g: B_j \rightarrow A$ 使得 $g|_{Sb} = f$ 。设 0 是 A 的一个零元。定义映射 $g: B \rightarrow A$,

$$g(x) = \begin{cases} g(x) & \text{若 } x \in B_j, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则 g 是 S -同态。并且 $g(b) = g(b) = f(b)$, 从而 $g|_{Sb} = f$ 。

引理 3 (文 [2] 命题 3.1.2) 设 S -单态 $f: E \rightarrow G$ 是可收缩的。如果 G 是内射系, 则 E 也是内射系。

由 G -内射的定义可知内射系一定是 G -内射的, 下面命题给出 G -内射系是内射系的一个充分条件。

命题 2 每个循环的 G -内射 S -系都是内射系。

证明 设循环系 Sa 是 G -内射的。则由定理 1, 存在 S -同态 $f: E(Sa) \rightarrow Sa$ 使得 $f|_{Sa} = 1_{Sa}$, 这里 1_{Sa} 是 Sa 上的恒等同态。由引理 3 $E(Sa)$ 是内射的有 Sa 是内射系。

命题 3 设 $\{A_i \mid i \in I\}$ 一簇 S -系, 则下面命题成立.

(1) 每个 $A_i (i \in I)$ 都是 C -内射系当且仅当 $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ 是 C -内射系且每个 $A_i (i \in I)$ 都含有一个零元.

(2) $A = \prod_{i \in I} A_i$ 是 C -内射系当且仅当每个 $A_i (i \in I)$ 都是 C -内射系.

证明 (1) 假设每个 $A_i (i \in I)$ 都是 C -内射系. 则由命题 1, 每个 $A_i (i \in I)$ 都含有一个零元. 设 $Sb \leq B$ 是任意循环系, $f: Sb \rightarrow A$ 是 S -同态. 则存在 $i \in I$, 使得 $f(Sb) = Sf(b) \leq A_i$. 由已知 A_i 是 C -内射的, 故有 S -态 $g: B \rightarrow A_i$ 满足 $g|_{Sb} = f$. 显然 g 也是 B 到 A 的 S -态.

反过来, 设 A 是 C -内射系且每个 $A_i (i \in I)$ 都含有一个零元. 对任意的 $i \in I$, 设 $Sb \leq B$ 是任意循环系, $f: Sb \rightarrow A_i$ 是 S -同态. 由 A 是 C -内射系知存在 S -同态 $\alpha: B \rightarrow A$ 使得 $\alpha|_{Sb} = f$. 令 $\pi_i: A \rightarrow A_i$ 是自然投射且 $\beta = \pi_i \alpha$. 则 β 是 B 到 A_i 的 S -态, 又由 $\beta(b) = \pi_i \alpha(b) = \pi_i(f(b)) = f(b)$ 得到 $\beta|_{Sb} = f$.

(2) 设 $A = \prod_{i \in I} A_i$ 是 C -内射系. 则 A 含有一个零元设为 $(\theta_i)_{i \in I}$, 易见 $\theta_i, i \in I$ 是 A_i 的零元. 设 $Sb \leq B$ 是循环系, $f: Sb \rightarrow A_i (i \in I)$ 是 S -同态. 记 $\iota_i: A_i \rightarrow A$, $\pi_i: A \rightarrow A_i$ 是自然的嵌入与投射. 由 A 是 C -内射的知存在 S -同态 $g: B \rightarrow A$ 使得 $g|_{Sb} = \iota_i f$. 令 $g_i = \pi_i g$, 显然 g_i 是 B 到 A_i 的 S -同态. 而且 $g_i(b) = \pi_i g(b) = \pi_i \iota_i f(b) = f(b)$, 故 $g_i|_{Sb} = f$.

反过来, 设 $A_i (i \in I)$ 是 C -内射的, $Sb \leq B$, $f: Sb \rightarrow A$ 是 S -同态. 记 $\pi_i: A \rightarrow A_i (i \in I)$ 是自然的投射. 则存在 S -同态 $g_i: B \rightarrow A_i$ 使得 $g_i(b) = \pi_i f(b)$. 由直积的定义知存在 S -同态 $g: B \rightarrow A = \prod_{i \in I} A_i$ 使得 $\pi_i g = g_i, \forall i \in I$. 所以 $g(b) = (g_i(b))_{i \in I} = (\pi_i f(b))_{i \in I} = f(b)$ 得到 $g|_{Sb} = f$.

命题 4 C -内射系的直和仍是 C -内射系.

证明 设 $\{A_i \mid i \in I\}$ 是一簇 C -内射系, 则由命题 1, 每个 $A_i (i \in I)$ 都含有一个零元. 设 $Sb \leq B$ 是任意循环系, $f: Sb \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i$ 是 S -同态. 则 $f(b) \in \bigoplus_{i \in I} A_i$ 只有有限多个分量不为 0. 设 $f(b) \in \bigoplus_{i=1}^n A_{j_i}$, 其中 n 是正整数且 $\{j_1, \dots, j_n\} \subseteq I$. 由命题 3 知 $\bigoplus_{i=1}^n A_{j_i} = \prod_{i=1}^n A_{j_i}$ 是 C -内射的, 故存在 S -同态 $g: B \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n A_{j_i}$ 满足 $g|_{Sb} = f$. 显然 g 也是从 B 到 $\bigoplus_{i \in I} A_i$ 的 S -同态.

2 C -内射系的同调刻划

定理 3 设 S 是么半群, 则下面命题等价:

- (1) 所有 S -系是 C -内射的.
- (2) 所有有限生成 S -系是 C -内射的.
- (3) 所有循环 S -系是 C -内射的.
- (4) 所有不可分 S -系是 C -内射的.
- (5) 所有循环 S -系是内射的.
- (6) 所有循环 S -系是有限内射的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设所有循环系是 C -内射的. 设 A 是任意 S -系, Sb 是 S -系 B 的循环子系, $f: Sb \rightarrow A$ 是 S -同态. 由 $f(Sb) = Sf(b) \leq A$ 是循环系知 $f(Sb)$ 是 C -内射的. 故存在 S -同态 $g: B \rightarrow f(Sb)$ 使得 $g|_{Sb} = f$, 易见 g 是 B 到 A 的 S -同态.

(1) $\Rightarrow$ (4) 显然.

(4) $\Rightarrow$ (5) 注意到循环系一定是不可分的, 因此由 (4) 知所有循环系都是 C -内射的. 由命题 2 即得 (5).

(5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (3) 显然.

引理 4 (文 [3] 命题 4) 设 M 是 S -系, $E(M)$ 是 M 的内射包, 则下面命题等价:

(1) M 是内射的.

(2) M 是主弱内射的且含有零元, $E(M) \oplus M$ 是 P -拟内射系.

引理 5 (文 [6] 定理 1) S 是左 Noetherian 半群当且仅当内射 S -系的直和仍是内射系.

引理 6 (文 [3] 定理 9) 所有有限内射 S -系是内射的当且仅当 S 是左 Noetherian 半群.

定理 4 设 S 是么半群, 则下面命题等价:

- (1) 所有 C -内射 S -系是内射的.
- (2) 所有 C -内射 S -系是 $\sum$ -内射的.
- (3) 所有 C -内射 S -系是 $\sum$ -拟内射的.
- (4) 所有 C -内射 S -系是拟内射的.
- (5) 所有 C -内射 S -系是 P -拟内射的.
- (6) 所有 C -内射 S -系是有限内射的且 S 是左 Noetherian 半群.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 A 是 C -内射系. 由命题 1, A 含有一个零元. 故对任意指标集 I , $\bigoplus_{i \in I} A_i$ 是 C -内射的 (命题 4), 其中 $A_i = A (\forall i \in I)$. 由 (1) 知 $\bigoplus_{i \in I} A_i$ 是内射的, 从而 A 是 $\sum$ -内射的.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) 显然.

(5) $\Rightarrow$ (1) 设 A 是 C -内射系, 则 A 是主弱内射的且含有一个零元. 令 $E(A)$ 是 A 的内射包, 由命题 4 知 $E(A) \oplus A$ 是 C -内射系, 故由 (5) 有 $E(A) \oplus A$ 是 P -拟内射的. 再由引理 4 可得 A 是内射系.

(1) $\Rightarrow$ (6) 设所有 C -内射系都内射. 由

命题 4 可得内射系的直和是 G -内射系, 从而是内射的. 由引理 5 得到 S 是左 Noetherian 半群.

(6) $\Rightarrow$ (1) 设 (6) 成立. 由引理 6 S 是左 Noetherian 半群当且仅当所有有限内射系是内射的, 从而所有 G -内射系是内射的.

3 G -内射系对么半群的刻划

这一部分将给出么半群 S 上所有左理想是 G -内射的么半群刻划及 C^* 半群上所有 S -系是 G -内射的同余刻划.

引理 7 (文 [1] 定理 4.5.10) 设 S 是么半群, 则下面命题等价:

- (1) S 的所有左主理想是内射的.
- (2) S 是正则自内射半群.

定理 5 设 S 是么半群, 则下面命题等价:

- (1) S 的所有左理想是 G -内射的.
- (2) S 的所有左有限生成理想是 G -内射的.
- (3) S 的所有左主理想是 G -内射的.
- (4) S 的所有左主理想是内射的.
- (5) S 的所有左主理想是有限内射的.
- (6) S 是正则自内射半群.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 I 是 S 的任意左理想, Sb 是 S -系 B 的循环子系, $f: Sb \rightarrow I$ 是 S -同态. 则 $f(Sb) = Sf(b) \subseteq I$ 是 S 的左主理想. 由 (3), $f(Sb)$ 是 G -内射系, 故存在 S -同态 $g: B \rightarrow f(Sb)$ 使得 $g|_{Sb} = f$. 把 g 看成从 B 到 I 的 S -同态就得到 I 是 G -内射的.

(3) $\Rightarrow$ (4) 由命题 2 循环的 G -内射系是内射的. 因此, S 的 G -内射左主理想是内射的.

(4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(4) $\Leftrightarrow$ (6) 由引理 7 可得.

注 2 设 $S = \{1, 0 \in f\}$ 是半格, 其中 $ef = fe = 0$. 由文 [1] 3.4.5 $K = \{0 \in f\}$ 不是由幂等元生成的, 故 K 不是有限弱内射系, 当然也不是有限内射系. 但直接验证可得, S 是自内射正则半群, 从而由定理 5 K 是 G -内射系.

注 1 说明了主弱内射系不是 G -内射系, 注 2 说明 G -内射系不是有限内射系. 从而

$$\text{有限内射} \iff G\text{-内射} \iff \text{主弱内射}$$

定义 2 称么半群 S 为 C^* 半群, 若每个 S -系都可分解为循环子系的不交并.

注 3 C^* 半群是存在的. 如 S 是群时, 任意 S -系都是单子系的不交并.

下面的讨论中 S 表示 C^* 半群.

引理 8 下面命题等价:

(1) S -系 A 是 G -内射的.

(2) A 含有一个零元, 且对任意循环系 B 及其循环子系 Sb , 对任意 S -同态 $f: Sb \rightarrow A$, 存在 S -同态 $g: B \rightarrow A$ 使得 $g|_{Sb} = f$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然. 假若 (2) 成立, 下面证明 A 是 G -内射的. 由定理 2 只需证明对任意的不可分 S -系 B 及其循环子系 $Sb \leq B$, 对任意 S -同态 $f: Sb \rightarrow A$, 存在 S -同态 $g: B \rightarrow A$, 使得 $g|_{Sb} = f$. 但 S 是 C^* 半群, 从而不可分 S -系 B 是循环系, 应用 (2) 可得结论成立.

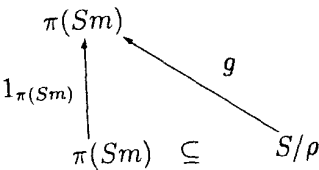
设 ρ 是 S -系 A 上的同余, $\pi: A \rightarrow A/\rho$, $\pi(a) = \bar{a}$, $\forall a \in A$, 其中 $\bar{a}$ 表示 a 关于等价关系 ρ 所在的等价类, 称为典型满态 (见文 [1] 1.4.19). $\ker \pi$ 是核同余.

定理 6 下面命题等价:

(1) 所有 S -系是 G -内射的.

(2) S 有右零元, 且对 ${}_s S$ 上的任意同余 ρ , 对任意 $m \in S$, 存在 $a \in Sm$ 使得 $ma \rho m$ 且 $u \rho v \Rightarrow ua \rho va$, $u, v \in S$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由 ${}_s S$ 是 G -内射的知 ${}_s S$ 含有一个零元 0 即对任意的 $s \in S$ 都有 $s0 = 0$, 故 0 就是半群 S 的右零元. 设 ρ 是 ${}_s S$ 上的任意同余. 令 $\pi: S \rightarrow S/\rho$ 是典型满态. 对任意的 $m \in S$, 由于 $\pi(Sm) = S\pi(m)$ 是循环系且由 (1), $\pi(Sm)$ 是 G -内射系知存在 $g: S/\rho \rightarrow \pi(Sm)$ 使得 $g|_{d_\pi(Sm)} = 1_{\pi(Sm)}$.



则存在 $a \in Sm$ 使得 $g(\bar{1}) = \bar{a}$, 其中 1 是 S 的单位元. 从而

$$\begin{aligned} \pi(ma) &= m\bar{a} = mg(\bar{1}) = \\ g(\bar{m}) &= \bar{m} = \pi(m) \Rightarrow ma \rho m \end{aligned}$$

若 $u \rho v$, $u, v \in S$, 则

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{v} \Rightarrow g(\bar{u}) = ug(\bar{1}) = u\bar{a} = \\ g(\bar{v}) &= vg(\bar{1}) = v\bar{a} \Rightarrow ua \rho va \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 0 是 S 的右零元, A 是任意 S -系. 取 $a \in A$, 则 $0a \in A$ 是 A 的零元. 由引理 8 要证 A 是 G -内射系, 只需证明对任意的循环系 Sc 及其循环子系 B , 对任意 S -同态 $f: B \rightarrow A$ 存在 S -同态 $g: Sc \rightarrow A$ 满足 $g|_B = f$.

由 Sc 是循环系有 $\pi: S \rightarrow Sc$, $\pi(s) = sc$, $\forall s \in S$ 是 S 满态. 令 $B = Sm$, $m \in S$. 由已知存在 a

$\in Sm$ 使得 $ma \in \ker \pi$ 且 $u \in \ker \pi \Rightarrow ua \in \ker \pi \nRightarrow u \in \ker \pi$.
 $v \in S$.

定义映射 $g: Sc \rightarrow A$ 为 $\pi(s) \mapsto f(\pi(sa))$ 。若存在 $s, t \in S$, 使得 $\pi(s) = \pi(t)$ 则 $s \in \ker \pi \Rightarrow sa \in \ker \pi \Rightarrow \pi(sa) = \pi(ta) \Rightarrow f(\pi(sa)) = f(\pi(ta))$, 这就证明了 g 是有定义的。显然 g 还是 S -同态。对任意的 $x \in B = Smc$, 总存在 $m \in Sm$ 使得 $x = \pi(m)$, 故 $g(x) = g(\pi(m)) = f(\pi(ma)) = f(\pi(\pi(ma))) = f(\pi(m)) = f(\pi(m)) = f(x)$, 这说明 $g|_B = f$ 。由此得到 A 是 G -内射系。

参考文献:

[1] KILP M, KNAUER U, MIKHAYEV A. Monoids Acts

and Categories[M]. Berlin: de Gruyter, 2000
[2] 刘仲奎. 半群的 S -系理论[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
[3] AHSAN J, LIU Z K. On relatively injective and weakly injective S -acts[J]. Southeast Asian Bull Math, 1997, 21: 249 - 256.
[4] GOULD V A R. The characterization of monoids by properties of their S -systems[J]. Semigroup Forum, 1985, 32: 251 - 265.
[5] CHEN Y Q, SHUM K P. Projective and indecomposable S -acts[J]. Sci China Ser A, 1999, 42: 593 - 599.
[6] AHSAN J. Monoids characterized by their quasi injective S -systems[J]. Semigroup Forum, 1987, 36: 285 - 292.

G -injective S -acts

ZHANG Xia¹, WANG Yan-ming^{1, 2}

(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Lingnan College, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract A new type of injective S -acts is defined, named G -injective S -acts. It is proved that finitely injective acts are G -injective and G -injective acts are principally weakly injective, but not conversely. Properties and sufficient and necessary conditions for G -injective acts are discussed. Characterizations for monoids, all left ideals over which are G -injective and congruence characterizations for C^* -monoids, all acts over which are G -injective are obtained.

Key words G -injective act; cyclic act; S -homomorphism