

一种新的证券组合风险度量方法^{*}

梁四安, 蒋春福, 戴永隆

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 在尾部条件期望 (TCE) 基础上, 考虑投资者的真实风险感受, 研究了一种新的风险度量方法——Shortfall 风险度量, 并在一致性公理下研究了它的一些统计性质, 最后在多元椭圆分布下得到了证券组合的 Shortfall 风险, 还在多元 t 分布下得到了证券组合的 Shortfall 风险的数值结果。

关键词: 风险度量; Shortfall 风险; 证券组合

中图分类号: O211.6 F8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 02-0012-04

1 金融资产风险度量方法研究进展

在进行证券组合投资分析时, 风险度量方法的选择会直接影响到投资决策, 自从 Markowitz^[1] 在他的 M-V 模型中最早提出用方差来度量风险开始, 国内外很多学者研究了各种不同的风险度量方法, 先后出现了下端部分矩^[2]、绝对离差^[3]、在险价值、条件在险价值^[4] 等风险度量方法。

下端部分矩 (Lower Partial Moments, LPM) 认为只有收益低于目标值 τ 时才发生风险, 因此将低于 τ 的收益按概率平均才是风险值, 其数学表达式为: $LPM_a(r, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^a dF(x)$ 。其中 $a \geq 0$ 是 LPM 的阶数。当 $\tau = E(r)$, $a=2$ 时, 它就是半方差; 当 $a=1$, 它就是单边偏离 τ 的均值。LPM 综合考虑了投资者对风险的厌恶程度和期望目标的高低, 是方差和半方差的自然推广, 不过它也有 2 个缺点: ①它是所有可能损失的期望值, 所以只反映了概率比较大的部分的损失值; ②它不能反映这个平均损失发生的概率。绝对离差 (Absolute Deviation) 从理论上要优于方差度量, 但由于绝对离差是不光滑的, 解的性质不便于讨论, 所以这种方法不很受人关注。在险价值 (VaR) 技术是 1994 年 Morgan 投资银行在其开发的一个名为 “Risk metrics” 的系统中最早提出来的。目前该方法已经得到了国际金融界的广泛重视和应用, 但当证券收益的分布为非椭圆分布时, VaR 也存在一些问题, 主要体现在: ① VaR 不具有次可加性是其最致命的缺陷, 因为破坏了风险分散化原理; ② M-VaR 投资组合模型存在多个局部最优解, 因此证券组合

的有效边界不唯一。

为了克服这些缺点, Artzner 等^[4] 在离散概率空间提出风险度量方法的一致性的概念, 并提出用期望损失 (Expected Shortfall) 来度量风险。Delbaen^[5] 将他们的结论推广到连续概率空间 $L^\infty(\Omega)$ 上, 提出了满足一致性公理的 CVaR (Conditional Value at Risk) 风险度量, 并得到了相应的表示定理。

2 证券组合 Shortfall 风险度量

风险在很大程度上与投资者的个体心理感受有关, 一般认为只有投资发生损失时才存在风险, 所以有必要考虑投资者对风险基准理解上的不同, Mazzoleni^[6] 也建议考虑投资者的风险基准, 这样更符合投资者心理, 吴世农等^[7] 重点阐述了投资者的真实风险感受的重要性。事实上, LPM、半方差和绝对离差等都考虑了投资者心理感受, 只不过不同的度量方法对风险基准 (Risk Benchmark) 或称参照水平 (Reference Level) 的设定有些不同罢了。

考虑包含 n 种资产的证券组合问题, 收益率向量用 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ 表示, 其中 r_i 表示第 i 种风险证券的收益率, 期望收益为 $u = E(r)$, 设投资者在 n 种证券的投资比例分别为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, 对于一个证券组合 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)'$, $r_\omega = r'\omega$ 为组合证券的收益率。

约定 $q_\alpha(X)$ 表示随机变量 X 的 α -分位数, 即

$$q_\alpha(X) = \inf\{x | P(X \leq x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1) \quad (1)$$

* 收稿日期: 2005-04-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271120)

作者简介: 梁四安 (1970 年生), 男, 博士生, 经济师, E-mail: liangsi'an@21cn.com

因此，当给定一置信水平 $\alpha \in (0, 1)$ 时，组合头寸 r_w 的 VaR 值为：

$$VaR_{\alpha}(r_w) = \mu_w - q_{\alpha}(r_w) \tag{2}$$

1999 年 Artzner^[4] 提出用尾部条件期望 (Tail Conditional Expectation) 来度量风险，即

$$TCE_{\alpha}(r_w) = -E[r_w | r_w \leq q_{\alpha}(r_w)] \tag{3}$$

显然， $TCE(\cdot)$ 为一致风险度量，但没有考虑证券的期望收益，Bertsimas^[8] 对 $TCE(\cdot)$ 风险度量作了修正，给出一种新的风险度量：

$$s_{\alpha}(r_w) = \mu_w - E[r_w | r_w \leq q_{\alpha}(r_w)] = \mu_w - \frac{1}{\alpha} E[r_w 1_{\{r_w \leq q_{\alpha}(r_w)\}}] \tag{4}$$

称之为证券组合的 Shortfall 风险度量。

由文献 [9] 易得

$$s_{\alpha}(r_w) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} VaR_t(r_w) dt \tag{5}$$

又因为 $VaR_{\alpha}(r_w)$ 关于 α 递减，所以由 (5) 式知 $s_{\alpha}(r_w) \geq VaR_{\alpha}(r_w)$ 。

特别地， $r_w \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$ ，其中 $\sigma_w = (w^T V w)^{1/2}$

$$VaR_{\alpha}(w) = z_{\alpha} \sigma_w, s_{\alpha}(w) = a^{-1} \phi(z_{\alpha}) \sigma_w$$

$$TCE_{\alpha}(w) = s_{\alpha}(w) - \mu_w \tag{6}$$

其中， $\phi(z)$ 为标准正态分布的密度函数， z_{α} 为其上 α 分位数，即 $P\{Z > z_{\alpha}\} = \alpha$ 。

$VaR_{\alpha}(r_w)$ 和 $s_{\alpha}(w)$ 的关系也可以用如下图形表示 (图 1)。

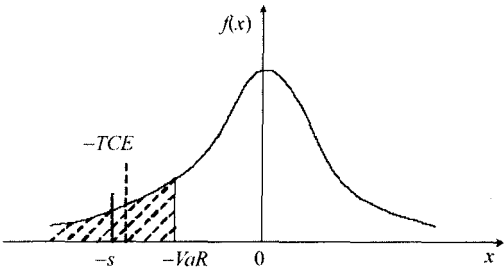


图 1 TCE、VaR 和 Shortfall 风险度量对比

Fig 1 A comparison of TCE, VaR and Shortfall risk measure

图中 $f(x)$ 为证券组合收益 r_w 的分布密度函数。文献 [7] 曾指出对风险大小进行数值比较并没有什么意义，因为它们是从不同角度来度量风险的，所以大小肯定会不同，重要的是看它们是从什么角度来度量风险，它们又真正能度量哪些风险。 $VaR_{\alpha}(w)$ 仅能说明证券组合的损失超过 $VaR_{\alpha}(w)$ 的概率为 α ，但不能确定损失的大小，而 $s_{\alpha}(w)$ 反映的是证券组合的损失超过 $VaR_{\alpha}(w)$ 的平均损失大小。 $s_{\alpha}(w)$ 和 $TCE_{\alpha}(w)$ 能度量最坏情况下的潜在损失，

这正是 $VaR_{\alpha}(w)$ 不能度量出来的。从这个角度来理解， $s_{\alpha}(w)$ 和 $TCE_{\alpha}(w)$ 的确是比 $VaR_{\alpha}(w)$ 更合理的度量。而且， $s_{\alpha}(w)$ 对于椭圆对称分布和非椭圆对称分布，都具有次可加性和正齐次性， $TCE_{\alpha}(w)$ 为一致性风险度量，而 $VaR_{\alpha}(w)$ 仅对椭圆对称分布具有次可加性，这正是 $VaR_{\alpha}(w)$ 致命的缺陷。认为 r_w 低于 μ_w 就存在风险，这更符合投资者的真实风险感受，因此，从这个角度出发，用 $s_{\alpha}(w)$ 和 $TCE_{\alpha}(w)$ 来度量风险更合理。

定理 1 设 n 种证券的收益率向量 R 满足 $E(R) < \infty$ ，则对于置信水平 $\alpha \in (0, 1)$ ，shortfall 风险具有

- (1) 单调性：任给 $\epsilon > 0$ 且 $\alpha + \epsilon \in (0, 1)$ ，有 $s_{\alpha+\epsilon}(w) \leq s_{\alpha}(w)$ 。
- (2) 次可加性：任给 $w_1, w_2 \in \mathbf{R}^n$ 有 $s_{\alpha}(w_1 + w_2) \leq s_{\alpha}(w_1) + s_{\alpha}(w_2)$ 。
- (3) 正齐次性：任给 $\lambda > 0$ 有 $s_{\alpha}(\lambda w) = \lambda s_{\alpha}(w)$ 。

证明 (1): 由 (4) 式知

$$s_{\alpha}(w) = \mu_w - \alpha^{-1} E[r_w 1_{\{r_w \leq q_{\alpha}(r_w)\}}] \tag{7}$$

所以

$$s_{\alpha+\epsilon}(w) - s_{\alpha}(w) =$$

$$-\frac{1}{\alpha} E[r_w \{1_{\{r_w \leq q_{\alpha}(r_w)\}} - 1_{\{r_w \leq q_{\alpha+\epsilon}(r_w)\}}\}]$$

显然 $1_{\{r_w \leq q_{\alpha}(r_w)\}} - 1_{\{r_w \leq q_{\alpha+\epsilon}(r_w)\}} \leq 0$ 所以 $s_{\alpha+\epsilon}(w) \leq s_{\alpha}(w)$ 。

(2) 令 $w = w_1 + w_2$ ，则由 (7) 式知

$$s_{\alpha}(w_1) + s_{\alpha}(w_2) - s_{\alpha}(w) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} E[r_w 1_{\{r_w \leq q_{\alpha}(r_w)\}} - r_{w1} 1_{\{r_{w1} \leq q_{\alpha}(r_{w1})\}} - r_{w2} 1_{\{r_{w2} \leq q_{\alpha}(r_{w2})\}}] = \\ & \frac{1}{\alpha} E[r_{w1} (1_{\{r_w \leq q_{\alpha}(r_w)\}} - 1_{\{r_{w1} \leq q_{\alpha}(r_{w1})\}})] + \\ & \frac{1}{\alpha} E[r_{w2} (1_{\{r_w \leq q_{\alpha}(r_w)\}} - 1_{\{r_{w2} \leq q_{\alpha}(r_{w2})\}})] \geq \\ & \frac{q_{\alpha}(r_{w1})}{\alpha} E[(1_{\{r_w \leq q_{\alpha}(r_w)\}} - 1_{\{r_{w1} \leq q_{\alpha}(r_{w1})\}})] + \\ & \frac{q_{\alpha}(r_{w2})}{\alpha} E[(1_{\{r_w \leq q_{\alpha}(r_w)\}} - 1_{\{r_{w2} \leq q_{\alpha}(r_{w2})\}})] = 0 \end{aligned}$$

(3) 显然 $q_{\alpha}(\lambda w) = \lambda q_{\alpha}(r_w)$ 对所有 $\lambda > 0$ 成立，从而正齐次性满足，定理证毕。

3 椭圆分布下证券组合的 Shortfall 风险

在投资实践中，人们发现证券收益的经验分布往往偏离正态分布，而呈现出高峰厚尾的特征，为此人们提出了具有高峰厚尾特征的分

-分布是一种特殊的椭圆分布, 为此我们先研究椭圆分布下证券组合的 Shortfall 风险, 然后研究证券收益服从 t -分布时的情形。

设 X 为 n 维随机向量, V 为 X 的协方差矩阵, μ 为 X 的期望值向量, 则 X 服从多元椭圆分布, 是指 X 有密度函数

$$f(x) = |V|^{-1/2} g((x - \mu)' V^{-1} (x - \mu)) \quad (8)$$

其中, $g(\cdot)$ 为一非负实函数, 记为 $X \sim E_n(\mu, V, g)$ 。特别地, 多元 t 分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2})}{\Gamma(v/2) \sqrt{|V|} (\sqrt{\pi})^n} \cdot (1 + \frac{(x - \mu)' V^{-1} (x - \mu)}{v})^{-(v+n)/2} \quad (9)$$

其中, $x \in \mathbf{R}^n$, $v \geq 2$ 记为 $X \sim t_n(\mu, V, v)$ 。此时, 函数 $g(\cdot)$ 定义为

$$g(\mu) = C(v, n) (1 + \mu' \mu)^{-(v+n)/2},$$

$$C(v, n) = \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2})}{\Gamma(v/2) \sqrt{(\pi)^n}} \quad (10)$$

定理 2 设 n 种证券的收益率为 $R \sim E_n(\mu, V, g)$, 则有 $s_\alpha(w) = K_\alpha^g(w' W)^{1/2}$, 其中

$$K_\alpha^g = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{2\alpha \Gamma((n+1)/2)} \int_{p_\alpha^2}^{+\infty} (\mu - p_\alpha^2)^{(n-1)/2} g(\mu) d\mu,$$

$$p_\alpha = \frac{-\mu' w + q_\alpha(r_w)}{(w' W)^{1/2}}$$

证明 设 R 服从多元椭圆分布 $R \sim E_n(\mu, V, g)$, 从而

$$s_\alpha(w) = \mu_w' - E[r_w | r_w \leq q_\alpha(r_w)] =$$

$$\mu_w' - \frac{|V|^{-1/2}}{\alpha} \int_{x' w \leq q_\alpha(r_w)} x' w g((x - \mu)' V^{-1} (x - \mu)) dx =$$

$$- \frac{|V|^{-1/2}}{\alpha} \int_{x' w \leq q_\alpha(r_w)} (x - \mu)' w g((x - \mu)' V^{-1} (x - \mu)) dx =$$

$$- \frac{|V|^{-1/2}}{\alpha} \int_{(x - \mu)' w \leq -\mu' w + q_\alpha(r_w)} (x - \mu)' w g((x - \mu)' V^{-1} (x - \mu)) dx$$

类似文 [10] 的证明, 不难得到

$$s_\alpha(w) = |w' \alpha| \frac{|S_{n-2}|}{2\alpha} \int_{p_\alpha^2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} (u - p_\alpha^2)^{(n-1)/2} g(u) du = K_\alpha^g(w' W)^{1/2}$$

其中, K_α^g 为仅与 α 和函数 g 有关的常数, 定理证毕。

定理 3 设证券收益向量 $R \sim t_n(\mu, V, v)$, 则证券组合 $R' w$ 的损失风险为

$$S_\alpha(w) = K_{\alpha, v}^t (w' W)^{1/2} \quad (11)$$

其中, $K_{\alpha, v}^t$ 为仅与 α 和 v 相关的常数,

$$K_{\alpha, v}^t = \frac{\Gamma((v-1)/2)}{2\alpha \sqrt{\pi} \Gamma(v/2)} v^{v/2} (p_{\alpha, v}^2 + v)^{-(v+1)/2} \quad (12)$$

证明 当证券收益率服从 t -分布, $g(u) = C(v, n) (1 + u' u)^{-(v+n)/2}$, 由文献 [11],

$$\int_w^{+\infty} (x - w)^{u-1} (\beta + x)^{-v} dx =$$

$$(w + \beta)^{u-v} B(v - u, u)$$

其中, $B(\alpha, \beta)$ 为 Euler 函数, 即 $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$, 所以利用定理 2 不难得到

$$s_\alpha(w) = (w' W)^{1/2} \frac{\pi^{(n-1)/2} C(v, n)}{2\alpha \Gamma((n+1)/2)} v^{(n+v)/2} \cdot$$

$$(p_{\alpha, v}^2 + v)^{-(n+v)/2} B(\frac{v-1}{2}, \frac{n+1}{2}) = K_{\alpha, v}^t (w' W)^{1/2}$$

定理证毕。

4 Shortfall 风险的计算方法及厚尾分布的数值结果

记 S_{n-2} 为 $\mathbf{R}^{n-2}$ 空间上的单位球表面, 其面积

为 $|S_{n-2}| = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-2)/2)}$, 引入函数

$$G(s) = \int_s^{+\infty} K(s, u) g(u) du \quad (13)$$

其中

$$K(s, u) = \frac{1}{2} |S_{n-2}| \int_s^u (u - z)^{(n-3)/2} dz =$$

$$\frac{1}{4} |S_{n-2}| \int_0^{u/s} x^{(n-3)/2} (u - x)^{-1/2} dx$$

由文献 [11] 可知

$$K(s, u) = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-2)/2)} (u - s)^{(n-1)/2} \cdot$$

$${}_2F_1(\frac{1}{2}; \frac{n-1}{2}; \frac{n+1}{2}; u(u-s)) \quad (14)$$

其中, ${}_2F_1$ 为超几何分布的分布函数。

注意到 p_α 是方程 $G(s) = \alpha$ 的唯一解, 且仅与 α 和 $g(\cdot)$ 有关, 特别地, 作为一个例子, 研究多元 t -分布下证券组合 shortfall 风险的计算, 将 (9) 式和 (14) 式代入 (13) 式可以得到 $G(s) = \frac{1}{v \sqrt{\pi}} (\frac{v}{s})^{v/2} \frac{\Gamma((v+1)/2)}{v/2} {}_2F_1(\frac{1+v}{2}; \frac{v}{2}; 1 + \frac{v}{2}; -\frac{v}{s})$ 。

用 Matlab 软件, 对于给定置信水平 α 和 v 的值, 可以得到 $p_{\alpha, v}$ 和 $K_{\alpha, v}^t$ 的一些数值结果。

表 1 一些 $p_{\alpha v}$ 的值
Tab. 1 Some values of $p_{\alpha v}$

v	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha=0.01$	6.9646	4.5406	3.7470	3.3650	3.1427	2.9980	2.8965	2.8214
$\alpha=0.025$	4.3026	3.1824	2.7764	2.5706	2.4470	2.3646	2.3060	2.2622
$\alpha=0.05$	2.9200	2.3534	2.1319	2.0151	1.9432	1.8946	1.8596	1.8125

表 2 一些 $K'_{\alpha v}$ 的值
Tab. 2 Some values of $K'_{\alpha v}$

v	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha=0.01$	2.7861	2.9655	2.8940	2.7278	2.5400	2.3580	2.1910	2.0409
$\alpha=0.025$	4.3057	3.8389	3.4108	3.0338	2.7163	2.4516	2.2301	2.0431
$\alpha=0.05$	5.8562	4.5375	3.7483	3.1899	2.7729	2.4504	2.1940	1.9856

参考文献:

[1] MARKOWITZ H. Portfolio Selection – Efficient Diversification of Investment [M]. New York: Wiley and Sons, 1959.

[2] BAWA V. Mean lower partial moments and asset prices [J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5: 189 – 200.

[3] KONNO H, AMAZAKI H. Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo Stock Market [J]. Management Science, 1991, 37: 519 – 531.

[4] ARTZNER P, DELBAEN F, HEATH J M, EBER D. Co-

herent Measure of Risk [J]. Mathematical Finance, 1999, 9: 203 – 228.

[5] DELBAEN F. Coherent risk measures on general probability spaces [C] // Advances in Finance and Stochastics: Essays in Honor of Dieter Sornedemann. New York: Springer-Verlag, 2002.

[6] MAZZOLINI P. Risk measure and return performance: A critical approach [J]. European Journal of Operational Research, 2004, 155: 268 – 275.

[7] 吴世农, 陈斌. 风险度量方法与金融资产配置模型的理论 和实证研究 [J]. 经济研究, 1999(9): 66 – 70.

[8] BERTSMA S D, LAUPRETE G J, SAMAROV A. Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2004, 28: 1353 – 1381.

[9] ACERBI G, TASCHE D. On the coherence of expected shortfall [J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26: 1487 – 1503.

[10] SADEFO-KAMDEM J. Value at Risk and Expected Shortfall for Linear Portfolio with Elliptically Distributed Risk Factor [J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2005, 8(5): 537 – 551.

[11] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Table of Integrals, Series and Products [M]. John Jeffrey Corp, 2000.

A New Risk Measure Method of Portfolio

LIANG Si-an, JIANG Chun-fu, DAI Yong-long

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract On the basis of tail conditional expectation, a new risk measure of portfolio called shortfall is discussed. Some statistical properties are derived under the framework of coherent risk measure. Shortfall risk of portfolio with multivariate elliptic distributions asset returns and some numerical result for multivariate t distribution are obtained.

Key words risk measure; shortfall; portfolio