

曲线箱梁的非线性控制方程及其求解^{*}

陈玉骥，罗旗帜
(佛山科学技术学院土木工程与建筑学系，广东 佛山 528000)

摘 要：根据薄壁曲线梁理论和势能变分原理，考虑箱梁翼缘正应力的剪滞效应和结构大挠度影响，导出了薄壁曲线箱梁的几何非线性控制微分方程，并采用样条最小二乘配点法进行求解，其结果与试验值和有限段解基本吻合。文中给出的公式和方法可供薄壁曲线箱梁设计参考。

关键词：曲线箱梁；非线性控制方程；样条函数；剪滞效应

中图分类号：U448.215 **文献标识码：**A **文章编号：**0529-6579 (2006) 05-0022-04

1 背景与假设

薄壁曲线箱梁是桥梁结构中应用较为常见结构形式之一。目前，已有不少学者对这种结构的计算理论进行了研究，取得了较多的研究成果，但其中大部分为结构的线性分析^[1-8]，对薄壁曲线梁进行几何非线性分析的研究^[9]成果则很少。Noor Green 和 Hartley 采用有限元法对曲线梁进行了非线性分析，钟新谷和曾庆元^[10]用加权残值法研究了钢筋混凝土拱桥的非线性问题，周文伟^[11]推导了空间曲梁几何非线性刚度方程^[11]，但以上论文在非线形分析中，都未考虑剪滞效应的影响。

本文根据薄壁曲线梁理论和势能变分原理，考虑箱梁翼缘正应力的剪滞效应和大挠度影响，导出了薄壁曲线箱梁的几何非线性控制微分方程，并采用样条最小二乘配点法求解，得到了连续曲线箱梁在荷载作用下的响应。分析时，为简化计算，引入如下基本假设：

- (1) 只考虑竖向荷载和扭转荷载的作用；
- (2) 曲线梁轴线平面的面内位移 (即轴向位移和法向位移) 与竖向挠度相比较小，可忽略不计；
- (3) 曲线梁在梁轴平面内的约束是静定的；
- (4) 不考虑薄壁箱型截面的畸变。

根据以上假设可知，结构中任一点的位移由 3 个部分迭加组成：竖向挠度 $w(x)$ 、扭转角 $\varphi(x)$ 和剪滞翘曲位移 (用剪切转角的最大差值函数 $U(x)$ 来描述)。另外，根据平衡方程可判断，曲线箱梁的轴力和水平剪力都应为零。故以下分析中，只须考虑竖向挠度的几何非线性影响。

2 非线性控制方程的推导

图 1 所示为曲线箱梁截面，该梁受到竖向荷载 q_z 和扭转荷载 m_x 的作用。采用三维直角流动坐标系 xyz ，任一截面的局部坐标原点均在箱梁截面的形心处， x 轴为轴向坐标， y 轴指向曲梁轴线圆弧曲率中心。

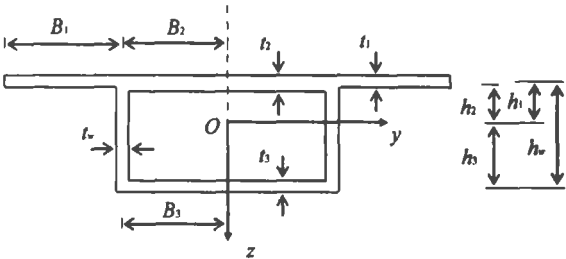


图 1 薄壁曲线箱梁截面
Fig. 1 Section of thin-walled curved box girder

2.1 曲线箱梁的变形势能

设曲线箱梁翼缘的剪滞翘曲位移函数按照三次抛物线分布，则其剪应变和正应变分别为：

$$\gamma = \begin{cases} \pm \frac{3h_1(|y| - B_1 - B_2)^2}{B_1^3} U(x) & \text{悬臂板} \\ -\frac{3h_2y^2}{B_2^3} U(x) & \text{顶板} \\ -\frac{3h_3y^2}{B_3^3} U(x) & \text{顶板} \\ 0 & \text{腹板} \end{cases} \quad (1)$$

^{*} 收稿日期：2005-11-11
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (50378019)；广东省自然科学基金资助项目 (034066)
作者简介：陈玉骥 (1962 年生)，男，教授，博士；E-mail: chenyl310@163.com
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\epsilon = \begin{cases} h_1 \left\{ w''(x) - \frac{\phi(x)}{r} + \left[1 + \frac{(|y| - B_1 - B_2)^3}{B_1^3} \right] U'(x) \right\} + \frac{1}{2} [w'(x)]^2 & \text{悬臂板} \\ h_2 \left\{ w''(x) - \frac{\phi(x)}{r} + \left[1 - \frac{(|y|)^3}{B_2^3} \right] U'(x) \right\} + \frac{1}{2} [w'(x)]^2 & \text{顶板} \\ -h_3 \left\{ w''(x) - \frac{\phi(x)}{r} + \left[1 - \frac{|y|^3}{B_3^3} \right] U'(x) \right\} + \frac{1}{2} [w'(x)]^2 & \text{底板} \\ -2 \left[w''(x) - \frac{\phi(x)}{r} \right] + \frac{1}{2} [w'(x)]^2 & \text{腹板} \end{cases} \quad (2)$$

式中, $U(x)$ 为剪切转角的最大差值函数。
从而可得结构的变形势能 $\Pi = U_w + U_f + U_T + U_B + V_p$, 其中腹板、翼缘的应变能分别为:

$$U_w = \frac{1}{2} \int_0^s E \epsilon^2 dV_w = \frac{E}{2} \int_0^s \left[I_w (w'' - \frac{\phi}{r})^2 + \frac{1}{4} A_w (w')^4 + S_w (w')^2 (w'' - \frac{\phi}{r}) \right] dx$$
$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^s (E \epsilon^2 + G \gamma^2) dV_f = \frac{E}{2} \int_0^s \left\{ I_f (w'' - \frac{\phi}{r})^2 + \frac{9}{14} (U')^2 + \frac{3}{2} U' (w'' - \frac{\phi}{r}) \right\} dx + \frac{1}{4} A_f (w')^4 + S_f (w')^2 (w'' - \frac{\phi}{r}) + \frac{3}{4} U' \} dx + \frac{G}{2} \int_0^s \frac{9}{5} A_u U^2 dx$$

式中, S_w 和 S_f , I_w 和 I_f , A_w 和 A_f 分别为腹板和翼缘对截面中性轴的静矩、抗弯惯性矩、截面积, $A_u = 2(\frac{h_1^2 t_1}{B_1} + \frac{h_2^2 t_2}{B_2} + \frac{h_3^2 t_3}{B_3})$ 为翼缘的广义剪切面积。

自由扭转、约束扭转应变能分别为:

$$U_T = \frac{G}{2} \int_0^s K_T \gamma_\phi^2 dx = \frac{G}{2} \int_0^s K_T (\phi' + \frac{w'}{r})^2 dx$$
$$U_B = \frac{E}{2} \int_0^s I_\omega (\gamma_\phi')^2 dx = \frac{E}{2} \int_0^s I_\omega (\phi'' + \frac{w''}{r})^2 dx$$

式中, K_T 为抗扭惯性矩, I_ω 为扇形惯性矩。
外力势能为: $V_p = - \int_0^s q w dx - \int_0^s m_x \phi dx$

2.2 曲线箱梁的控制方程

由 $\delta \Pi = 0$ 可得曲线箱梁的非线性控制方程为:

$$\begin{cases} \left(EI + \frac{EI_\omega}{r^2} \right) w^{(4)} - \frac{GK_T}{r^2} w'' + \frac{EI_\omega}{r} \phi^{(4)} - \frac{EI + GK_T}{r} \phi'' + \frac{3}{4} EI U''' - \frac{3}{2} EA (w')^2 w'' - \frac{3}{4} ES_f (U' w'' + U'' w') - q = 0 \\ \frac{EI_\omega}{r} w^{(4)} - \frac{EI + GK_T}{r} w'' + EI_\omega \phi^{(4)} - GK_T \phi'' + \frac{EI_\omega}{r^2} \phi - \frac{3EI_f}{4r} U' - m_x = 0 \\ \frac{3}{4} EI U''' - \frac{3EI_f}{4r} \phi' + \frac{9}{14} EI U'' - \frac{9}{5} GA_u U + \frac{3}{4} ES_f w' w'' = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中, $I = I_w + I_f$ 和 $A = A_w + A_f$ 分别为箱梁整个截面的抗弯惯性矩和截面积。

3 曲线箱梁控制方程的求解

样条函数是一种分段低次插值多项式, 有很强的适应数据和函数变化能力, 能够较好地描述连续体的变形。为此, 以下采用样条最小二乘配点法来求解曲线箱梁的非线性控制方程。首先对梁的整个跨度区间 $[0, s]$ 进行均匀分划: $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ ($x_i = x_0 + ih$, $h = (x_N - x_0)/N = s/N$, $i = 0, 1, \dots, N$), 设

$$w(x) = \Omega_w a, \phi(x) = \Omega_\phi b, U(x) = \Omega_U c$$

式中, $a = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$, $b = [b_0, b_1, \dots, b_N]^T$, $c = [c_0, c_1, \dots, c_N]^T$, $\Omega_k = [\Omega_{k0}, \Omega_{k1}, \dots, \Omega_{kN}]$ ($k = w, \phi, U$), Ω_{ki} ($i = 0, 1, \dots, N$), 为由五次 B 样条函数 $\varphi_5(x) = \sum_{j=0}^6 \frac{(-1)^j}{5!} \binom{6}{j} (\frac{x}{h} - j)_+^5$ 组成的基函数, 该基函数可以

根据不同的边界条件和连续条件进行构造^[12], 使曲线箱梁的边界条件和内支座处的连续条件得以自动满足, 所以无边界残值和连续条件残值。取样条节点 x_i ($i = 0, 1, \dots, N$) 为配置点, 通过控制方程 (3) 得到域内残值:

$$\begin{cases} R_I = (K_{I1} + \bar{K}_{I1}(a, c))a + K_{I2}b + K_{I3}c - q \\ R_{II} = K_{21}a + K_{22}b + K_{23}c - m \\ R_{III} = (K_{31} + \bar{K}_{31}(a))a + K_{32}b + K_{33}c \end{cases}$$

即

$$R = K \delta - F \quad (4)$$

式中, $R = [R_I^T, R_{II}^T, R_{III}^T]^T$, $R_i = [R_i(x_0), R_i(x_1), \dots, R_i(x_N)]^T$ ($i = I, II, III$)
 $\delta = [a^T, b^T, c^T]^T$, $F = [q^T, m^T, 0^T]^T$, $q = [q_z(x_0), q_z(x_1), \dots, q_z(x_N)]^T$, $m = [m_x(x_0), m_x(x_1), \dots, m_x(x_N)]^T$, $K = \begin{bmatrix} K_{I1} + \bar{K}_{I1}(a, c) & K_{I2} & K_{I3} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} + \bar{K}_{31}(a) & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$

为刚度矩阵, 其中 $\bar{K}_{I1}$ 和 $\bar{K}_{31}$ 为非线性部分。因篇幅关系, K 中各子块表达式从略。

对于非线性方程 (4), 采用最小二乘法求解, 其迭代格式为^[12]:

$$K^T(\hat{q})K(\hat{q})\Delta \hat{q} = -K^T(\hat{q})R_k$$
$$\hat{q}_{k+1} = \hat{q} + \Delta \hat{q}$$

迭代时, 取相应线性方程组 (即去掉 (4) 式矩阵 K 中的 $\bar{K}_{II}$ 和 $\bar{K}_{31}$ 得到的方程) 的解作为初值。

4 算 例

为考察本文理论的可靠性, 取文 [4] 中的两跨

等跨连续曲线箱梁(试验梁)进行计算。该梁的主要参数为, 跨度 $s=45\text{cm}+45\text{cm}$, 梁轴线曲率半径 $r=43\text{cm}$, 材料的弹性模量 $E=2600\text{MPa}$ 剪切模量 $G=985\text{MPa}$ 横截面尺寸为: $B_1=7.6\text{cm}$, $B_2=B_3=9.6\text{cm}$, $t_1=t_2=t_3=0.6\text{cm}$, $h_w=8\text{cm}$, $t_w=0.8\text{cm}$ 。箱梁受到满跨均布竖向荷载 q_z 的作用。主要计算结果见表 1 和图 2~6 其中, 表 1 为上翼缘顶板的弯曲剪滞效应系数(即考虑剪滞效应的翼缘弯曲正应力与不考虑剪滞效应的翼缘弯曲正应力之比值)随荷载变化情况, 图 2~4 分别为第一跨跨中挠度、扭转角和上翼缘顶板最大正应力及中支座截面上翼缘顶板最大正应力随荷载变化情况(给出了线性解和非线性解)。图 5~6 为均布荷载 $q_z=578\text{N/m}$ 时中支座截面上、下翼缘的正应力分布情况, 该两图中还给出了试验值和有限段解^[4], 为了能较合理地进行比较, 图中的“本文解”和“有限段解”均迭加了按文[8]给出的公式算出的畸变应力。

表 1 曲线箱梁上翼缘顶板的弯曲剪滞效应系数随荷载变化情况

Tab. 1 The change of moment shear lag coefficients of top plate in top-flange on curved box girder with loads				
$\frac{q_z s}{Eh_w^2}$	中间支座截面上翼缘顶板	边跨跨中截面上翼缘顶板		
	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$
0.00054	2.079	0.809	1.860	0.629
0.00108	2.086	0.798	1.850	0.635
0.0027	2.082	0.799	1.849	0.636
0.0054	2.078	0.803	1.851	0.635
0.0108	2.076	0.806	1.857	0.632
0.0190	2.077	0.800	1.856	0.630

注: $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别为上翼缘顶板在与腹板交界处和在横向正中点处的弯曲剪滞效应系数。

由图 5~6 可以看出, 本文的结果与试验值和有限段解相比, 除悬臂板悬臂端及附近差别较大外(该处应力绝对值较小, 试验时由于受系统误差影响较大, 故测试结果的精度较差, 数据不太具有可比性), 其他地方基本相同, 特别是曲线箱梁截面的重要受力位置翼缘与腹板交界处吻合很好, 说明了本文方法是可靠的。

5 结 语

(1) 本文推导了薄壁曲线箱梁的几何非线性控制方程, 并采用样条最小二乘配点法求解。本文方法经济、简单、实用, 可推广于变截面、变曲率薄壁曲线箱梁的计算。

(2) 随着荷载数值的逐渐增加, 结构中的应力和位移逐渐呈现出明显的非线性特征, 但弯曲剪滞

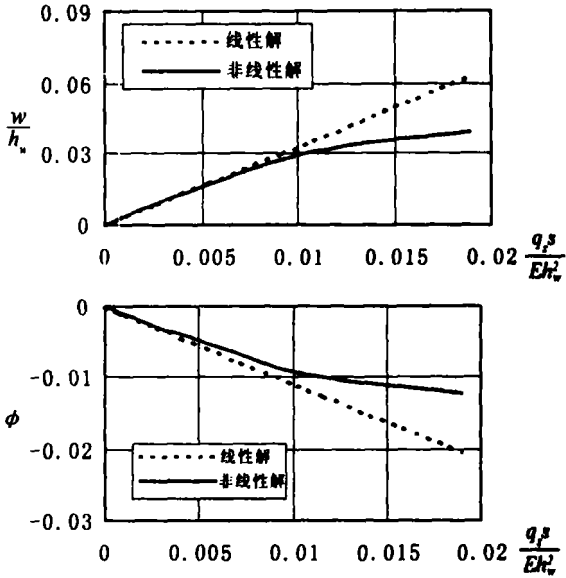


图 2 曲线箱梁第一跨跨中挠度、扭转角随荷载变化曲线

Fig. 2 The change of deflection and torsional angle in the middle of the first span on curved box girder with loads

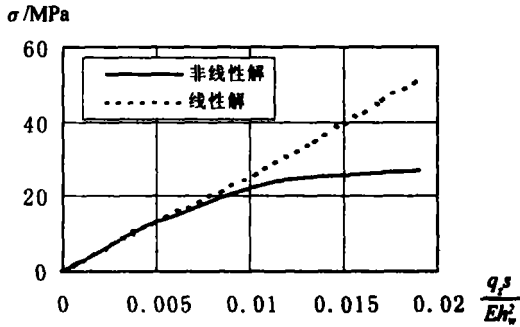


图 3 曲线箱梁中支座截面上翼缘顶板最大正应力随荷载变化曲线

Fig. 3 The change of max stress of top plate in top-flange on the section in the middle support on curved box girder with loads

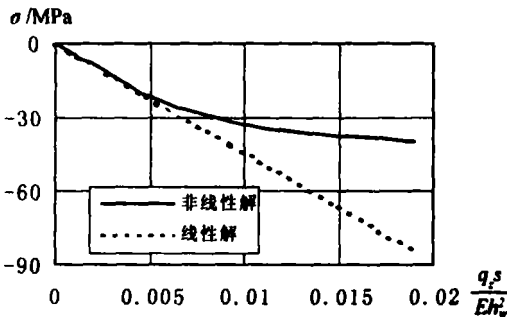


图 4 曲线箱梁第一跨跨中截面上翼缘顶板最大正应力随荷载变化曲线

Fig. 4 The change of max stress of top plate in top flange on the section in the middle of the first span on curved box girder with loads

效应系数却基本保持不变。这表明, 几何非线性对翼缘板应力分布的不均匀程度不产生影响。

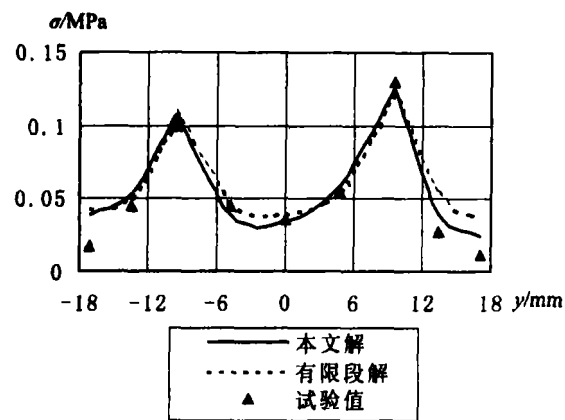


图 5 曲线箱梁中支座截面上翼缘正应力

Fig 5 Stress of top-flange on the section in the middle support on curved box girder

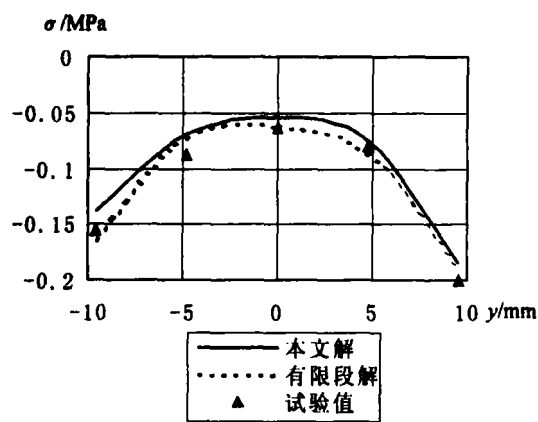


图 6 曲线箱梁中支座截面下翼缘正应力

Fig 6 Stress of bottom-flange on the section in the middle support on curved box girder

(3) 几何非线性的影响程度，取决于荷载的数值，荷载越大，非线性解与线性解差越别大，即非

线性效应越显著。本文计算表明，对于两跨等跨连续曲线箱线梁，当 $q_s E h_w^2 > 0.005$ 时，应考虑几何非线性对结构内力和位移的影响。

参考文献:

[1] LUO Qi-zhi LI Q S Shear lag of thin-walled curved box girder bridges[J]. J Engng Mech Asce 2000 126 (10): 1111-1114.

[2] 罗旗帜. 薄壁箱形梁剪力滞计算的梁段有限元法[J]. 湖南大学学报, 1991, 18(2): 33-38

[3] 罗旗帜. 计算曲线梁桥的传递矩阵法[J]. 中南公路工程, 1990(3): 32-41.

[4] 杜嘉斌. 连续薄壁曲线箱梁剪力滞分析及其试验研究[D]. 广州: 华南理工大学土木工程系, 2005.

[5] 吴业平, 赖远明, 朱元林, 等. 考虑剪力滞效应的薄壁曲线梁有限单元法[J]. 工程力学, 2002 19(4): 85-89.

[6] 钱寅泉, 倪元增. 曲线箱桥考虑剪力滞和畸变的弹性控制微分方程及其解法[J]. 铁道学报, 1992 12(3): 80-91

[7] 郑振, 林友勤. 弯箱梁挠曲扭转分析的刚度法[J]. 中国公路学报, 1999 12(4): 50-58

[8] 黄剑源. 薄壁结构的扭转分析: 曲线梁与斜支箱形梁[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1998

[9] NOOR A K, GRCEN W H, HARTLEY S J Non linear finite element analysis of curved beam[J]. Comput Methods Appl Mech Engng 1997 12(3): 288-308

[10] 钟新谷, 曾庆元. 加权残值法在钢筋混凝土拱桥非线性有限元分析中的应用[J]. 计算力学学报, 1999 14 (4): 470-477.

[11] 周文伟, 曾庆元. 空间曲梁几何非线性有限元法分析[J]. 长沙铁道学院学报, 1998 16 (3): 1-5

[12] 秦荣. 计算结构力学[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

Nonlinear Governing Equation of Curved Box Girder and Its Solution

CHEN Yu ji LUO Qi zhi

(Department of Civil Engineering and Architecture, Foshan Science and Technology University, Foshan 528000, China)

Abstract By means of the potential variational principle and the theory of thin-walled box girders, considering the influence of the shear lag effect of flange's stress and the large deflection, the geometry nonlinear governing differential equation of thin-walled box girders is obtained. The equation is solved with the least two-multiplication allotting point method. The results are consistent with those of the test and the segment method. The proposed formulae and method could be referenced to the design for the thin-walled box girders.

Key words curved box girder; nonlinear governing equation; spline function; shear lag effect