

强奇异积分方程小波 Petrov-Galerkin 快速算法^{*}

隆 广 庆

(中山大学 科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘 要: 通过构造具有高阶消失矩、小支集和半双正交性质的分片多尺度小波基底, 给出第 2 类强奇异积分方程的小波 Petrov-Galerkin 快速算法, 并证明该算法收敛阶达到最佳, 条件数有界, 计算复杂性几乎最佳。

关键词: 强奇异积分方程; Petrov-Galerkin 方法; 快速算法; 小波; 最佳收敛阶

中图分类号: O175.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 05-0001-05

利用多尺度和小波方法求解边界积分方程是近十多年来的一个研究热点^[1-8]。许多研究集中在第 2 类弱奇异积分方程, 提出了小波 Galerkin Petrov-Galerkin 多尺度配置法等快速算法。文 [8-9] 根据文 [5] 构造小波配置泛函的思想, 构造了试探和检验函数空间上具有相同阶消失矩性质的小波基底, 改进了文 [4] 的小波 Petrov-Galerkin 快速算法, 但其收敛性估计尚未完全达到最佳, 还有一个对数因子。近年来, 强奇异积分方程在应用研究中占有越来越重要的位置。本文通过构造分片多项式空间上具有高阶消失矩性质的小波基, 给出第 2 类强奇异积分方程具有最佳收敛阶的小波 Petrov-Galerkin 快速算法。

考虑实 Hilbert 空间 $H = L^2(E)$ 上第 2 类奇异积分方程

$$u - Ku = f, f \in H \quad (1)$$

其中, $E = [0, 1]$, 算子 $K: H \rightarrow H$ 为带有强奇异的有界积分算子, 其核函数 $K(s, t)$ 具有如下性质: 对任意正整数 $k, \alpha, \beta, \alpha \leq k \leq \beta$ 当 $s \neq t$ 时, $K(s, t)$ 具有连续偏导数 $D_s^\alpha D_t^\beta K(s, t)$, 而且存在正常数 c , 使得当 $\alpha = \beta = k$ 时, $|D_s^\alpha D_t^\beta K(s, t)| \leq \frac{c}{|s - t|^{2k+1}}$ 。当 1 不是算子 K 的特征值时, 则方程 (1) 有唯一解。为了方便, 本文采用记号 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $N_0 = \{0, 1, \dots\}$, $Z_k = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 。同时, 用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 表示 H 的内积及其相应的范数。假设 $\{X_n, n \in N_0\}$ 为空间 H 的一个子空间序列, 方程 (1) 的近似格式为: 求 $u_n \in X_n$, 使得对任给 $v_n \in X_n$, 方程 $\langle u_n - Ku_n, v_n \rangle = \langle f, v_n \rangle$ 成立。令 $P_n: H \rightarrow X_n$ 为正交投影算子, 则

方程可以写成算子的形式:

$$(I - K_n)u_n = P_n f \quad (2)$$

其中, 算子 P_n 为单位算子, $K_n = P_n K|_{X_n}$ 。

1 具有高阶消失矩的多尺度小波基的构造

本节运用文 [5] 构造配置泛函的思想, 构造分片多项式空间 X_n 上 2 列具有半双正交性的小波基, 其中一列具有高阶消失矩性质。

设正整数 $\mu > 1$, $\Phi_\mu = \{\phi_\mu, \phi_\mu = \frac{t+1}{\mu}, t \in \mathbb{R}, e \in Z_\mu\}$ 为一组压缩映射, E 为映射 Φ 的不变集, 即 $\Phi(E) = \bigcup_{e \in Z_\mu} \phi_e(E)$ 满足 $\Phi(E) = E$ 。对 $e \in Z_\mu$, 定义线性算子 $T_e: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ 为 $T_e f = \sqrt{\mu} \chi_{\phi_e(E)} f \circ \phi_e^{-1}$, $f \in L^2(E)$, 其共轭算子为 T_e^* 。显然, 对任意 $g \in L^2(E)$, $T_e^* g = (\sqrt{\mu})^{-1} g \circ \phi_e$ 。记 $\mathbf{e} = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) \in Z_\mu^n = Z_\mu \times \dots \times Z_\mu$, $\mu(\mathbf{e}) = \mu^{n-1} \mu^{e_0} \dots \mu^{e_{n-1}}$ 。定义 $T_{\mathbf{e}} = T_{e_0} \circ T_{e_1} \circ \dots \circ T_{e_{n-1}}$, 则根据 [4-5], 对任意 $\mathbf{e}, \mathbf{e}' \in Z_\mu^n$, $T_{\mathbf{e}}^* T_{\mathbf{e}'} = \delta_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'} I$ 。

记 $S_{\mu}^{k,n+1}$ 表示对应于 E 的剖分 $\{E_n, E_n = \phi_e(E), e \in Z_\mu^{n+1}, n \in N_0\}$ 上次数小于 k 的分片多项式空间。令 $X_n = S_{\mu}^{k,n+1}$, 其维数 $S(n) = \mu^{n+1} k$ 。记辅助空间 $Y_n = S_{\mu}^{k,n}$, $k = S(0)$ 。根据文 [4] 可知, $\{X_n, Y_n\}$ 构成一个正则对。

下面先构造 X_n 上一列具有高阶消失矩的多尺度小波基底。假设 $\{\xi_k; k \in Z_{S(0)}\}$ 为 X_0 上一组基

* 收稿日期: 2005-11-18

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (20030558008); 中国博士后科学基金资助项目 (2005037603)

作者简介: 隆广庆 (1974 年生), 男, 博士, 广西师范学院讲师, E-mail: lnggq@gxtc.edu.cn

底, 则 $[\langle g_i, t \rangle]_{i \in Z_{S(0)}}$ 为非奇异阵。由于 $X_0 \subset X_1$, 令 $\{\phi_i \in Z_{S(1)}\}$ 为 X_1 的一组基底, 其中 $\phi_i = g_i, i \in Z_{S(0)}$ 。对每一个 $i \in Z_s, s = S(1) - S(0)$, 我们寻求一个向量 $[\phi_i, m \in Z_{S(1)}] \in R^{S(1)}$ 使得 $g_i = \sum_{n \in Z_{S(1)}} c_n \phi_n$ 满足

$$\langle g_i, t \rangle = 0, t \in Z_{S(0)} \quad (3)$$

由于式 (3) 是一个具有 $S(1)$ 个未知量, 系数矩阵的秩为 $S(0)$ 的 $S(0)$ 阶线性方程组, 所以存在 s 个线性无关的解, 记为 $g_i, i \in Z_s$ 。令 $G_i = \text{span}\{g_i, i \in Z_s\}$, 则 $X_1 = X_0 \oplus G_i$ 。事实上, 假设 $X_0 \cap G_i \neq \{0\}$, 则存在不全为零的常数 c_i 使得 $\phi = \sum_{i \in Z_{S(0)}} c_i g_i$ 满足 $\langle \phi, t \rangle = 0, t \in Z_{S(0)}$ 。由于矩阵 $[\langle g_i, t \rangle]_{i \in Z_{S(0)}}$ 为非奇异阵, 所以 $c_i = 0, i \in Z_{S(0)}$ 与假设矛盾。

记空间 G 的维数为 $w(i)$, 指标集 $U_i = \{(i, j), j \in Z_{w(i)}, i \in Z_{w(1)}\}$ 。当 $i \geq 2$ 时, 对于每一个 $j \in Z_{w(i)}$, 总唯一存在 $\ell \in Z_{\mu}^{i-1}$ 及 $k \in Z_{w(1)}$, 使得 $j = \mu(\ell w(1) + k)$ 。定义 $g_i = T_\ell g_k, k \in Z_{w(i)}$, 令 $G_i = \text{span}\{g_i, i \in Z_{w(i)}\}$, 根据 [4-5], 可知 X_n 有多尺度直和分解: $X_n = G_0 \oplus G_1 \oplus \dots \oplus G_n$, 这里 $G_0 = X_0$ 。并且, $\{g_i, (i, j) \in U_n\}$ 为 X_n 的一组多尺度小波基。

下面构造 X_n 上与 $\{g_i, (i, j) \in U_n\}$ 半双正交的另外一列多尺度小波基底。

假设 $\{w_i, i \in Z_{w(0)}\}$ 为 X_0 上的一组基底, 满足

$$\langle w_i, g_j \rangle = \delta_{ij}, j \in Z_{w(0)} \quad (4)$$

显然, 满足 (4) 的基底 $\{w_i, i \in Z_{w(0)}\}$ 是存在的。令 X_1 的一组基底为 $\{\phi_m, m \in Z_{S(1)}\}$, 其中 $\phi_i = w_i, i \in Z_{w(0)}$ 。对于每一个 $j \in Z_{w(1)}$, 求向量 $[\phi_i, m \in Z_{S(1)}] \in R^{S(1)}$, 使得 $w_i = \sum_{n \in Z_{S(1)}} d_n \phi_n$ 满足

$$\begin{aligned} \langle w_i, g_j \rangle &= 0, j \in Z_{w(0)}, \\ \langle w_i, g_j \rangle &= \delta_{ij}, j \in Z_{w(1)} \end{aligned} \quad (5)$$

令 $\phi_i = \phi_m, m = w(0) + j, (i, j) \in U_1$, 则 (5) 为系数矩阵为 $W_i = [\langle \phi_i, g_j \rangle]_{(i, j) \in U_1}$ 的 $S(1)$ 阶线性方程组。显然, 矩阵 W 为非奇异阵。从而, 对于每一个 $i \in Z_{w(1)}$, 方程 (5) 唯一确定一个 w_i 。

和前面一样, 令 $W_i = \text{span}\{w_i, i \in Z_{w(1)}\}$ 。对 $\ell \in Z_{\mu}^{i-1}$ 和 $k \in Z_{w(1)}$ 使得 $j = \mu(\ell w(1) + k)$ 令 $w_i = T_\ell w_k, W_i = \text{span}\{w_i, i \in Z_{w(i)}\}$, 则 X_n 可分解为 $X_n = W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_n$, 这里, $W_0 = X_0$, 且 $\{w_i, (i, j) \in U_n\}$ 是 X_n 中一组多尺度基底

数。

定理 1 假设 $\{w_i, (i, j) \in U_n\}$ 和 $\{g_i, (i, j) \in U_n\}$ 为上述构造的 $k-1$ 次分片多项式空间 X_n 上的多尺度小波基, 则有如下性质:

(i) $\{w_i, (i, j) \in U_n\}$ 与 $\{g_i, (i, j) \in U_n\}$ 具有半双正交性质, 即 $\langle w_i, g_j \rangle = \delta_{ij}, i, j \in U_n$ 。

(ii) $\{w_i, i=1 \in Z_n, j \in Z_{w(i)}\}$ 具有 k 阶消失矩性质, 即 $\int_{\mathbb{R}} w_i(j)(t) dt = 0, i \in Z_k$ 。

(iii) $\{g_i, i=1 \in Z_n, j \in Z_{w(i)}\}$ 具有 k 阶消失矩性质, 即 $\int_{\mathbb{R}} g_i(j)(t) dt = 0, i \in Z_k$ 。

(iv) $\{w_i, i=1 \in Z_n, j \in Z_{w(i)}\}$ 和 $\{g_i, i=1 \in Z_n, j \in Z_{w(i)}\}$ 均具有小支集的性质, 即 $\frac{1}{\mu} \leq \text{meas}(\text{supp } w_{ij}) \leq \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \leq \text{meas}(\text{supp } g_{ij})$

$\leq \frac{1}{\mu}$, 其中 c, c 为正常数。

证明 利用压缩映射 Φ 和线性算子 T_ℓ 的定义, 以及 (4), (6) 式, 容易得到定理结论。

定理 2 小波基底 $\{g_i, (i, j) \in U_n\}$ 和 $\{w_i, (i, j) \in U_n\}$ 具有如下性质:

(i) 存在与 n 无关的正数 c , 使得对任意 $i \in X_n$, 下面关系成立: $\|g_i\|_2 \leq c\|f\|$, 其中, $g_i = [\langle g_i, f \rangle, (i, j) \in U_n]$ 。

(ii) 存在与 n 无关的正数 c , 使得对任意 $i \in X_n$, 下面关系成立: $\|w_i\|_2 \leq c\|f\|$, 其中, $w_i = [\langle w_i, f \rangle, (i, j) \in U_n]$ 。

证明 利用这组基底的半双正交性, 消失矩性以及紧支集性质, 很容易得到定理证明。

下面分别引入空间 X_n 和辅助空间 Y_n 上辅助的小波基底, 这组基底在证明算法的稳定性上起着重要的作用。

假设 $\{h_i, (i, j) \in U_1\}$ 和 $\{\zeta_i, (i, j) \in U_1\}$ 分别为 X_1 和 Y_1 上满足 $\langle h_i, w_{j,j} \rangle = \delta_{ij}, \langle \zeta_i, g_{j,j} \rangle = \delta_{ij}$ 的基函数, 根据 [4-6], 这样的基函数是存在的。当 $i \geq 2, i \in Z_{w(i)}$ 时, 存在一对 $\ell \in Z_{\mu}^{i-1}$ 和 $k \in Z_{w(1)}$ 满足 $j = \mu(\ell w(1) + k)$ 令 $h_i = T_\ell h_k, \zeta_i = T_\ell \zeta_k$, 则 $\{h_i, (i, j) \in U_n\}$ 和 $\{\zeta_i, (i, j) \in U_n\}$ 分别构成空间 X_n 和 Y_n 上的一组多尺度基函数。易证, 它们分别与 $\{w_i, (i, j) \in U_n\}$ 和 $\{g_i, (i, j) \in U_n\}$ 双正交, 且具有 k 阶消失矩性质。

定理 3 小波基函数 $\{h_i, (i, j) \in U_n\}$ 和 $\{\zeta_i, (i, j) \in U_n\}$ 具有下面性质:

(i) 存在与 n 无关的正数 c , 使得对任意 $i \in X_n$, 下面关系成立: $\|h_i\|_2 \leq c\|f\|$ 。其中, h_i

$= [\langle h_j, f_i \rangle, (i, j) \in U_n]$.

(ii) 存在与 η 无关的正数 ζ , 使得对任意 $f \in X_n$, 下面关系成立: $\|x\|_2 \leq \zeta \|f\|$. 其中, $x = [\langle \zeta_i, f_j \rangle, (i, j) \in U_n]$.

证明 和定理 2 的证明类似, 这里略.

2 小波 Petrov-Galerkin 快速算法

利用上一节构造的 X_n 上两列小波基 $\{w_j, (j) \in U_n\}$ 和 $\{g_i, (i) \in U_n\}$ 分别作为试探函数空间和检验函数空间的基底, 构造方程 (1) 的 Petrov-Galerkin 算法, 即求 $u_h = \sum_{(i,j) \in U_n} u_{ij} w_{ij} \in X_n$, 满足 $\langle g_i, u_h - Ku_h \rangle = \langle g_i, f_j \rangle, (i, j) \in U_n$, 其等价的矩阵形式可表示为求向量 $u_i = [u_{ij}, (i, j) \in U_n]^T$, 满足

$$(E_n - K_n) u_h = g_n \quad (6)$$

其中, $E_n = [\langle g_i, w_j \rangle]_{S_m \times S_m}$, $K_n = [\langle g_i, Kw_j \rangle]_{S_m \times S_m}$, g_n 与上节定义一致.

下面的引理给出系数矩阵 K_n 的元素大小的一个估计, 其证明可参看文 [4-8].

引理 1 令 S_i, S_j 分别为 w_j, g_i 的支集. 假设 S_i 与 S_j 之间的距离 $\text{dist}(S_i, S_j) > 0$, 则存在常数 $c > 0$, 使得 $|K_{ij}| \leq c \mu^{-(ik+ik')} \mu^{\frac{k-k'}{2}} \text{dist}(S_i, S_j)^{-k-k'}$.

由引理 1 可知, 当支集 S_i 和 S_j 之间的距离增大时, 矩阵元素的绝对值将变小. 利用这个性质, 可以提出相应的截断策略. 为此, 将刚度矩阵 K_n 按照下述方法分块: $K_n = [K_{ij}]_{i \in Z_{n+1}}, K_{ij} = [K_{ij}^{(k)}]_{\substack{k \in Z_{w(i)} \\ k' \in Z_{w(j)}}}$. 用 $\tilde{K}_n = [\tilde{K}_{ij}]_{i \in Z_{n+1}}, \tilde{K}_{ij} = [K_{ij}^{(k)}]_{\substack{k \in Z_{w(i)} \\ k' \in Z_{w(j)}}}$ 表示相应的截断矩阵, 其中 $\tilde{K}_{ij} =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dist}(S_i, S_j) > \hat{\delta}_i, \\ K_{ij} & \text{其他情形,} \end{cases} \quad \text{这里 } \hat{\delta}_i \text{ 称为截断}$$

参数. 由截断矩阵 $\tilde{K}_n$ 代替 (6) 中的 K_n 得到一个新的离散方程组: 求 $u_i = [u_{ij}, (i, j) \in U_n]^T$ 满足

$$(E_n - \tilde{K}_n) u_h = g_n \quad (7)$$

下面引入积分算子 $K_i: X_n \rightarrow X_n$, 其相对于小波基 $\{w_j, (j) \in U_n\}$ 的矩阵表示为 $E_n^{-1} K_n$, 则 (7) 可表示为求 $u_h \in X_n$ 满足

$$(I - \tilde{K}_n) u_h = P_n f \quad (8)$$

下面分析块截断矩阵 $\tilde{K}_{ij}$ 与 K_{ij} 之间的误差. 记块扰动矩阵为 $R_{ij} = K_{ij} - \tilde{K}_{ij}, i, j \in Z_{n+1}$.

定理 4 假设常数 $r > 1$, 当截断参数 $\hat{\delta}_i \geq \max\{\mu^{-i}, \mu^{-i'}\}$, 则存在常数 $c > 0$, 使得扰动矩阵的范数满足 $\|R_{ij}\|_2 \leq c \mu^{-(ik+ik')} \mu^{\frac{k-k'}{2}} \hat{\delta}_i^{k-k'}$.

证明 记 $R_{ij} = [r_{ij}]_{k \in Z_{w(i)}, k' \in Z_{w(j)}}$, 则有块矩阵的列和

$$\sum_{k \in Z_{w(i)}} |r_{ij}| = \sum_{\substack{j \in Z_{w(i')}, \text{dist}(S_i, S_{j'}) > \hat{\delta}_i \\ (k \in Z_{w(i')}, \text{dist}(S_{j'}, S_{i'}) > \hat{\delta}_i')}} \mu^{-(ik+ik')} \mu^{\frac{k-k'}{2}} \text{dist}(S_i, S_{j'})^{-k-k'}$$

由于 $\hat{\delta}_i > \max\{\mu^{-i}, \mu^{-i'}\}$, 利用积分来表示求和, 则有: $\sum_{k \in Z_{w(i)}} |r_{ij}| \leq \mu^{-(ik+ik')} \mu^{\frac{k-k'}{2}} \int_{|x| > \hat{\delta}_i} |x|^{-k-k'} dx$

$\leq \mu^{-(ik+ik')} \mu^{\frac{k-k'}{2}} \hat{\delta}_i^{k-k'}$. 同理, 块矩阵行和的估计为:

$$\sum_{k' \in Z_{w(j')}} |r_{ij}| \leq \mu^{-(ik+ik')} \mu^{\frac{k-k'}{2}} \hat{\delta}_i^{k-k'}$$

再利用不等式 $\|R_{ij}\|_2^2 \leq \|R_{ij}\|_1 \|R_{ij}\|_\infty$, 则 $\|R_{ij}\|_2 \leq \mu^{-(ik+ik')} \mu^{\frac{k-k'}{2}} \hat{\delta}_i^{k-k'}$.

3 稳定性和收敛性

本节将讨论 Petrov-Galerkin 快速算法的稳定性, 并证明该算法的收敛阶达到最佳. 记 m 为非负整数, $H^m(E) = \{u | u \in L^2(E), D^\alpha u \in L^2(E), |\alpha| \leq m\}$, 其相应范数记为 $\|\cdot\|_m$. 同时记 $\Gamma[a, b, \eta] = \sum_{i \in Z_{n+1}} \mu^{ai} \sum_{j \in Z_{n+1}} \mu^{bj}, \varepsilon_i = r^{k-k'}$.

下面先给出一个重要的引理.

引理 2 假设 a, b 为两个实数, η 为大于 1 的实数, 当截断参数 $\hat{\delta}_i$ 满足

$$\hat{\delta}_i \geq \max\{\mu^{-m\eta}, \mu^{-\eta(b(n-\hat{\delta})+b(n-\hat{\delta}))}\} \quad (9)$$

则对任意的 $u \in H^m(E)$, $0 \leq m \leq k$ 存在常数 $c > 0$ 使得

$$\|(K_n - \tilde{K}_n) P_n u\| \leq c \Gamma[k+m-b, k+k'] k^{-b(k+k')} \eta \mu^{-mn} \|u\|_m \quad (10)$$

证明 由于 $P_n(H) = X_n$, 且算子 P_n 是有界的, 不妨设 $\|P_n\| \leq P$, 则

$$\|(K_n - \tilde{K}_n) P_n u\| = \sup_{v \in H, v \neq 0} |\langle (K_n - \tilde{K}_n) P_n u, v \rangle| / \|v\| \leq P \sup_{v \in X_n, v \neq 0} |\langle (K_n - \tilde{K}_n) P_n u, v \rangle| / \|v\|$$

先估计

$$\begin{aligned} & |\langle (K_n - \tilde{K}_n) P_n u, v \rangle| \leq \\ & \left| \sum_{i \in Z_{n+1}} \sum_{j \in Z_{w(i')}} \sum_{k \in Z_{w(j)}} \langle (K_n - \tilde{K}_n) \langle u, h_j \rangle w_j, \langle v, \zeta_i \rangle g_i \rangle \right| \leq \\ & \sum_{j \in Z_{n+1}} \|R_{ij}\|_2 \|\langle u, h_j \rangle\|_{Z_{w(j)}} \| \langle v, \zeta_i \rangle \|_{Z_{w(i)}} \end{aligned}$$

由于 $(P_n - P_{n+1})u = \sum_{j \in Z_{w(i')}} \langle u, h_j \rangle w_j$, 则存在常数 $c > 0$ 使得

$$\| [\langle \varphi, h_j \rangle]_{j \in Z_{m_1}} \|_2 \leq c \| (P_i - P_{i-1}) u \| \quad (11)$$

又根据[4]之引理 7.4 可知存在与 m 无关的常数 $c > 0$, 使得 $\| u - P_i u \| \leq c \mu^{-m} \| u \|_m$, 从而 $\| [\langle \varphi, g_j \rangle]_{j \in Z_{m_1}} \|_2 \leq c \mu^{-m} \| u \|_m$. 同理, $\| [\langle \varphi, \zeta_j \rangle]_{j \in Z_{m_1}} \|_2 \leq c \| \varphi \|$.

于是,

$$\| (K_n - K_n) P_n u \| \leq c \sum_{i \in Z_{m_1}} \| R_{ii} \|_2 \mu^{-m} \| u \|_m \leq \epsilon \Gamma_k + m - b(k + k') k' - b(k + k); \eta \mu^{-m} \| u \|_m$$

从而定理得证.

下面考虑算法的稳定性. 为此, 假设近似算子方程 (2) 是稳定的, 即

(H) 存在正整数 N 及常数 δ , 使得 $n > N$ 时, 对任意 $x_n \in X_n$,

$$\| (I - K_n) x_n \| \geq \delta \| x_n \| \quad (12)$$

根据文[3], 对任意 $n > N$, 若 (2) 有收敛于原方程的解 u 的唯一逼近解 $u_n \in X_n$, 则 (H) 成立.

定理 5 [稳定性] 假设 (H) 成立, 同时实参数

$$b > \frac{k}{k+k'}, b > \frac{k'}{k+k'}, \text{ 则当 } \epsilon \text{ 充分小时, 由 (8)}$$

式所定义的 Petrov-Galerkin 框架是稳定的, 即对任意 $u_n \in X_n$, 存在一个正整数 N 和常数 $c > 0$, 使得 $n > N$ 时, 有 $\| (I - K_n) u_n \| \geq c \| u_n \|$.

证明 因为 $b > \frac{k}{k+k'}, b > \frac{k'}{k+k'}$, 则 $\Gamma_k - b(k+k') k' - b(k+k); \eta$ 一致有界, 即存在一个与 m 无关的常数 $M > 0$, 使得 $\Gamma_k - b(k+k') k' - b(k+k); \eta < M$. 从而, 当 $\epsilon < \frac{\delta}{2M}$ 时, $\epsilon \Gamma_k - b(k+k') k' - b(k+k); \eta < \frac{\delta}{2}$. 于是, 对任意 $u_n \in X_n$, 利用 (12) 和 (10), 有如下估计

$$\begin{aligned} \| (I - K_n) u_n \| &\geq \\ \| (I - K_n) u_n \| - \| (K_n - K_n) u_n \| &\geq \\ \delta \| u_n \| - \frac{\delta}{2} \| u_n \| &\geq \frac{\delta}{2} \| u_n \| \end{aligned}$$

从而定理得证.

下面将证明 Petrov-Galerkin 快速算法具有最佳收敛阶.

定理 6 [收敛性] 假若 (8) 所定义的 Petrov-Galerkin 框架是稳定的, 则对于任意 $0 \leq m \leq k$

参数 $b > \frac{k+m}{k+k'}, b > \frac{k'}{k+k'}$, 存在常数 $c > 0$, 使得

满足离散方程 (7) 的解 $u_h = \sum_{(i,j) \in U_n} u_{ij} w_{ij}$ 与原方程的

解 u 的误差估计为: $\| u - u_h \| \leq c \mu^{-m} \| u \|_m$.

证明 由于 $P_n(I - K)u = (I - K_n)u_h$, 则

$$(I - K_n)(P_n u - u_h) =$$

$$(K_n - K_n)P_n u + P_n(I - K)(P_n u - u_h)$$

根据定理 5 有

$$\begin{aligned} \| u - u_h \| &\leq \| u - P_n u \| + \| (I - K_n)(P_n u - u_h) \| \\ &\leq (1 + \| I - K \|) \| u - P_n u \| + \| (K_n - K_n)P_n u \| \end{aligned} \quad (13)$$

由 (10) 及 b 的范围, 可知, 存在一个常数 $c > 0$ 使得 $\| (K_n - K_n)P_n u \| \leq c \mu^{-m} \| u \|_m$. 又由于 $\| u - P_n u \| \leq c \mu^{-m} \| u \|_m$, 故定理得证.

4 计算复杂度和条件数

本节的定理将指出算法的计算复杂度为几乎最优, 同时条件数是有界的. 具体证明可参考文[4, 5, 8].

$$\text{定理 7 假设 } \frac{2k}{k+k'} < b \leq 1, \frac{k'}{k+k'} < b \leq 1,$$

$\tau > 1$, 截断参数

$$\hat{\alpha}_i \leq \max\{\mu^{-m_{ij,i}}, \mu^{-\tau(k(n-i)+k(n-i))}\} \quad (14)$$

则算法的计算复杂度 $N(K_n) = O(S(n) \log S(n))$,

$$\text{其中, } \tau = \begin{cases} 2 & b = b' = 1; \\ 1 & \text{其他.} \end{cases}$$

定理 8 假定截断参数 $\hat{\alpha}_i$ 满足条件 (9), 实参数 $b > \frac{k}{k+k'}, b > \frac{k'}{k+k'}$, 则方程 (7) 的刚度矩阵的条件数是有界的, 即存在一个正数 α 和一个正整数 N 使得 $n \geq N$ 时,

$$\| E_n - K_n \|_2 \| (E_n - K_n)^{-1} \|_2 \leq c$$

参考文献:

- [1] ATKINSON E. The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind [M]. Cambridge: Cambridge University Press, UK, 1997.
- [2] BEYLKIN G, COIFMAN R, ROKHLIN V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms I [J]. Comm Pure. Appl. Math. 1991, 44: 141-183.
- [3] CHEN M, J, CHEN Z, Y, CHEN G, R. Approximate Solutions of Operator Equations [M]. New York: World Scientific Publishing Co, 1997.
- [4] CHEN Z, Y, MCCHELLIC A, XU Y, S. The Petrov-Galerkin methods for second kind integral equations II: Multi-wavelet scheme [J]. Adv. Comp. Math. 1997 (7): 199-233.
- [5] CHEN Z, Y, MCCHELLIC A, XU Y, S. The fast collocation method for second kind integral equations [J]. SAM J. Numer. Anal. 2002, 40: 344-375.
- [6] CHEN Z, Y, XU Y, S. The Petrov-Galerkin and iterated Petrov-Galerkin methods for second kind integral equations [J]. (下转第 8 页)

[M]. Nonlinearity 2002 15 849—862

[7] 周作领. 符号动力系统 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1997

[8] HUANG Wen, YE Xiangdong Topological Complexity Return Times and Weak Disjointness [J]. Ergod Th and Dynam Sys 2004 24 825—846

[9] 杨润生. 拓扑遍历映射 [J]. 数学学报, 2001, 44(6): 1063—1068

Chaos and Topological Transitive Properties

YN Jiandong ZHOU Zuo ling

(School of Mathematics and Computational Science Sun Yat sen University Guangzhou 510275 China
Lingnan College Sun Yat sen University Guangzhou 510275 China)

Abstract: For a dynamic system, if there is a (quasi) weakly almost periodic point but not an almost periodic point, then there exists a subsystem which is chaotic in the sense of revised Devaney. Also a totally topological transitive system is topologically double ergodic if the regular minimal points are dense in it. Therefore for the finite type sub-shift, topologically strong mixing and totally topological transition are equivalent.

Key words: (quasi) weakly almost periodic; chaos in the sense of revised Devaney; finite type sub-shift; totally transitive

(上接第 4 页)

tions [J]. SIAM J Numer Anal 1998 35 406—434

[7] MICHELLI C A, XU Y S, ZHAO Y H Wavelet Galerkin methods for second-kind integral equations [J]. J Comp Appl Math 1997 86 251—270

[8] 黄敏. Fredholm 第二型积分方程的小波 Petrov-Galerkin 算法 [D]. 北京: 中国科学院博士论文, 2003

[9] HUANG M A construction of multiscale bases for Petrov-Galerkin methods for integral equations [J]. Adv Comput Math 2006 25 7—25

Fast Wavelet Petrov-Galerkin Methods for Singular Integral Equations

LONG Guang-qing

(Department of Scientific Computing and Computer Applications Sun Yat sen University
Guangzhou 510275 China)

Abstract: Two suitable multiscale wavelet bases are constructed, which have the higher vanishing moment, small support and bi-orthogonal properties. Using this bases, fast Petrov-Galerkin methods are developed, and are shown having optimal order of convergence, almost optimal complexity and bounded condition number.

Key words: singular integral equation; Petrov-Galerkin method; fast algorithm; wavelet; optimal order of convergence