

# 变系数复合系统边界反馈镇定: Riesz 基方法<sup>\*</sup>

宗西举

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

**摘要:** 考虑一个航天控制实验室模型振动的边界反馈镇定问题。证明了具有变量系数的复合系统在边界控制作用下构成的闭环系统是一个 Riesz 系统, 即系统存在一系列广义特征函数构成状态空间的 Riesz 基。从而系统的谱决定的增长条件, 指数稳定性成立。并给出了特征值的渐近展开式。

**关键词:** 复合系统; 边界反馈系统; 杆振动方程; 稳定性

**中图分类号:** O231.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 05-0009-05

## 1 背景与引理

最近, 对于工程柔性系统的控制的研究倍受关注。工程柔性系统多见于大型空间构造物和高速机械手等方面。大型空间构造物一个原型例子就是航天器控制实验室模型 (SCOLE) [1-2]。SCOLE 模型是一个长弹性杆 (M), 振动方程由偏微分方程给出。弹性杆一端连接在航天器 (S) 上, 另一端连接天线反射镜 (A), S、A 这两个刚体都具有指定的惯性性质由常微分方程控制。实际工程上要求航天飞船在控制弹性杆的结构振动和运动的同时, 快速定位旋转使天线反射精确指向既定目标。文 [3] 用能量乘法证明了高阶反馈:

$$\dot{y} = k_1 y_{xxx}(1, t), \dot{y}_1 = -k_2 y_{xx}(1, t) \quad (k_1, k_2 > 0)$$

在光滑能量空间可使具有定常系数的 SCOLE 模型:

$$\begin{cases} y_{tt}(x, t) + y_{xxx}(x, t) = 0 \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0 \\ y_{tt}(1, t) - y_{xxx}(1, t) = y_1 \\ y_{xt}(1, t) + y_{xx}(1, t) = y_2 \end{cases}$$

指数能稳。文 [4] 运用 Riesz 基方法研究了边界反馈控制的具有定常系数的 SCOLE 模型的能稳性, 文 [5] 证明了在边界反馈控制  $\dot{y}_1(t) = -k y_{xx}(1, t)$ ,  $(k > 0)$  下, 具有变量系数的 SCOLE 模型是一个 Riesz 谱系统, 并得到了其能控性问题结果。受上述这些工作的启发, 本文研究在边界反馈控制  $\dot{y}_1(t) = k y_{xxx}(1, t)$  具有变量系数的 SCOLE 模型的振动:

$$\begin{cases} \rho(x) y_t(x, t) + (EI(x) y_{xx}(x, t))_x = 0 \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0 \\ m y_{tt}(1, t) - (EI(x) y_{xx}(x, t))_x(1, t) = k y_{xxx}(1, t) \\ J y_{xt}(1, t) + EI(1) y_{xx}(1, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

这里  $x$  表示杆上位置,  $t$  表示时间。贯穿全文, 用  $y_t$  (或  $\dot{y}$ ) 表示  $y$  对时间  $t$  求导, 用  $y_x$  (或  $y'$ ) 表示  $y$  对空间  $x$  求导。  $EI(x)$  是杆的弹性系数,  $\rho(x)$  表示杆在  $x$  点密度, 实际物理上要求  $\rho(x) > 0$ ,  $m$  是天线反射镜的质量,  $J$  表示天线反射镜的运动惯量。其它有关的物理描述可以参看文献 [6-9]。为了符合工程需要, 不妨假设  $\rho(x), EI(x) \in C[0, 1]$ , 而且  $E, I, \rho, m, J > 0$  取闭环系统 (1) 状态空间为:

$$H = H_1^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times C^3 \quad (2)$$

其中,  $H_1^2(0, 1) = \{f \in H^2(0, 1) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ 。  $H$  的范数由以下给出:  $\forall (f, g, \zeta, \eta) \in H, \|(f, g, \zeta, \eta)\|^2 = \int_0^1 [EI(x) |f'(x)|^2 + \rho(x) |g(x)|^2] dx + \frac{1}{m} |\zeta|^2 + \frac{1}{J} |\eta|^2$ , 定义算子  $A: D(A) \subset H \rightarrow H$  如下:

$$\begin{aligned} A(f, g, \zeta, \eta) = & \left( g - \frac{1}{\rho(x)} (EI(x) f'(x))', (EI f')'(1), \right. \\ & \left. -EI(1) f''(1), \eta \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} D(A) = & \left\{ (f, g, \zeta, \eta) \in (H_1^2 \cap H) \times H_1^2 \times C^3, \zeta = \right. \\ & \left. mg(1) - kf''(1), \eta = Jg'(1) \right\} \\ \text{令 } Y(t) = & (y(\cdot, t), y_t(\cdot, t), m y_{tt}(1, t) - k y_{xxx}(1, t), \\ & J y_{xt}(1, t)) \end{aligned}$$

\* 收稿日期: 2005-12-16

基金项目: 国家自然科学基金资助 (10371136)

作者简介: 宗西举 (1981 年生), 男, 博士生; 通讯联系人: 赵怡; E-mail: zongxiju@163.com

$Y_{xt}(1, \eta)$ , 闭环系统 (1) 可以改写成发展方程形式:

$$\frac{d}{dt} Y(\eta) = AY(\eta) \quad (4)$$

经过直接计算可以得到以下引理 1.

引理 1  $A^{-1}$  存在而且是  $H$  上的紧算子. 因此,  $A$  的谱集  $\sigma(A)$  只包含孤立的点谱.

证明 对任意的  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in H$  求解方程:

$$A \begin{pmatrix} y \\ g \\ \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ -\rho^{-1}(x)(E(x)y)'' \\ (E(x)y')'(1) \\ -E(x)y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

直接计算可得:

$$g = f_1, \zeta = m f_1(1) + \frac{k f_2}{E(1) + E'(1)}, \eta = J f_3(1),$$

$$y = - \int_0^x \int_0^s \frac{1}{E(\tau)} \int_\tau^1 \int_0^1 \rho(\theta) f_2(\theta) d\theta dv d\tau ds + \frac{f_4 x^2}{6[E(1) + E'(1)]} - \frac{[E(1)(F_4 + F_3) + E'(1)f_4] x^2}{2[E(1) + E'(1)]};$$

最后, 由 Sobolev 嵌入定理得  $A^{-1}$  的紧性.

## 2 谱的渐近分析

设  $\lambda \in \sigma(A)$  对应的特征函数为  $(\lambda^{-1}\phi, \phi, m\phi(1) - k\lambda^{-1}\phi'''(1), \lambda\phi'(1))$ , 其中  $\phi$  为以下方程的一个非零解:

$$\begin{cases} \lambda^2 \rho(x)\phi(x) + (E(x)\phi''(x))'' = 0 \\ \phi(0) = \phi'(0) = 0 \\ m\lambda^2 \phi(1) - (E\phi'')'(1) = \lambda k\phi'''(1) \\ \lambda^2 \phi'(1) + E(1)\phi''(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

同 [5] 的作法可以将上方方程写成一般形式

$$\begin{cases} \phi^{(4)}(x) + \frac{2E'(x)}{E(x)}\phi'''(x) + \frac{E''(x)}{E(x)}\phi''(x) + \frac{\lambda^2 \rho(x)}{E(x)}\phi(x) = 0 \\ \phi(0) = \phi'(0) = 0 \\ m\lambda^2 \phi(1) - (E\phi'')'(1) = \lambda k\phi'''(1) \\ \lambda^2 \phi'(1) + E(1)\phi''(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

取变换  $\phi(x) = f(z), z = \frac{1}{h_0} \int_0^x [\frac{\rho(\xi)}{E(\xi)}]^{1/4} d\xi, h = \int_0^1 [\frac{\rho(\xi)}{E(\xi)}]^{1/4} d\xi$  则  $f(z)$  满足

$$\begin{cases} f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z) + \lambda^2 h f(z) = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0 \\ m h \lambda^2 f(1) + b f''(1) + c f'(1) + b f(1) = 0 \\ J h \lambda^2 f(1) + E(1) \left\{ \left[ \frac{\rho(z)}{E(z)} \right]^{1/4} f'(1) + b f(1) \right\} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $b_i (i = 1, 2, 3, 4)$  是实数, 且  $b = -[E(1) + \lambda h [\frac{\rho(1)}{E(1)}]^{3/4}]$ ; 以及

$$\begin{cases} a(z) = \frac{3h}{2} \left[ \frac{\rho(1)}{E(1)} \right]^{-5/4} \frac{d}{dx} \frac{\rho(x)}{E(x)} + 2h \frac{E'(x)}{E(x)} \\ \left[ \frac{\rho(x)}{E(x)} \right]^{-1/4} \\ b(z) = b_i h \rho^{(i)}(x), E^{(i)}(x), i = 0, 1, 2 \\ c(z) = c_i h \rho^{(i)}(x), E^{(i)}(x), i = 0, 1, 2, 3 \\ \text{令 } f(z) = \exp\left\{-\frac{1}{4} \int_0^z a(\tau) d\tau\right\} g(z) \text{ 则 } g \text{ 满足:} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} g^{(4)}(z) + a_1(z)g'''(z) + a_2(z)g''(z) + a_3(z)g'(z) + \lambda^2 h g(z) = 0 \\ g(0) = g'(0) = 0 \\ m h \lambda^2 g(1) + a_1 g'''(1) + a_2 g''(1) + a_3 g'(1) + a_4 g(1) = 0 \\ J h \lambda^2 g'(1) + E(1) \left\{ \left[ \frac{\rho(1)}{E(1)} \right]^{1/4} g'(1) + a_1 g'(1) + a_2 g(1) \right\} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $a_i (i = 1, 2, j = 1, 2, 3)$  是实数, 且  $a = -\frac{3}{2} a'(z) - \frac{9}{16} a^2(z) - \frac{1}{2} a(z), a_2 = a_2(a(z), b(z), c(z), a^{(i)}(z)) (i = 0, 1, 2), a_3 = a_3(a(z), b(z), c(z), a^{(i)}(z)) (i = 0, 1, 2, 3)$ .

引理 2 若  $k \geq 0$  闭环系统 (1) 是耗散的, 则系统的特征值不会落在右半平面, 而且  $Y_{\text{ext}}(1, \eta) \in L^2(0, T)$ .

证明 闭环系统的能量为

$$E(\eta) = \frac{1}{2} \int_0^1 [E(x)y_{\text{ext}}(x, \eta) + \rho^{-1}(x)(E(x)y_{\text{ext}}(x, \eta))^2_{xx}(x, \eta)] dx + \frac{1}{2m} (E(1)y_{\text{ext}}(1, \eta) + \frac{1}{2} E(1)y_{\text{ext}}(1, \eta)) \quad (11)$$

直接计算得:  $\frac{d}{dt} E(\eta) = -\frac{k}{m} y_{\text{ext}}(1, \eta) \leq 0$  因此:

$$-\frac{k}{m} \int_0^T y_{\text{ext}}(1, \tau) d\tau = E(0) - E(\eta) \leq E(0),$$

即

$$y_{\text{ext}}(1, \eta) \in L^2(0, T) \quad (12)$$

引理 3<sup>[7]</sup> 由于特征值共轭出现，不妨设  $\frac{\pi}{2}$   
 $\leq \arg \lambda_n \leq \pi$ ，令  $\lambda_n = \frac{\rho_n^2}{R}$ ，则  $\frac{\pi}{4} \leq \arg \rho_n \leq \frac{\pi}{2}$ 。则对于  
充分大的  $\rho \in \left\{ \rho \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} \leq \arg \rho \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ ，(10) 式  
第一个方程有 4 个线性无关的解  $g_k(z)$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) 满足以下渐近展开：

$$g_k(z) = \exp(\rho \omega_k z) [1 + O(\rho^{-1})];$$
$$g_k'(z) = (\rho \omega_k) \exp(\rho \omega_k z) [1 + O(\rho^{-1})];$$
$$g_k''(z) = (\rho \omega_k)^2 \exp(\rho \omega_k z) [1 + O(\rho^{-1})];$$
$$g_k'''(z) = (\rho \omega_k)^3 \exp(\rho \omega_k z) [1 + O(\rho^{-1})]$$

其中， $\omega_1 = \exp(i\pi/4)$ ， $\omega_2 = \exp(\pi/4)$ ， $\omega_3 = -\omega_2$ ， $\omega_4 = -\omega_1$ 。

因此所有满足 (10) 式的边界条件的  $g(z) = \xi_1 g_1(z) + \xi_2 g_2(z) + \xi_3 g_3(z) + \xi_4 g_4(z)$  ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  不全为 0) 就是方程 (10) 的解。

可以得到以下关于  $A^1$  的谱的渐近展开：

引理 4<sup>[3]</sup>  $A^1$  的谱  $\{\lambda_n, \bar{\lambda}_n\}$  有以下渐近展开：  
对于足够大的整数  $n$

$$\lambda_n = \frac{\rho_n^2}{R}, \rho_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( n - \frac{1}{4} \right) \pi (1 + i) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(13)

方程 (10) 的解有以下的渐近表达式：

$$g_n(z) = \sin\left(n + \frac{\pi}{2}\right) z - \cos\left(n + \frac{\pi}{2}\right) z +$$
$$\exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] z -$$
$$(-1)^n \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] (1 - z) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(14)

$$\rho_n^{-2} g_n''(1) = i \left\{ \sin\left(n + \frac{\pi}{2}\right) z - \cos\left(n + \frac{\pi}{2}\right) z +$$
$$\exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] z +$$
$$(-1)^n \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] (1 - z) \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(15)

$$\rho_n^{-1} g_n'(1) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(16)

定理 1  $\lambda_n = \frac{\rho_n^2}{R}$  对应的方程 (6) 的解  $\phi_n$  有以下  
的渐近表达式：

$$\exp\left[\frac{1}{4} \int_0^z a(\tau) d\tau\right] \phi_n(x) = \sin\left(n + \frac{\pi}{2}\right) z -$$
$$\cos\left(n + \frac{\pi}{2}\right) z + \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] z -$$
$$(-1)^n \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] (1 - z) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(17)

$$\exp\left[\frac{1}{4} \int_0^z a(\tau) d\tau\right] \lambda_n^{-1} \phi_n(x) = i \sqrt{\frac{\rho(x)}{E(x)}}.$$
$$\left\{ \sin\left(n + \frac{\pi}{2}\right) z - \cos\left(n + \frac{\pi}{2}\right) z - \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] z \right.$$
$$\left. + (-1)^n \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] (1 - z) \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(18)

其中， $a(z)$  如前 (7) – (9) 式所述。而且特征函数  $\Phi_n = (\lambda^{-1} \phi, \phi, m\phi(1) - k^{-1} \phi'''(1), \beta'(1))$  是可以近似正规化的，即存在常数  $C_1, C_2 > 0$  使得  $C_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_n\|_H \leq C_2$ 。

### 3 Riesz基性质

Bar定理 设  $\{\varphi_n\}_1^\infty$  为  $H$  的 Riesz基，如果存在  $N > 0$  及  $A$  的广义特征向量  $\{\psi_n\}_{N+1}^\infty$  使得  $\sum_{n=1}^\infty \|\psi_n - \varphi_n\|^2 < \infty$ ，那么以下结论成立：

- (1) 存在常数  $M > N$  及  $A$  的广义特征向量列  $\{\psi_0\}_1^N$  使得  $\{\psi_0\}_1^M \cup \{\psi_n\}_{M+1}^\infty$  构成  $H$  的 Riesz基。
- (2) 设  $\{\psi_0\}_1^M \cup \{\psi_n\}_{M+1}^\infty$  对应于特征值  $\{\sigma_n\}_1^\infty = \sigma(A)$  而且  $\tau(A)$  以代数重数重复出现。
- (3) 存在一个  $M_0 > 0$  使  $\sigma_n \neq \sigma_m$  对  $\forall m, n > M_0$  成立，即  $\sigma_n$  为代数单的。因而  $A$  生成  $H$  上一个  $C_0$ -群  $T(t)$  而且对  $A$  生成  $C_0$  半群谱决定的增长条件成立。即：  $\omega_0(A) = S(A)$  其中  $\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}$ ， $S(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$ 。

为了利用 Bar定理，要构造一个离散的反自伴算子，使得其特征方程的主项与 (16) 式相同，从而将此算子的特征函数作为应用定理的参考基。考虑以下系统：

$$\begin{cases} \rho(x) Y_{tt}(x, t) + (E(x) Y_{xx}(x, t))_{xx} = 0 \\ Y(0, t) = Y_x(0, t) = 0 \\ m Y_t(1, t) - (E(x) Y_{xx})_x(1, t) = 0 \\ J Y_{xt}(1, t) + E(1) Y_{xx}(1, t) = 0 \end{cases}$$

(19)

此系统算子定义为  $A_t: D(A_t) \subset H \rightarrow H$ 。显然算子  $A_0$  是算子  $A$  在  $k=0$  时的特殊情况。所以对于足够大的  $n$  算子  $A_n$  的特征值  $\lambda_n$  的几何单的从而代数单的，对应的特征函数  $\Phi_n = (\lambda^{-1} \phi_n, \phi_n, m\phi_n(1) - k^{-1} \phi_n'''(1), \beta_n'(1))$  有如下的渐近展开：

$$\exp\left[\frac{1}{4} \int_0^z a(\tau) d\tau\right] \phi_n(x) = \sin\left(n + \frac{\pi}{2}\right) z -$$
$$\cos\left(n + \frac{\pi}{2}\right) z + \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] z -$$
$$(-1)^n \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] (1 - z) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(20)

$$\exp\left\{\frac{1}{4}\int_0^x a(\tau) d\tau\right\} \lambda_n^{-1} \phi_n(x) = i \sqrt{\frac{\rho(x)}{EI(x)}}.$$

$$\left\{ \sin\left(n+\frac{\pi}{2}\right) x - \cos\left(n+\frac{\pi}{2}\right) x \right\} \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right] + (-1)^n \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi(1-x)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(21)

而且  $A$  是反自伴的离散算子, 在  $H$  上具有紧的逆算子. 由泛函分析的知识可知,  $A$  的所有特征函数  $\Phi_n$  构成  $H$  的正交基, 特别地  $\Phi_n \cup \{\text{它们的共轭}\}$  构成  $H$  的正交的  $Riesz$  基,  $\Phi_n$  是可近似正规化的. 从而存在一个  $M > N$  使得

$$\sum_{n>M} \|\Phi_n - \Phi_n\|_H^2 = \sum_{n>M} O\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \quad (22)$$

于是利用 Bar 定理得到以下定理 2

定理 2 1) 存在  $A$  的广义特征函数构成  $H$  的  $Riesz$  基.

2) 式 (13) 为  $A$  的所有特征值的渐近展开式.

3) 所有充分大模的  $A$  的特征值均为代数单的. 所以, 对所有实数  $k > 0$  算子  $A$  生成  $H$  上的  $C_0$  群. 对算子  $A$  生成  $H$  上的  $C_0$  一半群  $e^{At}$ , 谱决定的增长条件成立: 即对任意的  $\varepsilon > 0$  存在  $M > 0$  使得  $\|e^{At}\| \leq M e^{\varepsilon(A+M)} t$ .

## 4 稳定性和能控性

由前一部分的讨论知: 谱决定的增长条件成立, 而且系统的特征值不会落在右半平面, 所以系统 (1) 指数稳定的充要条件是存在一个正数  $\omega > 0$  使得对任意的特征值  $\lambda \in \sigma(A)$  都有<sup>[3]</sup>:  $\operatorname{Re} \lambda < -\omega$ . 因此得到:

定理 3  $k > 0$  闭环系统 (1) 是指数稳定的.

证明 只需证明  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  就可. 在特征方程 (6) 的第一个式两端同时乘以  $\bar{\phi}$ , 在  $[0, 1]$  上对  $x$  积分, 由边界条件得到:

$$\lambda^2 \int_0^1 \rho(x) |\phi(x)|^2 dx + m\lambda^2 |\phi(1)|^2 - \lambda \bar{\phi}'''(1) \phi'''(1) \bar{\phi}(1) + \lambda^2 |\phi'(1)|^2 + \int_0^1 EI(x) |\phi''(x)|^2 dx = 0$$

又  $\phi$  的共轭函数  $\bar{\phi}$  同样满足特征方程 (6) 的第一个式, 用  $\phi$  去乘方程 (6) 的第一个式两端并在  $[0, 1]$  上对  $x$  积分, 由边界条件得到:

$$\lambda^2 \int_0^1 \rho(x) |\phi(x)|^2 dx + m\lambda^2 |\phi(1)|^2 - \lambda \bar{\phi}'''(1) \phi'''(1) + \lambda^2 |\phi'(1)|^2 + \int_0^1 EI(x) |\phi''(x)|^2 dx = 0$$

则  $\bar{\phi}'''(1) \phi'''(1) = \phi'''(1) \bar{\phi}'(1)$ , 即  $\bar{\phi}'(1) \phi'''(1)$  为实数. 假设  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ,  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega \neq 0$  是实数, 则:

$$-\omega^2 \int_0^1 \rho(x) |\phi(x)|^2 dx - m\omega^2 |\phi(1)|^2 - \omega \bar{\phi}'''(1) \phi'''(1) - \omega^2 |\phi'(1)|^2 + \int_0^1 EI(x) |\phi''(x)|^2 dx = 0$$

比较上式的实部和虚部可以得到:

$$-\omega^2 \int_0^1 \rho(x) |\phi(x)|^2 dx - m\omega^2 |\phi(1)|^2 - \omega^2 |\phi'(1)|^2 + \int_0^1 EI(x) |\phi''(x)|^2 dx = 0$$

$$\text{即: } -\omega^2 \int_0^1 \rho(x) |\phi(x)|^2 dx - m\omega^2 |\phi(1)|^2 -$$

$$\omega \bar{\phi}'''(1) \phi'''(1) - \omega^2 |\phi'(1)|^2 + \int_0^1 EI(x) |\phi''(x)|^2 dx = 0$$

则  $\omega = 0$  这与  $\omega \neq 0$  矛盾. 所以  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ .

现在考虑系统的能控性. 为此目的, 令  $Y(t) = (y_1^T, y_2^T, y_3^T, y_4^T, y_5^T, y_6^T)^T$ , 系统可以改写成:

$$\frac{d}{dt} Y(t) = A Y(t) + b u(t)$$

$$b = (0, 0, 1, 0) \in H, Y(0) = Y_0 \quad (23)$$

根据文献 [10] 的定理 4.2.3 知, 对于任意的  $T > 0$  系统 (23) 在  $H$  中是近似能控的, 而总不是精确能控的. 也就是说, 因为控制算子  $B \in \mathcal{L}(U, H)$  是从控制函数空间  $C$  到  $H$  的紧算子, 因而系统 (23) 在  $H$  中总不是精确能控的.

由于  $A$  的特征值是代数单的, 且对应的特征函数  $\Phi_n = (\lambda^{-1} \phi_n, \phi_n, m\phi_n(1), \phi_n'(1))^T$  满足  $\langle b, \Phi_n \rangle_{H \times H} = m\phi_n(1) \neq 0$ . 因而系统 (23) 在  $H$  中是近似能控的.

参考文献:

- [1] 张玉峰, 姚翠珍, 郭宝珠. 复合弹性系统边界反馈控制的  $Riesz$  基本方法 [J]. 应用泛函分析, 2000, 2(1): 85—94
- [2] RAO B P. Uniform Stabilization of a Hybrid System of Elasticity [J]. SIAM J of Control and Optimization, 1995, 33(1): 440—454
- [3] MOROGU L. Orientation and stabilization of a Flexible Beam Attached to a Rigid Body Planar Motion [J]. IEEE Trans Automat Contr, 1991, 36(8): 953—962
- [4] 宋谦, 郭宝珠. 负载 Cartesian 柔性臂非线性反馈控制 [J]. 控制理论与应用, 1995, 12(6): 673—680
- [5] GUO B Z. On the Boundary Control of a Hybrid system (下转第 16 页)

- [5] SUN Zhen-dong GE Shu-zhi \$ Switched Linear Systems [M]. London: Springer-Verlag Limited 2005
- [6] 段广仁. 线性系统理论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1996
- [7] RUGH W J Linear Systems Theory [M]. NJ: Prentice-Hall Englewood Cliffs 1993
- [8] CHEN C T Linear Systems Theory and Design [M]. New York: Holt Rinehart and Winston 1984

## The Controllability and Observability of Time-varying Switched System

SUN Wei ZHAO Yi HUANG Yu

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** Different from the Lie algebra method, the common Lyapunov function method, the differential geometry method and the invariant space method for the study of the time-invariant switched systems, a new method is obtained. The known results are all about the time-invariant system, while the condition about the time-varying case has not been concerned yet. The time-varying switched system as the following form is studied

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x + B_{\sigma(t)} u, \quad t \in [0, T]$$

A series of controllable matrixes based on the switching sequence and the rank condition of them are presented. Some necessary and sufficient conditions about the controllability and observability are presented.

**Key words:** switched system; controllability; observability

(上接第 12 页)

- with Variable coefficients [J]. J of Option Theory and Applications 2002, 114(2): 373—395
- [6] GUO B Z, SONG Q. Tracking Control of a Flexible Beam by Nonlinear Boundary Feedback [J]. J of Applied Mathematics and Stochastic Analysis 1995, 8(1): 47—58
- [7] GUO B Z. Riesz Basis Property and Exponential Stability of Controlled Euler-Bernoulli Beam Equations with Variable Coefficients [J]. SIAM Journal on Control and Optimization 2002, 40(6): 1905—1923
- [8] LIJIMAN W, MARKUS L. Exact Boundary Controllability of Hybrid System of Elasticity [J]. Arch Rational Mech Anal 1988, 103(1): 193—236
- [9] LIJIMAN W, MARKUS L. Stabilization of a Hybrid System of Elasticity by Feedback Boundary Damping [J]. Ann Mat Pura Appl 1988, 152(1): 281—330
- [10] CURTAIN R F, ZWARTH J. An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory [M]. New York: Springer-Verlag 1995

## On the Boundary Feedback Control of the Hybrid System with Variable Coefficients: Riesz Base Approach

ZONG Xi-ju

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** A model of the spacecraft control laboratory experiment (SCOLE) with variable coefficients is considered. It is shown that the closed-loop system under shear force boundary control of the form  $u(t) = k y_{xxx}(1, t)$  has a sequence of generalized eigen functions, which form a Riesz basis for the state Hilbert space. Therefore, the spectrum-determined growth condition holds. The exponential stability and an asymptotic expansion of spectrum are obtained.

**Key words:** hybrid system; boundary feedback control; beam equation; stability