

平移不变空间的局部化框架^{*}

强 晓 凤

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 对多生成平移不变空间 $V_m^p(\Phi) = \{ \sum_{i=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{ik} \phi_i(\cdot - k) : c_i = (c_{ik}) \in \ell_m^p(\mathbb{Z}^d), i=1, \dots, r \}$ 的采样集合进行了研究, 其中 m 是满足 $m(t+x) \leq C(1+|x|)^s m(x), \forall t, x \in \mathbb{R}^d$ 的权函数. 证明了当生成元 $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ 的整平移 $\{\phi_i(\cdot - k), i=1, \dots, r, k \in \mathbb{Z}^d\}$ 是 $V_m^p(\Phi)$ 的 Riesz 基, 并且满足局部化条件 $|\phi_i(x)| \leq C(1+|x|)^{-d-s-\epsilon}, \epsilon > 0, i=1, \dots, r, C$ 为正常数, 则其对偶生成元也满足相同的局部化性质, 从而利用局部化框架的性质, 得到当采样集 X 是 $V_m^p(\Phi)$ 的稳定采样集时, 一定也是 $V_m^p(\Phi)$ 的稳定采样集合, 并且得到了相应的重建公式.

关键词: 局部化框架; 多生成平移不变空间; 非均匀采样

中图分类号: O177.1; O177.2; O241.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 01-0005-04

对 Hilbert 空间 H 中的函数列 $\{\phi_j\}_{j \in J}$, 如果存在正常数 A, B 使得

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \forall f \in H$$

则把 $\{\phi_j\}_{j \in J}$ 叫做 H 的框架. 在 Hilbert 空间中, 函数可在框架上展开, 由于框架有一定的冗余度, 使得展开的形式并不唯一. 这一特点正好被用于信号去噪和从部分丢失数据重建信号. 同时, 构造框架比构造正交基要容易得多, 所以研究框架的人越来越多. 目前关于框架的研究可以粗略地分为 2 个方面, 一方面是构造和刻画已知结构的框架, 比如小波框架的构造等^[1,2], 另一方面主要侧重于研究具有实用性质的某类框架^[3]. 本文所讨论的局部化框架, 由于有一定的局部特征, 使得在 Hilbert 空间得到的关于采样的一些结论, 可以推广到 Banach 空间中.

1 记 号

以下用 N 和 X 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的可数集, 并且假设是分离的, 即

$$\inf_{x \in X, x \neq y} |x - y| \geq \delta > 0$$

$$\inf_{m \in N, m \neq n} |m - n| \geq \delta > 0$$

用 C 表示正常数.

$\mathbb{R}^d$ 上的非负连续函数都可以作为权函数, 如果存在正常数 $C \geq 0$ 使对权函数 m 有 $m(t+x) \leq C(1+|t|)^s m(x), \forall t, x \in \mathbb{R}^d$, 则称 m 是

调制的.

X 上的带权空间 ℓ_m^p 上的范数定义为

$$\|g\|_{\ell_m^p} = \left(\sum_{x \in X} |g(x)|^p m(x)^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

$$\|g\|_{\ell_m^\infty} = \sup_{x \in X} |g(x)| m(x)$$

关于 $\mathbb{R}^d$ 上的可数分离集, 有以下事实.

引理 1^[4] $X \subset \mathbb{R}^d$ 是可数分离集, 则对任何 $s > d$ 都有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{v \in X} (1 + |x - v|)^{-s} = C_s \leq \infty \quad (1)$$

引理 2^[4] $X \subset \mathbb{R}^d$ 是可数分离集, 若 $s > d$ 则

$$\sum_{n \in X} (1 + |x - n|)^{-s} (1 + |x - m|)^{-s} \leq C(1 + |n - m|)^{-s}, m, n \in N \quad (2)$$

引理 3^[4] 设 $A_n = (1 + |x - n|)^{-s-d-\epsilon}, \epsilon > 0, s > 0, n \in N, x \in X$ 则算子 A 定义为

$$(Ax) = \sum_{n \in N} A_n g_n \quad (3)$$

是从 $\ell_m^p(N)$ 到 $\ell_m^p(X)$ 的有界线性算子, 其中 $1 \leq p \leq \infty, m$ 是任意的调制的权.

定义空间

$$H_m^p = \{f, f = \sum_{n \in N} g_n g_n, c = (g_n) \in \ell_m^p(N)\} \quad (4)$$

其中, $\{g_n\}_{n \in N}$ 是 Hilbert 空间 H 的 Riesz 基, $\{g_n\}_{n \in N}$ 是其对偶, m 是调制的权. 定义 H_m^p 上的范数为 $\|f\|_{H_m^p} = \|c\|_{\ell_m^p}$ 则称之为 H 关于 Riesz 基

* 收稿日期: 2005-01-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60175031); 广东省自然科学基金资助项目 (021768); 中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (03M6)

作者简介: 强晓凤 (1973 年生), 女, 博士, 讲师, E-mail: marjam@126.com

$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的伴随 Banach 空间。若 $\mathbb{H}(N) \subset \mathbb{I}(N)$, 则显然 H_m^p 是 H 的闭子空间。若 $\mathbb{H}(N) \not\subset \mathbb{I}$ 且 $p < \infty$, 则认为 H_m^p 是 $H_0 = \{f = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n, \text{ 有限 } c_n \text{ 不为 } 0\}$ 的完备空间, 其范数为 $\|f\|_{H_m^p} = \|c\|_{\mathbb{H}_0}$ 。若 $p = \infty$ 而且 $\mathbb{H} \not\subset \mathbb{I}$, 则用 H_0 的弱*完备空间来定义 H_m^p 。

2 局部化框架

所谓局部化框架, 是 Gröchenig 首先提出来的一个概念。假设 H 是 Hilbert 空间, $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 H 的 Riesz 基, $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是其对偶 Riesz 基, 则有

定义 1^[4] $E = \{x \in X\}$ 是 H 的框架, 其中 X 是 $\mathbb{R}^d$ 的可数集, 若关于 H 的 Riesz 基 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 有

$$\begin{aligned} |\langle g, g_n \rangle| &\leq C(1 + |x - n|)^{-s} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x \in X \\ |\langle g, g_n \rangle| &\leq C(1 + |x - n|)^{-s} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x \in X \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $s \geq 0$ 则称框架 $\{g_n\}_{n \in X}$ 关于 Riesz 基 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是局部化的。

关于局部化框架, Gröchenig 给出以下定理。

命题 1^[4] 设 $\{g_n\}_{n \in X}$ 是关于 H 的 Riesz 基 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的 $s + d + \epsilon$ 框架, 其中 $\epsilon > 0, s \geq 0$ 当 $1 \leq p \leq \infty$, m 是任意的调制的权函数, 则

(1) $C_f = (\langle f, g_n \rangle)_{n \in X}$ 是从 H_m^p 到 $\mathbb{H}_m$ 的有界线性算子。

(2) $D_g = \sum_{x \in X} c_x g_x$ 是从 $\mathbb{H}_m$ 到 H_m^p 的有界线性算子。

(3) $S = S_g = D_g C_f = \sum_{x \in X} \langle f, g_x \rangle g_x$ 是从 H_m^p 到 H_m^p 的可逆算子。

(4) 对偶框架 $\{g_x = S^{-1} g, x \in X\}$ 也是 $s + d + \epsilon$ 局部化的。

(5) 框架展开

$$f = \sum_{x \in X} \langle f, g_x \rangle g_x = \sum_{x \in X} \langle f, g_x \rangle g_x$$

在 H_m^p ($1 \leq p < \infty$) 无条件收敛 (在 H_m^1 弱*收敛)。

$$\begin{aligned} (6) \quad \|f\|_{H_m^p} &\approx \\ \left(\sum_{x \in X} |\langle f, g_x \rangle|^p m(x)^p \right)^{\frac{1}{p}} &\approx \\ \left(\sum_{x \in X} |\langle f, g_x \rangle|^p m(x)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

3 多生成平移不变空间的非均匀采样问题

考虑多生成平移不变空间

$$V_m^p(\Phi) = \left\{ f = \sum_{i=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{ik} \phi_i(\cdot - k) \right\}$$

$$\phi_i = (\phi_{ik}) \in \mathbb{H}_m(\mathbb{Z}^d), \quad i = 1, \dots, r$$

关于这个空间的细节可参考文 [5]。其中权函数 m 是 s 调制的。生成元 $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)^r$, 且满足

$$(1) \phi_i \text{ 连续}, \quad i = 1, \dots, r \quad (6)$$

$$(2) \phi_i(\cdot - k), \quad i = 1, \dots, r, k \in \mathbb{Z}^d \text{ 是 } V(\Phi) \text{ 的 Riesz 基} \quad (7)$$

$$(3) |\phi_i(x)| \leq C(1 + |x|)^{-d-s-\epsilon}, \quad \epsilon > 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (8)$$

可知满足以上条件的生成元 $\Phi \in W_0(\mathbb{L}_s)^r$, 其中 $u(t) = (1 + |t|^s)^{-s} \geq 0$ 而 $W(\mathbb{L}_s^p)$ 是 Wiener amalgam 空间。Wiener amalgam 空间是指

$$W(\mathbb{L}_s^p) = \{f \mid \|f\|_{W(\mathbb{L}_s^p)} =$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \text{ess sup}_{x \in [0,1]^d} |f(x+k)|^p v(k)^p < \infty\}$$

其中, $1 \leq p < \infty$ 。若 $p = \infty$

$$\|f\|_{W(\mathbb{L}_s^\infty)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \text{ess sup}_{x \in [0,1]^d} |f(x+k)| v(k) < \infty \quad (9)$$

$W(\mathbb{L}_s^p)$ 在上述范数定义下, 形成 Banach 空间^[6,7]。而 $W_0(\mathbb{L}_s^p)$ 是 $W(\mathbb{L}_s^p)$ 的连续函数形成的闭子空间。

由此可知 $V_m^p(\Phi)$ 正好是 Hilbert 空间 $V(\Phi)$ 的关于 Riesz 基 $\{\phi_i(\cdot - k)\}$, $i = 1, \dots, r, k \in \mathbb{Z}^d$ 的伴随 Banach 空间。为了能细致分析 $V_m^p(\Phi)$ 的采样, 我们希望 Φ 的对偶生成元 $\tilde{\Phi}$ 也满足相同的衰减条件。需要以下事实。

引理 4^[8] 若生成元 $\Phi \in W_0(\mathbb{L}_s^1)^r$, 且 $\{\phi_i(\cdot - k), i = 1, \dots, r, k \in \mathbb{Z}^d\}$ 构成了 $V(\Phi)$ 的 Riesz 基, 则其对偶生成元 $\tilde{\Phi} \in W_0(\mathbb{L}_s^1)^r$ 。

引理 5^[9] 设 $\phi, \psi \in \mathbb{L}^1$, 则级数 $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \phi(\zeta + j) \overline{\psi(\zeta + j)}$ 几乎处处绝对收敛到 $\mathbb{L}^1[0,1]^d$ 的函数, 其 Fourier (逆) 系数为

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \overline{\psi(x-k)} dx = \\ \int_{[0,1]^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \phi(\zeta + j) \overline{\psi(\zeta + j)} e^{2\pi i k \cdot \zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (10)$$

以下 3 个相似命题在后面定理的证明中需要用到, 在此列出。

引理 6 设 $|\phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-r}$, $|\psi(x)| \leq C|k|^{-r}$, $r > d$ 则 $|\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \phi(x-k) \overline{\psi(x-k)}| \leq C(1 + |x|)^{-N}$, 其中正常数 C 不一定相同, 但只跟 r 有关。

引理 7 设 $|\phi_k| \leq C|k|^{-r}$, $|\psi_k| \leq C|k|^{-r}$, $r > d$ 则 $|(c * d)(k)| \leq C|k|^{-r}$, 其中正常数 C 不一定相同, 但只跟 r 有关。

引理 8 $|\phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-r}$, 其中 $r > d$

则对

$$\zeta_k=\int_{\mathbb{R}^d}g(x)\overline{g(x-k)}\,dx\quad\forall\,k\in\mathbb{Z}^d\quad(11)$$

有 $|\zeta_k|\leq C|k|^{-r}$, C 为跟 γ 有关的正常数.

还需要以下引理.

引理 9^[10] $\eta\geq 2$ 是一个整数, $\alpha\in[0,1)$, $\phi^*(\gamma)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\phi(m)\,e^{-2\pi i\eta\gamma}$ 在 $[0,1]$ 上不为 0 并且有 $\phi(m)=O(|m|^{-(\eta+\alpha)})$, $|m|\rightarrow\infty$, 则

$$\zeta_m=\int_0^1\frac{1}{\phi^*(\gamma)}\,e^{2\pi i\eta\gamma}\,d\gamma=O(|m|^{-(\eta+\alpha)}),\quad|m|\rightarrow\infty\quad(12)$$

有了这些准备, 我们可以得到下面的结果.

定理 1 若 $\mathcal{V}(\Phi)$ 的生成元 Φ 满足 (6), (7), (8) 式, 则其对偶生成元 $\tilde{\Phi}=(\tilde{\phi}_1,\dots,\tilde{\phi}_r)\in W_0(L_\alpha^1)$ 且满足 (8) 式.

证明 对偶生成元 $\tilde{\Phi}=(\tilde{\phi}_1,\dots,\tilde{\phi}_r)$, 由引理 4 可知, $\tilde{\Phi}\in W_0(L_\alpha^1)$, 而且 $\mathcal{V}(\tilde{\Phi})=\mathcal{V}(\Phi)$, 有

$$\tilde{\phi}_j=\sum_{i=1}^r\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}b_{ik}^j\phi_i(x-k)$$

若设 $\tau_{ji}(\zeta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}b_{ik}^j\,e^{-2\pi i\zeta\cdot k}$, 则

$$\tilde{\phi}_j=\sum_{i=1}^r\tau_{ji}\phi_i$$

令 $G(\Phi)=[\hat{\Phi},\hat{\Phi}]=([\hat{\phi}_i,\hat{\phi}_i])_{i,i}$, 其中 $[\hat{\phi}_i,\hat{\phi}_i]=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^d}\hat{\phi}_i(\zeta+\hat{j})\overline{\hat{\phi}_i(\zeta+\hat{j})}$, 由文 [9] 知道系数矩阵 $\tau=(\tau_{ji})$, $j=1,\dots,r$, $i=1,\dots,r$ 正好就是 $G(\Phi)^{-1}$. 而

$$G(\Phi)^{-1}=\frac{1}{\det(G(\Phi))}\begin{bmatrix}G_{11}&G_{12}&\cdots&G_{1r}\\G_{21}&G_{22}&\cdots&G_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\G_{r1}&G_{r2}&\cdots&G_{rr}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_{11}&\tau_{12}&\cdots&\tau_{1r}\\\tau_{21}&\tau_{22}&\cdots&\tau_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\tau_{r1}&\tau_{r2}&\cdots&\tau_{rr}\end{bmatrix}\quad(13)$$

其中, G_{ij} 是 $G(\Phi)(\zeta)$ 中的第 i 行第 j 列元素的代数余子式, 由引理 5 引理 8 和引理 7 可知, $G_{ij}(\zeta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}g_{ij}(k)\,e^{-2\pi i\zeta\cdot k}$ 中的 Fourier 系数 $g_{ij}(k)\leq C|k|^{-s-d-\epsilon}$. 因为 $\{\phi_i(\cdot-k)\}$ 是 Riesz 基, 所以 $\det(G(\Phi))\neq 0$ 由引理 9 可知 $1/\det(G(\Phi))$ 的 Fourier 系数也有同样的衰减性质, 再由引理 7 可以知道 $|b_{ik}^j|\leq C|k|^{-s-d-\epsilon}$ 再由引理 6 可知

$$|\tilde{\phi}_i(x)|\leq C(1+|x|)^{-s-d-\epsilon},\quad i=1,\dots,r$$

定理即证得.

称 X 是 $\mathcal{V}(\Phi)$ 的稳定采样集, 如果存在正常数 $A,B>0$ 使得

$$A\|\mathbf{f}\|\leq\left(\sum_{x\in X}|\mathbf{f}(x)|^2\right)^{1/2}\leq B\|\mathbf{f}\|\quad(14)$$

因为 $\mathcal{V}(\Phi)$ 是再生核 Hilber 空间, 所以当 X 是稳定采样集时, 等价于 $\{K_x\}_{x\in X}$ 构成了 $\mathcal{V}(\Phi)$ 的一个框架.

下面用 Grochenig 关于局部化框架的结论命题 1 来说明, 当 X 是 $\mathcal{V}(\Phi)$ 的稳定采样集时, X 也是 $\mathcal{V}_m(\Phi)$ 的稳定采样集.

定理 2 设 Φ 满足 (6)–(8) 式, X 是 $\mathcal{V}(\Phi)$ 的稳定采样集, m 是 $\mathbb{R}^d$ 上 s 调制的权函数, $\{K_x\}_{x\in X}$ 的对偶框架是 $\{K_x\}_{x\in X}$, 则有

(1) 对每个 $\mathbf{f}\in\mathcal{V}_m(\Phi)$, $1\leq p\leq\infty$,

$$A\|\mathbf{f}\|_{L_m^p}\leq\left(\sum_{x\in X}|\mathbf{f}(x)|^pm(x)^p\right)^{1/p}\leq B\|\mathbf{f}\|_{L_m^p}$$

(2) 对偶框架满足

$$|K_x(t)|\leq C(1+|t-x|)^{-s-d-\epsilon}\quad\forall\,x\in X,\,t\in\mathbb{R}^d$$

其中, C 为正常数.

(3) 重建公式为

$$\sum_{x\in X}\mathbf{f}(x)K_x$$

在 $\mathcal{V}_m(\Phi)$ ($1\leq p\leq\infty$) 无条件收敛.

证明 因为

$$|\langle K_x,\phi_i(\cdot-k)\rangle|=|\phi_i(x-k)|\leq C(1+|x-k|)^{-s-d-\epsilon}$$

且由定理 1 可知

$$|\langle K_x,\tilde{\phi}_i(\cdot-k)\rangle|=|\tilde{\phi}_i(x-k)|\leq C(1+|x-k|)^{-s-d-\epsilon}$$

这说明 $\{K_x\}_{x\in X}$ 是 Hilber 空间 $\mathcal{V}(\Phi)$ 关于 Riesz 基 $\{\phi_i(\cdot-k)\}$, $i=1,\dots,r$, $k\in\mathbb{Z}^d$ 的 $s+d+\epsilon$ 局部化框架, 则由命题 1 可知结论 (1)–(3) 均成立. 而

$$\begin{aligned}K_x(t)&=\langle K_x,K_t\rangle=\\&\sum_{i=1}^r\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|\langle K_x,\phi_i(\cdot-k)\rangle|\langle\tilde{\phi}_i(\cdot-k),K_t\rangle\\&|K_x(t)|\leq\sum_i\sum_k|\langle K_x,\phi_i(\cdot-k)\rangle|\cdot\\&|\langle\tilde{\phi}_i(\cdot-k),K_t\rangle|\leq\sum_i\sum_kC(1+|x-k|)^{-s-d-\epsilon}\cdot\\&(1+|k-t|)^{-s-d-\epsilon}\leq C(1+|x-t|)^{-s-d-\epsilon}\end{aligned}$$

最后的不等式是由引理 2 得到的.

参考文献:

[1] HERNANDES E, LABATE D, WEISS G. A unified characterization of reproducing systems generated by a finite family J. J Geometric Analysis 2002, 12 (3): 469–

- 491.
- [2] CHUI C, CZAJA W, MAGGIONI M, et al. Characterization of general tight frames with matrix dilations and tightness preserving oversampling [J]. J Fourier Anal Appl 2002, 8(2): 173—200
- [3] GROCHENIG K. Describing functions: atomic decompositions versus frames [J]. MhMath 1991, 112: 1—41
- [4] GROCHENIG K. Localization of frames: Banach frames and the invertibility of the frame operator [J]. J Fourier Anal Appl 2004, 10(2): 105—132
- [5] ALDROUBI A, GROCHENIG K. Non-uniform sampling and reconstruction in shift invariant spaces [J]. SIAM Rev 2001, 43(4): 585—620
- [6] FEICHTINGER H G. Generalized amalgams with applications to Fourier transforms [J]. Can J of Math 1990, 42(3): 395—409
- [7] FEICHTINGER H G. Wiener amalgams over Euclidean spaces and some of their applications [J] // JAROSZ K. Proc Conf Function Spaces of Lect Notes in Math. Edwardsville, IL, 1991, 136: 107—121.
- [8] 强晓凤, 冼军. 非均匀加权采样的重建 [J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2004, 19(4): 461—470
- [9] 龙瑞麟. 高维小波分析 [M]. 北京: 世界图书出版公司, 1995
- [10] AITREAS N, BENEDETTO J J, KARANKAS C. Local sampling for regular wavelet and Gabor expansions [J]. Sampling Theory in Signal and Image Processing 2003, 2: 1—24

Localized Frames in Shift Invariant Spaces

QIANG Xiao-feng

(Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The sampling set of the weighted multiply generated shift invariant spaces $V_m^p(\Phi) = \{ \sum_{i=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{ik} \phi_i(\cdot - k), c_i = (c_{ik}) \in \ell^p(\mathbb{Z}^d), i = 1, \dots, r \}$ is studied. It is shown that if the generator $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ satisfies some localization properties, then the dual generator Φ^* also satisfies the same localization properties. A stable sampling set in $V(\Phi)$ must be a stable sampling set in $V_m^p(\Phi)$ is also proved. The reconstruction formula is established.

Key words: localized frame, multiply generated shift invariant space, non-uniform sampling

(上接第 4 页)

On the Model Reduction Techniques in Structural Damage Identification

LU Ji-ke, YANG Qi-wu, ZOU Tie-fang

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Succession level approximate reduction techniques are used in structural damage detection in this paper. Using the succession level approximate reduction technique, results of the residual force algorithm under different level reduced models are discussed through a plane truss structure. It is shown that the result for the second level reduced model using the successive level Guyan method and the result for the first level reduced model by the successive level improved Guyan technique are the most accurate. Accounting for that the accuracy of structural damage detection is not better when the level of the structural model reduction increases, the favorable trend and the adverse aspect are pointed out in damage identification using the succession level approximate reduction technique. In the end, the proposals are provided for the applicable model reduction method in structural damage identification and the trends are expected for the future work.

Key words: damage identification, model reduction, residual force vector, Guyan method