

压电弹性薄板动力学非传统 Hamilton 型变分原理^{*}

朱慧坚^{1,2}, 罗恩¹

(1. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275;
2. 佛山科学技术学院土木工程与建筑学系, 广东 佛山 528000)

摘 要: 通过罗恩早已提出的一条简单而统一的新途径, 系统地建立了压电弹性薄板动力学的虚功原理和 8 类变量、6 类变量、4 类变量与 2 类变量非传统 Hamilton 型变分原理。这种新的变分原理能反映动力学初值一边值问题的全部特征。

关键词: 压电弹性薄板动力学; 虚功原理; 非传统 Hamilton 变分原理; 初值一边值问题; 限制变分
中图分类号: O347 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 02-0016-04

压电弹性薄板在智能结构中有广泛的应用, 对于压电弹性动力学, Tiersten^[1] 于 1969 年建立了 2 类变量 Hamilton 型变分原理; Sandhu 和 Pister^[2] 于 1971 年建立了 6 类变量 Gurtin 型变分原理; Oden 和 Reddy^[3] 于 1976 年建立了 6 类变量简化 Gurtin 型变分原理, 但其泛函式中与初始条件有关的项有明显错误。罗恩等^[4] 于 1997 年系统地建立了虚功原理、互等定理和 8 类变量、6 类变量、4 类变量与 2 类变量简化 Gurtin 型变分原理, 不仅改正了 Oden 和 Reddy 在专著 [3] 中的错误, 而且给出了正确的泛函式。罗恩等^[5] 于 2002 年又系统地建立了有限变形压电弹性动力学的虚功原理和 8 类变量、6 类变量、4 类变量与 2 类变量非传统 Hamilton 型变分原理, 这种新的变分原理能反映以上动力学初值一边值问题的全部特征, 从而克服了 Hamilton 型变分原理不能反映动力学初值一边值问题的全部特征的固有缺陷。但是, 有关压电弹性薄板动力学的一些基本原理, 如虚功原理和能反映动力学初值一边值问题全部特征的简化 Gurtin 型变分原理和非传统 Hamilton 型变分原理还没有系统建立。

本文首先给出一个压电弹性薄板动力学的广义虚功原理的表式, 然后从该式出发, 不仅能得到虚功原理, 而且通过所给出的广义 Legendre 变换, 还能系统地导出压电弹性薄板动力学的 8 类变量、6 类变量、4 类变量与 2 类变量非传统 Hamilton 型变分原理的互补泛函。同时, 通过这条新途径, 能更清楚地阐明这些原理之间的内在联系。

1 压电弹性薄板的基本方程和条件

考虑厚度为 h 的压电弹性薄板, 取薄板中面为 xy 平面, z 轴与 x 、 y 轴垂直, 变形满足 Kirchhoff 假设, 沿 z 轴极化, 只考虑横向电场 E_z , 其基本方程、边界条件和初始条件如下:

(1) 速度挠度关系

$$\dot{w} = \partial w / \partial t = \dot{w} \quad (1)$$

其中位移函数为 $w(x, y, t)$, $u = -\partial w / \partial x = -\dot{w}_x$, $v = -\partial w / \partial y = -\dot{w}_y$

(2) 动量速度关系

$$p = m \dot{w} \quad (2)$$

式中, m 为单位面积的质量。

相应的动能密度和余动能密度分别为 $K(\dot{w}) = m \dot{w}^2 / 2$, $K^*(p) = p^2 / 2m$

(3) 几何方程

$$\kappa_x = -\dot{w}_{xx} \quad (3)$$

$$\kappa_y = -\dot{w}_{yy} \quad (4)$$

$$\kappa_{xy} = -\dot{w}_{xy} \quad (5)$$

(3) 本构关系^[6]

$$M = C\kappa - e^T E \quad (6)$$

$$\text{或 } \kappa = SM - D^T D \quad (7)$$

$$D = \xi_{31}^* (\kappa_x + \kappa_y) + \xi_{33}^* E \quad (8)$$

$$\text{或 } E = \xi_{31}^* (M_x + M_y) + \beta_{33} D \quad (9)$$

上式中, $E = \int_{-h/2}^{h/2} \mathcal{E}_z dz$, $D = \int_{-h/2}^{h/2} \mathcal{D}_z dz$, $M = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T$, $\kappa = [\kappa_x \ \kappa_y \ \kappa_{xy}]^T$ 分别表示内

* 收稿日期: 2005-03-10

基金项目: 高校博士点科研基金资助项目 (20030558025); 国家自然科学基金资助项目 (10172097)

作者简介: 朱慧坚 (1977 年生), 女, 博士, 讲师; 通讯联系人: 罗恩, E-mail: luoenzs@sinacn.cn

力矩和挠曲面的曲率矢量； $C_{\epsilon} g_{33}$, $S_d \beta_{33}$ 分别表示横观各向同性压电弹性薄板的弯曲刚度矩阵、压电应力矩阵、压电介电常数、弯曲柔度矩阵、压电电压矩阵和介电隔离常数。 C_{α} 中非零分量以及 g_{33} 与三维横观各向同性压电弹性体对应分量的关系为（上标 ϵ 代表横观各向同性三维压电弹性体）：

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} = J_1 \dot{c}_{11}, \quad c_{12} = c_{21} = J_1 \dot{c}_{12}, \\ c_{33} &= 2 J_1 \dot{c}_{66}, \quad c_{31} = J_1 \dot{c}_{31}, \quad g_{33} = g_{33}^{\epsilon} \end{aligned}$$

式中， $J = R^2/12$, $J_d = R^2/4$ 。

压电弹性薄板的电焓 $U(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, E)$ 和 $U^*(M_x, M_y, M_{xy}, D)$ 余电焓分别表示为

$$U(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, E) = [c_{11}(\kappa_x^2 + \kappa_y^2) + 2c_{12}\kappa_x\kappa_y + c_{33}\kappa_{xy}^2]/2 - \epsilon_{31}E(\kappa_x + \kappa_y) - g_{33}E^2/2 \quad (10)$$

$$U^*(M_x, M_y, M_{xy}, D) = [s_{11}(M_x^2 + M_y^2) + 2s_{12}M_xM_y + s_{33}M_{xy}^2]/2 - d_{31}D(M_x + M_y) - \beta_{33}D^2/2 \quad (11)$$

(5) Maxwell 方程

对于拟静电场有

$$D/h = q \quad (12)$$

$$E = -\varphi/h \quad (13)$$

式中 q 和 φ 分别为单位面积的电荷密度和电势。

(6) 运动方程

$$M_{xx} + 2M_{xy} + M_{yy} + f = p \quad (14)$$

$$\text{或 } M_{xx} + 2M_{xy} + M_{yy} + f = m\ddot{w} \quad (15)$$

(7) 边界条件

$$w = \bar{w} \text{ 在 } \partial\Omega_w \text{ 上} \quad (16)$$

$$\theta_n = \frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\theta}_n \text{ 在 } \partial\Omega_\theta \text{ 上} \quad (17)$$

$$M_n = \bar{M}_n \text{ 在 } \partial\Omega_M \text{ 上} \quad (18)$$

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n = \bar{q} \text{ 在 } \partial\Omega_q \text{ 上} \quad (19)$$

$$\varphi = \bar{\varphi} \text{ 在 } \partial\Omega_\varphi \text{ 上} \quad (20)$$

$$D = \bar{D} \text{ 在 } \partial\Omega_D \text{ 上} \quad (21)$$

式中， $\bar{w}$, $\bar{\theta}_n$, $\bar{M}_n$, $\bar{q}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{D}$ 为已知边界值。

(8) 初始条件

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y) \quad (22)$$

$$p(x, y, 0) = p_0(x, y) \quad (23)$$

式中， $w_0(x, y)$, $p_0(x, y)$ 为已知初始值。

2 广义虚功原理与虚功原理

可以证明，对任意独立函数 $p, M_x, M_y, M_{xy}, w, D, \varphi$ ，下列积分关系式恒成立：

$$\int_0^t \iint_{\Omega} (p\dot{w} + M_x \dot{w}_{xx} + M_y \dot{w}_{yy} + 2M_{xy} \dot{w}_{xy} - D\dot{p}/h) dx dy dt +$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \iint_{\Omega} [w(p - M_{xx} - 2M_{xy} - M_{yy}) + \varphi D/h] dx dy dt + \\ & \int_0^t \iint_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n \right) w - M_n \theta_n \right] dS dt - \\ & \iint_{\Omega} [w(x, y, t) p(x, y, t) - \\ & w(x, y, 0) p(x, y, 0)] dx dy = \\ & \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_4 = 0 \quad (24) \end{aligned}$$

式中 $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ 分别表示第 1、2、3、4 项积分。

(24) 式是本文给出的一个关键表达式，它可以看成是压电弹性薄板动力学的广义虚功原理的表式。从该式出发，可以系统地推导出虚功原理和各类非传统 Hamilton 型变分原理。

当 p, M_x, M_y, M_{xy} 满足方程 (14) 及条件 (18)、(19) 和 (23)； D 满足方程 (12) 及条件 (23)； w 满足方程 (1) 和 (3)–(5) 及条件 (16)、(17)、(22)； φ 满足方程 (13) 及条件 (20) 时，则由 (24) 式可得

$$\begin{aligned} & \int_0^t \iint_{\Omega} (f\dot{w} + \varphi\dot{D}) dx dy dt + \int_0^t \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n \right) w - \\ & M_n \theta_n dS dt - \iint_{\Omega} [w(x, y, t) p(x, y, t) - \\ & w_0(x, y) p_0(x, y)] dx dy = \int_0^t \iint_{\Omega} (M_x \dot{\kappa}_x + M_y \dot{\kappa}_y + \\ & 2M_{xy} \dot{\kappa}_{xy} - p\dot{w} - D\dot{E}) dx dy dt \quad (25) \end{aligned}$$

(25) 式可以看成是压电弹性薄板动力学的虚功原理的表式，它反映了广义动力可能状态与广义运动可能状态之间最一般的关系，或者说，它反映了 f, q, p, M, D 与 w, φ, y, κ, E 这两组对偶变量之间的最一般关系。

3 各类非传统 Hamilton 型变分原理

3.1 8 类变量广义变分原理

当 M 和 κ, D 和 E 是独立的任意函数时，可以建立下列关系式

$$\begin{aligned} & M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2M_{xy} \kappa_{xy} - DE = \\ & U(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, E) + U^*(M_x, M_y, M_{xy}, D) + \\ & A(M_x, M_y, M_{xy}, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, D, E) \quad (26) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} & A(M_x, M_y, M_{xy}, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, D, E) = \\ & [M_x - (c_{11}\kappa_x + c_{12}\kappa_y - \epsilon_{31}E)] \cdot \\ & [\kappa_x - (s_{11}M_x + s_{12}M_y - d_{31}D)]/2 + \\ & [M_y - (c_{12}\kappa_x + c_{22}\kappa_y - \epsilon_{31}E)] \cdot \\ & [\kappa_y - (s_{12}M_x + s_{22}M_y - d_{31}D)]/2 + \\ & (M_{xy} - 2c_{33}\kappa_{xy})(2\kappa_{xy} - s_{33}M_{xy})/2 + \\ & [D - \epsilon_{31}(\kappa_x + \kappa_y) - g_{33}E] \cdot \end{aligned}$$

$$[E - d_1^*(M_k + M_y) - \beta_{33} D] / 2$$

只有当 M 和 κ 、 D 和 E 满足式 (6)–(9) 式时, 才有

$$M_k \kappa_x + M_y \kappa_y + 2M_{xy} \kappa_{xy} - DE =$$

$$U(\kappa_x \kappa_y \kappa_{xy} E) + U^*(M_x M_y M_{xy} D) \quad (27)$$

于是, (24) 式第 1 项积分 Π_1 中的被积函数 $M_k \kappa_x + M_y \kappa_y + 2M_{xy} \kappa_{xy} - D\varphi/h$ 可变换为

$$M_k \kappa_{xx} + M_y \kappa_{yy} + 2M_{xy} \kappa_{xy} - D\varphi/h =$$

$$-U(\kappa_x \kappa_y \kappa_{xy} E) + M_k(\kappa_x + \kappa_{xx}) + M_y(\kappa_y + \kappa_{yy}) + 2M_{xy}(\kappa_{xy} + \kappa_{xy}) - D(E - \varphi/h) -$$

$$U^*(M_x M_y M_{xy} D) -$$

$$A(M_x M_y M_{xy} \kappa_x \kappa_y \kappa_{xy} D E) \quad (28)$$

当 P 和 v 是独立的任意函数时, 可以得到下列关系式

$$Pv = K(v) + K^*(P) - B(P, v) \quad (29)$$

式中, $B(P, v) = (mv - P)(mv - P)/(2m)$

只有当 P 和 v 满足 (2) 式时, 才有

$$Pv = K(v) + K^*(P) \quad (30)$$

因此, (24) 式第 1 项积分 Π_1 中的被积函数 Pw 可变换为

$$Pw = K(v) - R(v - w) + K^*(P) - B(P, v) \quad (31)$$

上述 (26) 和 (29) 式是本文给出的广义 Legendre 变换式。

而 (24) 式中 $\Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_4$ 可变换为

$$\begin{aligned} \Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_4 = & \int_0^t \int_{\Omega} [P - M_k \kappa_{xx} - 2M_{xy} \kappa_{xy} - \\ & M_y \kappa_{yy} - f w + (D/h - q)\varphi] dx dy dt + \\ & \Gamma_{1B} + \Gamma + \int_0^t \int_{\Omega} [f w + q\varphi] dx dy dt + \Pi_{1B} + \Pi \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_{1B} = & \int_0^t \left\{ - \int_{\partial M} \bar{M}_n \theta_n dS + \int_{\partial q} \bar{q} w dS - \right. \\ & \int_{\partial q} (\theta_n - \bar{\theta}_n) M_n dS + \int_{\partial w} (w - \bar{w}) \cdot \\ & \left. \left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n \right) dS + \int_{\partial D} (D - \bar{D}) \varphi dS + \right. \\ & \left. \int_{\partial \varphi} (\varphi - \bar{\varphi}) D dS \right\} dt + \int_{\Omega} \left\{ P_0(x, y) w(x, y, t) - \right. \\ & \left. [w_0(x, y) - w(x, y, 0)] P(x, y, 0) \right\} dx dy \quad (33) \\ \Gamma_{1B} = & \int_0^t \left\{ \int_{\partial q} \bar{\theta}_n M_n dS + \int_{\partial w} \left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n \right) \bar{w} dS - \right. \\ & \int_{\partial T} (M_n - \bar{M}_n) \theta_n dS + \int_{\partial q} \left[\left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n - \bar{q} \right) \bar{w} \right] dS - \\ & \left. \int_{\partial \varphi} (\varphi - \bar{\varphi}) D dS + \int_{\partial D} \varphi (D - \bar{D}) \varphi dS \right\} dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [P(x, y, 0) w_0(x, y) - \\ & P_0(x, y) w(x, y, t)] dx dy \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi = & - \int_{\Omega} [P(x, y, t) + P(x, y, 0)] \cdot \\ & w(x, y, t) dx dy \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma = & - \int_{\Omega} [w(x, y, t) P(x, y, t) - \\ & P(x, y, 0) w(x, y, t)] dx dy \quad (36) \end{aligned}$$

式中带顶标的量为限制变分量^[7]。

将式 (28), (31) 和 (32) 代入 (24) 式, 经整理后可得

$$\begin{aligned} \Pi_8(P, v, w, M_k, M_y, M_{xy}, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \varphi, D, E) + \\ \Gamma_8(P, v, w, M_k, M_y, M_{xy}, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \varphi, D, E) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

而泛函 Π_8 和 Γ_8 分别为

$$\begin{aligned} \Pi_8 = & \int_0^t \int_{\Omega} [K(v) - P(v - w) - \\ & U(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, E) + M_k(\kappa_x + \kappa_{xx}) + \\ & M_y(\kappa_y + \kappa_{yy}) + 2M_{xy}(\kappa_{xy} + \kappa_{xy}) - D(E - \varphi/h) + \\ & f w + q\varphi] dx dy dt + \Pi_{1B} + \Pi \\ \Gamma_8 = & \int_0^t \int_{\Omega} [K^*(P) - B(P, v) - \\ & U^*(M_x, M_y, M_{xy}, D) - \\ & A(M_x, M_y, M_{xy}, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, D, E) - \\ & (M_k \kappa_{xx} + 2M_{xy} \kappa_{xy} + M_y \kappa_{yy} + f - P) w + \\ & (D/h - q)\varphi] dx dy dt + \Gamma_{1B} + \Gamma \end{aligned} \quad (38) \quad (39)$$

定理 1 当且仅当 $P, v, w, M_k, M_y, M_{xy}, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \varphi, D, E$ 是混合问题 (1)–(6)、(8)、(12)–(14)、(16)–(23) 式的解, 则必定满足下列变分式 $\delta \Pi_8 = 0$ 或 $\delta \Gamma_8 = 0$

Π_8 和 Γ_8 分别是压电弹性薄板 8 类变量非传统 Hamilton 型变分原理的势能形式和余能形式的泛函, 对任意无关的 $P, v, w, M_k, M_y, M_{xy}, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, \varphi, E, D$ 它们之间存在互补关系式 (37)。

因篇幅所限, 略去定理的证明。

当 P, v, w 满足 (1) 和 (2) 式时, 由 8 类变量变分原理的泛函式可导出 6 类变量变分原理的泛函式; 当 M 和 κ 、 D 和 E 满足式 (6)–(9) 式时, 可由 6 类变量变分原理的泛函式导出 4 类变量变分原理的泛函式。因篇幅所限, 略去具体推导过程。

3.2 2 类变量广义变分原理

当 P, v, w 满足 (1) 和 (2) 式, M 和 κ 、 D 和 E 满足 (6) 和 (8) 式, $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ 和 w, E 和 φ 分别满足 (4)–(6) 和 (13) 式时, 由 Π_8 可导出

$$\begin{aligned} \Pi_2(\dot{w}, \varphi) = & \int_0^t \iint_{\Omega} (m\dot{w}^2/2 - \\ & U(-\dot{w}_{xx} - \dot{w}_{yy} - \dot{w}_{xy} - \varphi/h) + f\dot{w} + \varphi) dx dy dt + \\ \Pi_{1B} = & \iint_{\Omega} [m(\dot{w}(x, y, t) + \dot{w}(x, y, 0))] \cdot \\ & w(x, y, t) dx dy \end{aligned} \tag{40}$$

定理 2 当且仅当 $\dot{w}, \varphi$ 是混合问题 (16) – (23) 及下式

$$\begin{aligned} & (-c_{11}\dot{w}_{xx} - c_{12}\dot{w}_{yy} + g_1\varphi/h)_{xx} - 2c_{33}\dot{w}_{xy} + \\ & (-c_{12}\dot{w}_{xx} - c_{22}\dot{w}_{yy} + g_1\varphi/h)_{yy} + f = m\ddot{w} \tag{41} \\ & [c_{31}(-\dot{w}_{xx} - \dot{w}_{yy}) + g_3\varphi/h]/h = q \tag{42} \end{aligned}$$

的解，则必定满足变分式 $\delta \Pi_2 = 0$

Π_2 是 2 类变量非传统 Hamilton 型变分原理的势能形式的泛函。

4 结 论

本文所建立的虚功原理和各类非传统 Hamilton 型变分原理是压电弹性薄板动力学一般理论中最核心的部分。这些非传统 Hamilton 型变分原理都是限制变分原理。它们能反映这种动力学初值–边值问题的全部特征，克服了传统 Hamilton 型变分原理的固有缺陷。因此，本文所建立的这些新的变分原理，无论在有关压电弹性薄板的理论研究方面，还是在建立其动力分析的各种近似解法和工程实用理论方面都有重要作用。

参考文献：

[1] TIERSTEN H F Linear Piezoelectric Plate Vibration[M]. New York: Plenum Press, 1969.

[2] SANDHU R S, PISTER K S Variational Principles for boundary value and initial-boundary value problems in continuum mechanics[J]. Int J Solids Structures, 1971, 7: 639–654.

[3] ODEN J T, REDDY J N Variational Methods in Theoretical Mechanics[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1983: 169–173.

[4] 罗恩, 张贺忻. 压电弹性动力学的一些基本原理[J]. 现代力学与科技进步, 1997: 1272–1275.

[5] 罗恩, 罗志国. 有限变形压电弹性动力学的非传统 Hamilton 型变分原理. 钱学森技术科学思想与力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.

[6] 姚林泉, 俞焕然. 具有压电材料薄板弯曲控制的有限元法[J]. 计算力学学报, 1999, 16(3): 330–333.

[7] FINLAYSON B A, SCRIVEN L. On the search for variational Principles[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1967, 10: 799.

[8] 罗恩, 黄伟江, 朱慧坚. Hamilton 弹性动力学及其辛算法——一个新学科研究的进展[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2003, 42(6): 131–132.

[9] 罗恩. 关于线弹性动力学中各种 Gurtin 型变分原理[J]. 中国科学: A 辑, 1987(9): 936–948.

Unconventional Hamilton-type Variational Principles for Elastodynamics of Piezoelectric Thin Plate

ZHU Hui-jian^{1,2}, LUO En

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Department of Civil Engineering and Architecture, Foshan Science and Technology University, Foshan 528000, China)

Abstract: The principle of virtual work, eight-field, six-field, four-field and two-field unconventional Hamilton-type variational principles for elastodynamics of piezoelectric thin plate are established systematically in a simple and unified way proposed by Luo. The new variational principles can fully characterize the initial-boundary-value problem of this dynamics.

Key words: elastodynamics of piezoelectric thin plate; principle of virtual work; unconventional Hamilton variational principles; initial-boundary-value problem; restricted variation