

索膜结构的静力分析^{*}

林文静, 陈树辉

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘要: 应用动态松弛法对索膜结构进行初始形态分析和静荷载分析。引入刚度调整系数并提出新的参数取值方法。该刚度调整系数能灵活地保证各种不同刚度结构计算的稳定性。在找形分析中引入测地线单元, 加速了找形收敛速度。典型算例说明动态松弛法是索膜结构静力分析的有效方法。

关键词: 索膜结构; 找形分析; 静力分析; 动态松弛法

中图分类号: TU 351 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 02-0004-05

随着城市建设的日益发展, 张拉膜结构作为一种新的建筑结构形式受到越来越多的关注与应用。膜结构的特点在于材料主要承受拉力, 可以充分利用材料的强度, 通过对材料的张拉能够实现曲线复杂多变的建筑造型, 自由地满足各种建筑功能和表达形式的要求, 塑造优美的空间形象, 特别适用于大跨度空间结构。在力学分析方面, 索膜结构属于典型的几何非线性结构, 它没有抗弯刚度和抗压刚度, 即使承受较小的荷载也将产生较大的变形。

索膜结构的设计分为找形分析、荷载分析与裁剪分析 3 个阶段。在找形分析、荷载分析中, 目前, 国内外学者大多采用动态松弛法^[1-2] (Dynamic Relaxation Method 简称 DR 方法, 也称动力松弛法), 非线性有限元法^[3], 力密度法^[4]和能量法^[5]。相对于有限元法, 动态松弛法运算简单、节省内存, 因为在每次迭代求解时不需要形成结构整体刚度矩阵, 但该方法应用成功与否依赖于时间增量、阻尼系数、节点虚拟质量等参数的选择。

本文应用动态松弛法对索膜结构进行初始形态分析和静荷载分析, 引入节点刚度调整系数并提出刚度调整系数的经验取值, 更方便灵活地控制计算的收敛, 并尝试采用不考虑时间增量和阻尼系数、计算过程仅由结构刚度控制的“直接刚度方法”对结构进行计算。典型算例说明, 引入刚度调整系数, 使计算易于调控, 更易稳定, 相对固定参数更能适应多种类型结构的计算稳定, 发挥动态松弛法分析索膜等强非线性结构的优点。在找形分析中引入测地线单元, 加速了找形收敛速度。

1 动态松弛法的基本原理和参数选取

1.1 基本原理

动态松弛法最早见于 Day^[6] 的论文, 他成功运用这个方法求解平面刚架和平板结构, 并把它应用于索网结构^[7]。动态松弛法的基本思想可以简要叙述如下: 假设结构各单元的质量集中在各索膜的交叉节点上。记结构第 i 节点在 x 方向的合力为 R_{xi} , 若 $R_{xi} = 0$ 则节点 i 处于静止平衡状态, 若 $R_{xi} \neq 0$ 则不平衡, 此时, R_{xi} 称为不平衡力或剩余力。于是节点 i 在不平衡力 R_{xi} 作用下将要沿 x 方向运动。设节点 i 在 x 方向的惯性力为 $M_i V_{xi}$, 阻尼力为 $C_i V_{xi}$, 于是节点 i 在时刻 t 沿 x 方向的运动方程为

$$R_{xi}^t = M_{xi} V_{xi}^t + C_i V_{xi}^t \quad (1)$$

其中, V_{xi}^t 、 V_{xi}^t 分别表示节点 i 在时刻 t 沿 x 方向的速度和加速度, M_{xi} 为第 i 节点沿 x 方向的质量, C_i 是阻尼系数。节点 i 在时刻 t 沿 y 、 z 方向的运动方程类似于方程 (1), 只要将下标符号换为 y 或 z 便可得到。由方程 (1) 的差分方程求得

$$V_{xi}^{t+\Delta t/2} = V_{xi}^{t-\Delta t/2} \cdot \frac{2M_{xi} - C_i \Delta t}{2M_{xi} + C_i \Delta t} + R_{xi}^t \cdot \frac{2\Delta t}{2M_{xi} + C_i \Delta t} \quad (2)$$

节点 i 在 $t + \Delta t$ 时刻新的 x 坐标为

$$x_i^{t+\Delta t} = x_i^t + V_{xi}^{t+\Delta t/2} \cdot \Delta t \quad (3)$$

新的 y 、 z 坐标可以类似地得到, 只要将上式中的 x 换为 y 、 z 就可以。求得节点 i 在 x 、 y 、 z 三个方向

* 收稿日期: 2005-04-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10272117); 广东省自然科学基金资助项目 (04009738); 中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (04M6)

作者简介: 林文静 (1971 年生), 女, 博士生; 通讯联系人: 陈树辉; E-mail: stscsh@zsu.edu.cn

平衡后，可放松下一节点，按上述步骤求其平衡。当其它节点在新的位置达到平衡后，可能会影响到原先达到平衡的节点 i 的平衡。于是，必须重新放松节点，求其新的平衡位置。这样周而复始，逐个节点放松，逐个节点平衡，直到最后整个索膜结构所有的节点在 x 、 y 、 z 方向都达到平衡为止。

1.2 粘性阻尼系数

动态松弛法的全过程，在于从结构承受荷载开始，以一小时间增量追踪节点的运动，直到结构由于粘性阻尼与结构刚度的共同作用下达到平衡状态。对参数的选取分为两类，令阻尼系数为零时称动态阻尼方法（kinetic damping），阻尼系数不为零时称粘性阻尼（viscous damping）。对于粘性阻尼，很多学者根据计算结构和自己的计算经验提出了许多不同的取值方法，陈树辉^[8]建议阻尼系数按下式选取，

$$C_i = 2M_i / \Delta t \tag{4}$$

由量纲分析，取

$$\Delta t = \sqrt{BM_i / K_i} \tag{5}$$

其中， K_i 是与节点相连接的所有各绳索的最大刚度。 B 为待定常数。考虑到要使节点 i 的残余力为零，推得 $B=2$ 。

1.3 刚度调整系数

在动态阻尼情况下， $C_i=0$ 由 (2)、(3) 二式得到

$$V_{xi}^{t+\Delta t/2} = V_{xi}^{t-\Delta t/2} + \frac{R_{xi}^t}{M_{xi}} \Delta t \tag{6}$$

$$x_i^{t+\Delta t} = x_i^t + V_{xi}^{t+\Delta t/2} \cdot \Delta t \tag{7}$$

动态松弛法运算收敛与否也与节点刚度密切相关。若节点刚度或阻尼极小，在节点剩余力的作用下，运动的步长很大，则节点不是一步一步地接近平衡位置，而是在平衡位置的两侧大幅度摆动，距离平衡位置越远时，由于节点刚度的约束作用，节点剩余力也越大，以致下一步的运动步长更大，则节点运动距离平衡位置越来越远，计算不收敛。为保证计算稳定，本文引入刚度调整系数 B 来调节虚拟质量与节点刚度的关系，取

$$M_{xi} = BK_{xi} \tag{8}$$

K_{xi} 表示节点 i 沿 x 方向可能的最大刚度。计算实践表明，当取结构的实际刚度计算节点刚度时， $B=2\sim5$ 通常可得到稳定的计算结果。但在找形分析阶段，结构的刚度尚未确定，假定索或膜的刚度接近零，使索膜结构应力符合施加的预应力状态，则 B 相应取较大数值。 B 的经验值选取为使运动步长为 $10^{-7}m$ 为宜。例如在索网结构的找形分析中，假定索的预张力为 N ，刚度 $K \approx 0$ ，则由运动步长

$$\Delta x = N / BK_{xi} \tag{9}$$

推得

$$B = 10^7 N / K_{xi} \tag{10}$$

刚度调整系数可同样应用于文 [8] 的参数取值公式中。

1.4 “直接刚度方法”

鉴于节点刚度在动态松弛法中的重要作用，本文尝试不考虑时间增量与虚拟质量的“直接刚度方法”，直接在每一步运动中以节点刚度、节点剩余力计算运动步长。设第 n 次迭代时节点沿 x 方向的刚度为 K_{xi}^n ，剩余力为 $R_{xi}^n (\neq 0)$ ，节点在剩余力的作用下运动，假定运动过程中节点刚度不变，位移为

$$\Delta x^n = R_{xi}^n / K_{xi}^n \tag{11}$$

新的位置

$$x^{n+1} = x^n + \Delta x^n \tag{12}$$

在新位置上重新计算节点刚度与剩余力，进行下一步的迭代，直至 $R_{xi}=0$ 。

这种算法不收敛的情况发生在节点的刚度极小，令运动步长过大。碰到这种情况时，同样引入刚度调整系数 B ，此时 (11) 式成为

$$\Delta x^n = R_{xi}^n / (BK_{xi}^n), B \geq 1 \tag{13}$$

计算实践表明，这也是一种有效的动态松弛应用方法。实际计算取 $B=2\sim4$ 。

2 索膜结构分析单元

索膜结构的计算单元包括索元和膜元，其支撑构件可分为杆元和梁元。

索元采用两节点直线单元，其节点力为

$$T_m = T_{m0} + (EA)_m (L_m - L_{m0}) / L_m \tag{14}$$

式中， T_{m0} 为索的初始预拉力， E 、 A 分别为索的弹性模量与截面面积。在找形分析过程中，当 $T_m < 0$ 时，令 $T_m = 0$ 。

膜单元采用平面三角形膜单元，如图 1 所示。主惯性坐标系轴 x' 、 y' 对应索膜结构的经向、纬向。令单元局部坐标系与单元的主惯性坐标系一致，单元的节点及三条边均按逆时针方向编号。单元三条虚拟边索的张力记为

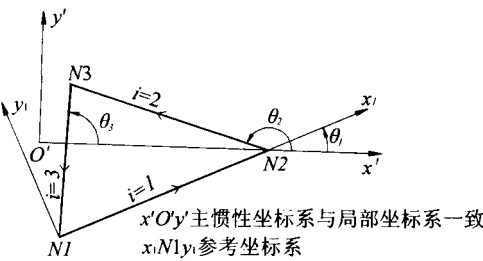


图 1 平面三角形膜单元

Fig. 1 Plane triangular membrane element

$$T = [T_1 \ T_2 \ T_3]^T \quad (15)$$

三条边的伸长列阵记为

$$\delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3]^T \quad (16)$$

单位厚度的膜平面应力

$$\sigma = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^T \quad (17)$$

单元虚拟边索的张力与单元三条边伸长量的关系为

$$T = K_e \delta \quad (18)$$

边索张力与膜平面应力关系为

$$T = AG^T \sigma \quad (19)$$

式中, K_e 为局部坐标下的单元刚度矩阵, A 为单元面积, G 为单元几何变换矩阵, 仅与单元的几何位置有关。 K_e 和 G 的表达式可参见文[9]。

杆单元为二节点单元, 其节点力同样取公式(14), 但是杆单元能够承受压力。

梁单元采用空间梁元。梁元杆端有六个自由度, 杆端力由单元刚度矩阵计算, 梁单元的刚度矩阵可参见文[10]。

3 索膜结构的找形分析

众所周知, 张拉结构在在没有施加预应力之前没有刚度, 其形状是不确定的。所以, 索膜结构设计的第一步是索膜结构的找形分析 (form finding)。采用动态松弛法进行形态分析时, 为使索或膜的预张力满足预定值, 对第 m 个索元而言, 预拉力为 T_{m0} , 膜单元预应力为 σ_0 。即满足

$$T = AG^T \sigma_0 \quad (20)$$

在膜的找形分析中, 对于任意的复杂的膜结构, 为了加快收敛的速度, 也为了方便以后的剪裁分析, 一般需要加入虚拟的测地线加以控制。测地线沿着裁缝线, 紧贴在膜上, 其法线方向上的力满足平衡方程, 即法线方向上的合力为零, 所以节点没有法线方向上的松弛。同时, 测地线两端的力也不传给边界上的节点, 以免影响边界的形状。其找形过程可以归结如下:

在所有的单元类型中, 先计算测地线上单元的剩余力 R_g ; 计算节点的法向矢量 $\bar{V}_n$, 节点法向矢量取汇交于节点各膜元的法向矢量的平均值; 求 R_g 在节点法矢 $\bar{V}_n$ 的分量 $R_n = \bar{V}_n^T R_g$; 从 R_g 中消除法向分量, 即 $R_g \leftarrow R_g - R_n \bar{V}_n$; 将 R_g 和其它类型单元的剩余力叠加。

4 索膜结构的荷载分析

荷载分析包含的荷载类型有节点集中荷载、静荷载、均布压力荷载、雪荷载和风荷载。

静荷载包括有材料的重量, 如索材、膜材、杆件等的重量。

均布压力 (吸力) 是指垂直作用于膜的表面的单位面积的压力, 例如充气膜结构的气压。由于单元几何位置与形状的变动, 故在每一迭代过程中都要重新计算单元当前的面积与法矢方向, 由当前的单元面积得出总压力, 然后均分到三节点, 再根据力的方向投影到整体坐标。

雪载是由膜单元的水平投影面积与设计提供的单位水平投影面积的雪荷载 q_s 决定。与均布压力一样, 雪载的作用也需要在每一迭代过程进行更新。由当前膜单元的面积与法矢方向, 求得膜元于水平面上的投影面积 A_p , 则单元每个节点承受整体 z 方向的雪载为

$$F_{zi} = -q_s A_p \beta \quad (21)$$

与其它类型的荷载相比, 风荷载是作用最为复杂的荷载, 而且是膜结构的控制荷载。

风载的作用受风向与作用表面的形状所影响。一般的结构分析将风载作为静力荷载来考虑。当前中国尚没有膜结构风载体型系数的规范。风载计算采用文[11]提出的一个简化方法, 该方法由用户输入单位面积上作用的风压力、风向与轴的夹角, 则从风载方向与各单元法向矢量的夹角的方向余弦可求得垂直作用于各单元表面的风力, 分配至各节点, 再投影到整体坐标方向。故只要计算时定义风作用的方向, 取当地的基本风压值, 则可方便地以本方法计算。当然, 这是一种简化的计算方法, 对大型、重要的结构, 仍需进行风洞试验确定风压力系数。

5 算例分析

图2所示双曲抛物面的膜结构模型 4 个角点固定。膜的边界由四条边索加强, 边索 $EA=10\text{ MN}$ 。边索变形前的中点垂度为 0.707 m , 膜面预应力 $\sigma_x = \sigma_y = 1.0\text{ kN/m}$, 方向与材料的经、纬向一致。材料的经向与整体坐标轴 y 轴平行。

(1) DR 法找形分析

在平面上将膜面分为 12 个条形, 在每个条形带划分三角形膜单元。总共 130 个节点, 144 个单元。每一分缝线上各点组成一最短程线单元。最短程线单元的张力系数 $TL=1.0$ 。边索的刚度取实际值, 膜应力保持为初始应力状态, 不考虑膜的自重, 计算精度 0.001 kN 。使用动态阻尼计算的参数如下: 阻尼系数 $C_i=0$ 时间增量 $\Delta t=1$, 初速度 $V^{\Delta t/2}=0$ 刚度调整系数 $B=10$ 。找形分析结果见图3。采用 Pentium 4 CPU 3.0 GHz 504MB 内存的计算机, 运算时间为 4 分 53 秒。

(2) 承受自重的计算

膜材自重 0.009 kN/m^2 ，初始预应力 $\sigma_x=\sigma_y=1.0\text{ kN/m}$ ，计算所得双曲抛物面承受自重与预应力时的平衡状态如图 4(a)所示，膜中心点与两个高点的高差为 1.258 m 。计算精度 10^{-4} kN 。运算时间 33 秒 。

(3) 承受雪载作用的计算

单位水平投影面积的雪载基本值取为 0.6 kN/m^2 。膜材自重与初始预应力作为当然的荷载状态，计算平衡状态见图 4(b)，膜中心点与两个高点的高差为 1.4014 m ，即与仅承受自重比较，各节点产生更大的竖向位移。运算时间 $2\text{ 分 }40\text{ 秒}$ 。

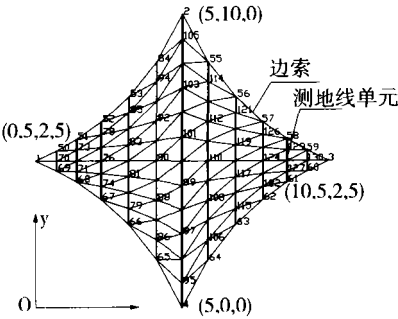


图 2 双曲抛物面平面单元及节点编号

Fig. 2 Hyperbolic paraboloid element idealization and node map

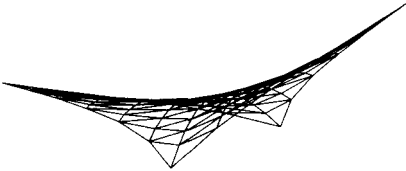


图 3 双曲抛物面找形分析形状

Fig. 3 The shape of hyperbolic paraboloid by form finding

(4) 承受风载作用的计算

取单位面积的风压力为 1.0 kN/m^2 ，风来自左端，作用方向平行于 x 轴，得到图 4(c)的稳定状态。从前视图可见，各节点产生向右的位移，左半部分面积增大，右半部分面积被压缩，图形呈不对称。运算时间 $5\text{ 分 }1\text{ 秒}$ 。

引入刚度调整系数后，以第 1 节所述的 3 种不同的 DR 应用方法计算本例，都可以得到收敛的结果，且效率相近。动态阻尼方法、粘性阻尼方法与直接刚度方法的刚度调整系数分别取为 $B=4.0\ 1.5\ 1.5$ 。

6 结 论

本文成功地将动态松弛法应用于索膜结构的找

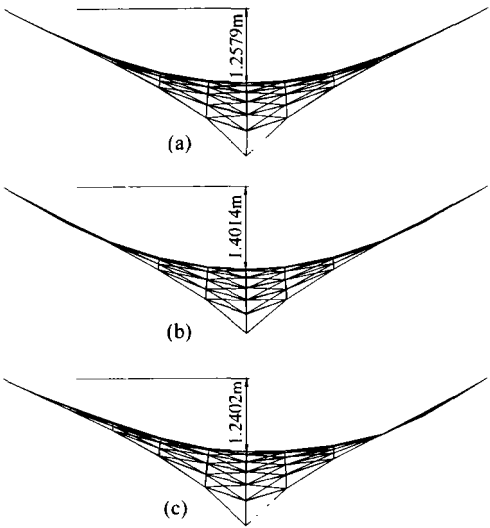


图 4 双曲抛物面承受自重、雪荷载与风载的状态

Fig. 4 The front view of hyperbolic paraboloid under self weight loading, snow loading and wind loading

形分析与荷载分析，编制了专用的找形和静力荷载分析程序 ABCM。与其他方法相比，动态松弛法具有方法简单、易于应用、计算精度高、节省计算机内存等优点。但是动态松弛法计算稳定性依赖于参数选取，本文在既有文献的参数取值基础上引入刚度调整系数并提出新的参数取值方法。该刚度调整系数能灵活地保证各种不同刚度结构计算的稳定。对于复杂结构，在找形分析中引入测地线单元，加快了收敛速度。典型算例说明动态松弛法是索膜结构静力分析的有效方法。

参考文献：

[1] WOOD R D. A simple technique for controlling element distortion in dynamic relaxation form-finding of tension membranes[J]. Computers and Structures, 2002, 80(27 - 30): 2115-2120.

[2] 张华, 周星德, 单建. 薄膜结构的几何非线性分析[J]. 应用力学学报, 2004, 21(2): 106~109.

[3] GOSLING P D, LEWIS W J. Optimal structural membranes II: form-finding of prestressed membranes using a curved finite element for surface definition[J]. Computers and Structures, 1996, 61(5): 885-895.

[4] MAURIN B, MOTRO R. The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membrane Engineering Structures, 1999, 20(8): 712-719.

[5] 易发安, 胡加珠, 岳艳芳. 索网和膜结构的最小曲面分析[J]. 工程力学, 2004, 21(4): 167-170.

[6] DAY A S. An Introduction to dynamic relaxation[J]. The Engineer, 1965, 219(1): 218-221.

[7] DAY A S, BUNCE JH. Analysis of cable networks by dynamic relaxation[J]. Civil Eng and Public Review, 1970.

- (4): 383–386
- [8] 陈树辉, 林文静. 索网结构静力分析的动态松弛法 [J]. 应用力学学报, 2002 19(2): 34–37.
- [9] BARNES M R. Dynamic Relaxation Analysis of tension networks[C] // Int Conf On Tension Structures. London 1974 1–11.
- [10] 丁皓江, 何福保, 谢贻权, 等. 弹性和塑性力学中的有限元方法 [M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 1989 79.
- [11] TABARROK B Q N Z Nonlinear analysis of tension structures[J]. Computers and Structures 1992 45(5 / 6): 973–984.

Static Analysis of Cable-Membrane Structures

LIN Wei-jing, CHEN Shu-hui

(Department of Applied Mechanics and Engineering Sun Yat sen University, Guangzhou 510275 China)

Abstract The dynamic relaxation (DR) method is applied to the form-finding and static loading analysis of cable-membrane structures. An adjustable stiffness coefficient is introduced to ensure calculation stability. This stiffness coefficient can be simply determined by several tests. In the analysis of Form-finding, the geodesic string is introduced to accelerate the convergence of DR method. The typical example shows that the DR method is an effective method for form-finding and static analysis of cable-membrane structures.

Key words cable-membrane structure; form-finding; static analysis; dynamic relaxation method

(上接第 3 页)

- [9] DOERK K, HAWKES T. Finite Solvable Groups[M]. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
- [10] CHEN Zhongmu. Generalization of the Schur-Zassenhaus Theorem [J]. J Math (PRC), 1998 18(3): 290–294.
- [11] ROBINSON D JS. A course in the theory of groups[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [12] LENNOX J G, STRONEHEWER S E. Subnormal subgroups of finite groups [M]. Oxford: Clarendon Press, 1987.
- [13] 陈重穆. 内外 Σ -群与极小非 Σ -群 [M]. 重庆: 西南师范大学出版社, 1988.
- [14] DORNHOFF L. M -groups and 2-groups[J]. Math Z 1967 100(2): 226–256.

Some Sufficient Conditions of p -nilpotent Groups

WANG Li-feng, WANG Yan-ming

(Department of Mathematics Sun Yat sen University, Guangzhou 510275 China)

Abstract Let G be a finite group. A subgroup H of a group G is called s -semipermutable if it is permutable with every subgroup K of G with $(|H|, |K|) = 1$, and s -semipermutable if it is permutable with every Sylow p -subgroup of G with $(p, |H|) = 1$. The influence of s -semipermutability of minimal subgroups and maximal subgroups of Sylow subgroup of a finite group on its p -nilpotence are investigated.

Key words minimal subgroup; maximal subgroup; s -semipermutable subgroup; p -nilpotent group; finite group