

时标动力系统的 Robust 稳定性^{*}

欧柳曼^{1,2} 朱思铭²

(1. 广东商学院数学与计算科学系, 广东 广州 510320)

(2. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 时间标度 (简称“时标”) 演算法不仅很好地将连续和离散情形结合于统一的模式中, 而且它包含更广泛的情形。利用时标理论及其广泛的应用背景, 运用 Lyapunov 函数法旨在分析并建立时标动态方程结构扰动下的各种稳定性准则。

关键词: 时标; Lyapunov 函数; robust 稳定

中图分类号: O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 02-0009-03

考虑一阶时标动态方程

$$\hat{x} = f(t, x), \quad t \in T \quad (1)$$

以及它的扰动系统

$$\hat{y} = f(t, y) + g(t, y), \quad t \in T \quad (2)$$

这里, $f, g \in C_{rd}(T \times \Omega_k, \mathbb{R}^n)$, 记 $\Omega_k = \{x \mid \|x\| < k\}$,

$\Omega_k^c = \{x \mid \|x\| \geq k > 0\}$,

$S = \{x \mid \|x\| \leq r\}$, $f(t, x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 。

$g(t, y)$ 本质上未知, 但有界。 $\hat{x}(t)$ 表示 x 在 $t \in T$

的导数。记方程 (1) 满足初始条件 $x(t_0) = x_0, t_0 \in T$

的解为 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, 方程 (2) 满足初始条件

$y(t_0) = y_0, t_0 \in T$ 的解为 $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ 。本文假设方程 (1) 满足 $x(t_0) = x_0, t_0 \in T$ 的解 $x(t) =$

$x(t, t_0, x_0)$ 在 $[t_0, \infty)_T$ 上存在且惟一。关于方程

(1) 解的局部和全局存在性结论可参见文 [1]。

Kamaleddin^[1] 和 Lakshmikantham^[2], 及 Da-

cunh^[3] 及欧柳曼等^[4] 从不同角度探讨了时标动态

方程的 Lyapunov 稳定性问题, 但 Lyapunov 稳定性

只考虑初始条件的扰动, 一个数学模型描述的是一个

实际动态系统, 往往只是近似的, 为了使问题理想化,

变得易于解决, 人们往往忽略一些次要因素。因此考虑时标动态系统结构扰动下的 Robust

稳定性, 更有实际意义。

1 定义及引理

本节给出一些相关的预备知识, 更多内容可见文 [4—5]。

设 T 为一时标 (即实数集 $\mathbb{R}$ 的任意非空闭子集, 具有通常意义下 $\mathbb{R}$ 的良序性和拓扑结构), $a \geq 0$ 为 T 的最小元, 但无最大元。时标区间是指实

数区间与给定时标集的交集, 如 $[a, \infty)_T = \{t \in T \mid t \geq a\}$ 。

由于时标中点有可能是间断的, 因此跳跃算子的概念极为有用。

定义 1 前向跳跃算子 $\sigma(t)$, 以及后向跳跃算子 $\rho(t)$, 分别定义为

$$\sigma(t) = \inf\{s \in T \mid s > t\},$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in T \mid s < t\}.$$

步差函数 $\mu: T \rightarrow [0, \infty)$ 是指 $\sigma(t) - t$ 点 $\in T$ 分别称为右发散的, 右稠密的, 左发散的, 左稠

密的, 孤立的, 稠密点, 若 $\sigma(t) > t, \sigma(t) = t, \rho(t) <$

$t, \rho(t) = t, \rho(t) < t \leq \sigma(t), \rho(t) = t = \sigma(t)$ 。

若 $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ 为一函数, 记 $f(\sigma(t)) = f(t)$ 。

定义 2 对函数 $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ 以及 $t \in T$ 定义 $\hat{f}(t)$ 为 $f(t)$ 的导数, 假如它存在并且 $\forall \varepsilon > 0 \exists$ 的邻域 U 使得

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - \hat{f}(t)[\sigma(t) - s]| \leq$$

$$\varepsilon \mid \sigma(t) - s, \forall s \in U$$

定义 3 称 $f: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 rd -连续, 并记所有 rd -连续函数的集合为 $C_{rd}(T \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, 若

(1) $f(t)$ 在 t 为右稠密的点 (t, x) 处连续,

(2) 极限 $\lim_{(s, y) \rightarrow (t, x)} f(s, y)$ 和 $\lim_{y \rightarrow x} f(t, y)$ 在 t 为左稠密的点 (t, x) 处存在。

定义 4^[1] 称方程 (1) 的零解是指数渐近稳定

① OULM ZHUSM Stability analysis for dynamic equations on time scales [J]. Acta Mathematica Scientia 2006 (To appear).

* 收稿日期: 2005-03-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371135); 香港中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (05M12)

作者简介: 欧柳曼 (1977 年生) 女, 博士, 副教授, 通讯联系人: 朱思铭, E-mail: ouliuman@163.com

的 (简称指数稳定), 若存在常数 $\zeta > 0$ $\gamma > 0$ 使得对任意的 δ 和 γ_0 相应的解 $x(t)$ 满足

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| C_{\delta, \gamma}(t, \delta) \quad \forall t \in [t_0, \infty)_T$$

以下给出时标动态方程的 Robust 稳定性定义。

定义 5 称 (1) 式的零解是结构扰动下 Robust 稳定的, 若对 $\forall \epsilon > 0 \exists \hat{\delta}(\epsilon) > 0 \hat{\gamma}(\epsilon) > 0$ 当 $\|g(t, y)\| \leq \hat{\delta}(\epsilon), \|y_0\| \leq \hat{\gamma}(\epsilon)$ 时, (2) 式的解对 $t \in [t_0, \infty)_T$ 有估计式 $\|y(t, t_0, y_0)\| < \epsilon$ 。

定义 6 称 (1) 式的解在结构扰动下有界 (或称在经常干扰下 Lagrange 稳定), 若 $\forall \tau > 0 \exists$ 常数 $\beta(\tau) > 0 \alpha(\tau) > 0$ 使得当 $t \leq \|y\| \leq \beta(\tau)$ 时, 有 $\|g(t, y)\| < \alpha(\tau)$, 且若 $y_0 \in \Omega_r$, 对一切 $t \in [t_0, \infty)_T$, 有

$$\|y(t, t_0, y_0)\| < \beta(\tau)$$

定义 7 对于给定的函数 $f(t) \in R^+$, (1) 式的解是在 $f(t)$ 级结构扰动下耗散的, 若存在常数 $B > 0 \alpha > 0 \beta > 0$ 使得对 $\|y\| \leq \beta$, 有

$$\|g(t, y)\| < \alpha f(t) \|y\|$$

且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, t_0, y_0)\| < B$ 。

为了能将 Robust 稳定性与系统解的相关性质进行比较, 这里先引入 2 个引理。

引理 1^[4] 若存在 $V(t, x) \in C_{rd}(T \times \Omega_k, R^+)$ 及常数 $\zeta > 0 \xi > 1 \varsigma > 0$, 使得对 $\forall (t, x) \in T \times \Omega_k$, 有

$$(1) \zeta \|x\| \leq V(t, x) \leq \xi \|x\|;$$

$$(2) D^+ \hat{V}(t, x)|_{(1)} \leq (\Theta \varsigma) \|x\|$$

则方程 (1) 的零解指数稳定。

引理 2^① 若存在函数 $V(t, x) \in C_{rd}(T \times \Omega_k^c, R^+)$ 满足

$$(1) V(t, x) \leq \varphi(\|x\|);$$

$$(2) D^+ \hat{V}(t, x) \leq -\varphi(\|x\|), \varphi \in K$$

则 (1) 式表达一耗散系统。

2 Robust 稳定性判据

关于方程 (1) 的结构扰动下的 Robust 稳定性, 本文得到了如下的判定准则。

定理 1 设时标 T ($0 \leq \mu(t) \leq \mu_m < \infty$) 上存在函数 $V(t, x) \in C_{rd}(T \times \Omega_k, R^+)$ 满足

$$(1) \varphi_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2(\|x\|), \varphi_1, \varphi_2 \in K$$

$$(2) D^+ \hat{V}(t, x)|_{(1)} \leq -\alpha V(t, x), \alpha > 0$$

(3) $V(t, x)$ 关于第二变量满足 Lipschitz 条件, 即: $\|V(t, x) - V(t, y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \Omega_k$ 为正常数。

则方程 (1) 的零解在结构扰动下 Robust 稳定。

证明 对任意 $\epsilon > 0$ 取 $0 < \hat{\delta}(\epsilon) < \epsilon$ 使得 $\varphi_2(\hat{\delta}) < \varphi_1(\epsilon)$, 且选取充分小的 δ 使得

$$\varphi_1(\hat{\delta}) - l\delta > 0, \delta < \hat{\delta}$$

因为 $D^+ \hat{V}(t, y)|_{(2)} \leq$

$$-\alpha V(t, y(t, t_0, y_0)) + \|g(t, y(t, t_0, y_0))\| \leq -\alpha V(t, y(t, t_0, y_0)) + l\delta$$

从而 $V(t, y(t, t_0, y_0)) \leq$

$$e_c(t, t_0) V(t_0, y_0) + \int_{t_0}^t e_c(t, \sigma(\tau)) l\delta d\tau =$$

$$e_c(t, t_0) V(t_0, y_0) + \frac{l\delta}{c} \int_{t_0}^t [e_c(t, \tau)]^\Delta d\tau =$$

$$e_c(t, t_0) V(t_0, y_0) + \frac{l\delta}{c} - \frac{l\delta}{c} e_c(t, t_0)$$

又因为 $\varphi_2(\|y_0\|) < \varphi_2(\hat{\delta}) < \varphi_1(\epsilon), \varphi_1(\epsilon) > \varphi_1(\hat{\delta}) > l\delta$ 故

$$\varphi_1(\|y(t, t_0, y_0)\|) \leq V(t, y(t, t_0, y_0)) \leq$$

$$e_c(t, t_0) V(t_0, y_0) + \frac{l\delta}{c} - \frac{l\delta}{c} e_c(t, t_0) \leq$$

$$e_c(t, t_0) \varphi_2(\|y_0\|) + \frac{l\delta}{c} - \frac{l\delta}{c} e_c(t, t_0) \leq$$

$$e_c(t, t_0) \varphi_1(\epsilon) + \frac{l\delta}{c} - \frac{l\delta}{c} e_c(t, t_0) \leq \varphi_1(\epsilon)$$

从而对 $\forall t \in [t_0, \infty)_T$, 有

$$\|y(t, t_0, y_0)\| \leq \epsilon.$$

定理 1 的条件蕴涵 (1) 式零解的指数稳定, 即指数稳定蕴涵着结构扰动下的 Robust 稳定性。但对一般系统, 逆结论不一定成立。对于线性系统本文有下面的结论。

定理 2 对于线性系统

$$\dot{x} = A(t)x, t \in T \quad (3)$$

其中, $A(t) \in C_{rd}(T, R^{n \times n})$ 是退化的, 且 $\|I + \mu A\| < \infty$ 。(3) 式的零解在结构扰动下的 Robust 稳定性蕴涵着它的指数稳定性。

证明 因为 $x(t) = 0$ 在结构扰动下为 Robust

稳定的, 考虑在 $\|x\| \leq 1$ 的邻域, 取 $\epsilon = 1/2$ 则存在 $\delta > 0$ 方程 (3) 的结构扰动系统

$$\dot{y} = A(t)y + \alpha(I + \mu A(t))y \quad (4)$$

的解 $y(t, t_0, y_0)$ (其中 $\|y_0\| < \delta$) 满足

$$\|y(t, t_0, y_0)\| < \frac{1}{2}$$

(3) 式和 (4) 式的解满足关系式

$$x(t, t_0, x_0) = x(t, t_0, x_0) \circ (t, t_0)$$

从而

① OULM ZHUSM Boundedness and dissipation for dynamic equations on time scale [J]. An of Equis 2006 (To appear).

$$\|x(t, t_0, x_0)\| =$$

$$\|y(t, t_0, y_0)\| \leq \frac{1}{2} \delta(t, t_0)$$

所以 $x(t) = 0$ 是指数稳定的。

特别地, 当 $T = \mathbb{R}$ 即 $\mu(t) \equiv 0$ 时, 只需 $A(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$, 而其它条件显然成立, 此时定理 2 正是相应连续系统的相关结论。

定理 3 若存在函数 $V(t, x) \in C_{\text{rd}}(T \times \Omega_k^c, \mathbb{R}^+)$ 满足

$$(1) \varphi_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2(\|x\|), \varphi_1, \varphi_2 \in K\mathbb{R}_+$$

$$(2) D^+ \dot{V}(t, x)|_{(1)} \leq -\alpha(\|x\|), \alpha(t) \text{ 连续正定};$$

$$(3) V(t, x) \text{ 关于 } x \text{ 满足 Lipschitz 条件, 即 } \|V(t, x) - V(t, y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \Omega_k^c \text{ 为正常数.}$$

则方程 (1) 的零解在结构扰动下 Lagrange 稳定。

证明 对任意 $r > 0$ 取 $\beta(r) > 0$ 使得 $\varphi_1(\beta) > \varphi_2(r)$, 由条件 (2) 对紧集 $\{x \mid \|x\| \leq \beta\}$ 中的 x 存在 $k(r) > 0$ 和 $\lambda(r) = \inf_{\|x\| \leq \beta} \alpha(\|x\|) > 0$ 使得

$$\|V(t, x) - V(t, y)\| \leq k(r) \|x - y\|$$

及

$$D^+ \dot{V}(t, x)|_{(1)} \leq -\alpha(\|x\|) \leq \lambda(r)$$

因此在 T_1 和 $\{x \mid \|x\| \leq \beta\}$ 中有

$$D^+ \dot{V}(t, y)|_{(2)} \leq$$

$$D^+ \dot{V}(t, x)|_{(1)} + k(r) \|g(t, y)\| \leq -\lambda(r) + k(r) \|g(t, y)\|.$$

取 $\gamma(r)$ 满足 $0 < \gamma(r) \leq \frac{\lambda(r)}{k(r)}$. 则对于 $t \in [t_0, \infty)$, $\{x \mid \|x\| \leq \beta\}$ 中的 $\|g(t, y)\| \leq \gamma(r)$, 有

$$D^+ \dot{V}(t, y)|_{(2)} \leq 0$$

从而对 $y_0 \in \Omega_k = \{y \mid \|y\| \leq r\}$ 及 $\forall t \in [t_0, \infty)$, 有

$$\varphi_1(\|y(t, t_0, y_0)\|) \leq V(t, y(t, t_0, y_0)) \leq$$

$$V(t_0, y_0) \leq \varphi_2(\|y_0\|) \leq \varphi_2(r) < \varphi_1(\beta),$$

即 $\|y(t, t_0, y_0)\| < \beta$. 故结论为真。

定理 4 若定理 3 的条件满足, 设 $L(t)$ 是 Lipschitz 常数, 若对 $\forall x, y \in S$,

$$\|V(t, x) - V(t, y)\| \leq L(t) \|x - y\| \text{ 成立.}$$

若 $t \rightarrow \infty, L(t) f(t) = 0$ ($\alpha(t)$), 则方程 (1) 的解在 $f(t)$ 级结构扰动下是耗散的。

证明 由假设, 可选择 $\alpha > 0$ 使得 $\alpha \leq \frac{\alpha(t)}{2L(t)f(t)}$. 当 $t \geq k$ 时 (k 为某一正常数) 对此 α 若

$$\|g(t, y)\| \leq \alpha f(t) \|y\|$$

当 $\|y\| \geq k$ 时, 有

$$D^+ \dot{V}(t, y)|_{(2)} \leq$$

$$D^+ \dot{V}(t, y)|_{(1)} + L(t) \|y\| \|g(t, y)\| \leq -\alpha(\|y\|) + \alpha L(t) \|y\| f(t) \|y\| \leq -\frac{1}{2} \alpha(\|y\|)$$

故由引理 2 知, 结论成立。

参考文献:

- [1] KAYMAKÇI ALAN B. Existence and comparison results for dynamic systems on time scales[J]. J Math Anal Appl. 1993; 192: 243—255.
- [2] LAKSHMI KANTHAM V. SIVASUNDARAM S. Stability of moving invariant sets and uncertain dynamic systems on time scales[J]. Comput Math Appl. 1998; 36(10—12): 339—346.
- [3] DACUNHA J J. Stability for time varying linear dynamic systems on time scales[J]. J Comput Appl Math. 2005; 176(2): 381—410.
- [4] BOHNER M. PETERSON A. Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction and Applications[M]. Boston: Birkhauser, 2001.
- [5] HILGER S. Analysis on measure chains— a unified approach to continuous and discrete calculus[J]. Res Math. 1990; 18: 18—56.

Robust Stability for Dynamic Equations on Time Scales

OU Liuman², ZHU Siming²

(1. Department of Mathematics, Guangdong University of Business Studies, Guangzhou 510320, China;

2. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The calculus of time scales not only unifies the continuous and the discrete in one mathematical form, but also includes more situations. Utilizing the theory of time scale and its extensive application, hereby using the method of Lyapunov function, some criteria of stability under the structural perturbation for dynamic equations on time scales are analyzed and established.

Key words: time scale; Lyapunov function; robust stability