

2+1 维 SU(3) 格点纯规范场真空波函数的收敛性^{*}

惠 萍

(广东教育学院物理系, 广东 广州 510303)

摘 要: 分别采用相连重叠图、相连空心图方法展开波函数, 研究 2+1 维 SU(3) 格点规范场真空波函数的收敛性. 采用无规相近似方法, 引入小 Wilson 圈图的平均值, 应用 Feynman 定理获得封闭方程组. 计算结果表明: 用相连空心图方法所得到的 2+1 维 SU(3) 格点规范场的真空波函数 μ_0 和 μ_2 的标度行为和收敛性更好.

关键词: 格点规范场; 无规相近似方法; 真空波函数

中图分类号: O572.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 05-0034-03

自格点规范理论成为人们研究规范场非微扰效应的一种重要方法以来, 人们对真空态的研究已经作了大量十分有意义的工作. 1980 年 J.P. GREENSITE^[1] 导出格点规范理论真空态的薛定谔本征值方程, 人们试图直接从此方程求解真空态, 从而引入了各种近似方法, 文献 [2] 在 GREENSITE 工作的基础上发展了一种按连续极限截断本征值方程的方法研究格点规范场, 应用这种方法得到了一些很有意义的成果^[2-5]. 但高阶计算困难很大, 更难推广到 2+1 维 SU(3) 格点规范场的高阶计算中. 文献 [6] 在连续极限截断的本征值方程方法的基础上发展了无规相近似 (RPA) 方法, 研究格点规范场 2+1 维 SU(2) 真空波函数和 2+1 维 SU(3) 胶球质量, 将 2+1 维 SU(2) 真空波函数的计算推广到七阶^[7]. 由于 Wilson 圈图越复杂计算就越烦琐, 用这种方法对 2+1 维 SU(2) 格点规范场研究的较多, 而对 2+1 维 SU(3) 格点规范场研究的较少. 本文采用 RPA 方法, 选相连空心图和相连重叠图的线性组合作为波函数, 讨论 2+1 维 SU(3) 格点规范场真空波函数的收敛性.

1 连续极限截断的本征值方程的方法

真空态的长波行为由下面的波函数表示^[1]

$$\psi(A) = \exp\left[-\mu \int d^2x \text{tr}(F_{ij})^2\right] \quad (1)$$

其中 A 表示连续时空中的规范势, F_{ij} 表示相应的规范场. 在格点上, 真空波函数应表示为^[1]

$$\psi(U) = \exp\left[\mu \sum \text{tr}(U_p + U_p^\dagger)\right] \quad (2)$$

上式在连续极限下可以展开为

$$\psi_0(U) = \exp\left\{-\mu_0 \int d^2x \text{tr} F^2(x) - \mu_2 \int d^2x \text{tr}[DF(x)]^2 + \text{高阶项}\right\} \quad (3)$$

其中 μ_0 和 μ_2 就是本文要计算的物理量. 设 a 为格距, g 为无量纲的耦合常数, e 为不变荷, 则 g 和 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$. 2+1 维格点规范理论是超可重整化的, 在 $1/g^2 \rightarrow \infty$ 的弱耦合区, 有标度行为

$$\mu_0 e^2 \rightarrow \text{const} \quad \mu_2 e^6 \rightarrow \text{const} \quad (4)$$

在截断的本征值方法中, 真空波函数可以表示为 $|\psi_0\rangle = \exp[R(U)] |0\rangle$, $R(U)$ 是 Wilson 圈图, 态 $|0\rangle$ 的定义为 $E_l^\alpha |0\rangle = 0$, E_l^α 是 l 链上的“色电”场强. Kogut Susskind 哈密顿量为

$$H = \frac{g^2}{2\alpha} \sum_k E_l^\alpha E_l^\alpha - \frac{1}{ag^2} \sum_P \text{tr}(U_p + U_p^\dagger - 2) \quad (5)$$

由本征值方程 $H |\psi_0\rangle = \epsilon_0 |\psi_0\rangle$ 可以得到真空波函数满足的薛定谔本征值方程是

$$\sum_k \{E_l^\alpha, [E_l^\alpha, R(U)]\} + [E_l^\alpha, R(U)] \cdot [E_l^\alpha, R(U)]\} - \frac{2}{g^4} \sum_P \text{tr}(U_p + U_p^\dagger) = \frac{2\alpha}{g} \epsilon_0 \quad (6)$$

真空能量 $w_0 = \frac{2\alpha}{g} \epsilon_0$, (6) 式的 Wilson 圈图按各

阶展开为 $R(U) = \sum_i R_i(U)$, $R_i(U)$ 是由图 1 中的相连图的线性组合构成. 图 2 是本文后面叙述中所涉及到的图形. 在文中出现的图 1 和图 2 中所有图形, 都将由其前面的代码代替. 由于真空态应具有对称性, 每一阶 $R_i(U)$ 都是由相应的对称图形构成的, 例如 $R_1 = c_1 [G_{11} + G_{11}^\dagger] = c_1 G_{11} + h.c.$

* 收稿日期: 2006 04 01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10574163); 广东教育学院教授博士专项科研经费资助项目

作者简介: 惠萍 (1962 年生), 女, 教授. E-mail: huiping519@tom.com

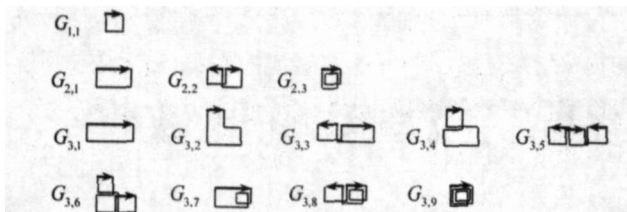


图 1 一至三阶独立相连图

Fig 1 From first to third order graphs

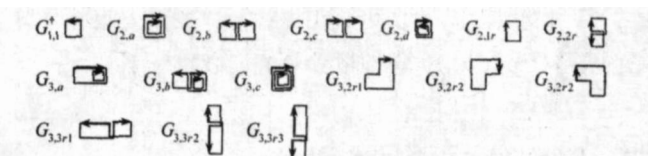


图 2 本文叙述中所涉及到的图形

Fig2 The graphs used in this paper

计算过程中出现的 $n+n$ 阶图 R_{n+n} 是由方程 (6) 中的 $[E, R_n]$ $[E, R_n']$ 项产生. 方程 (6) 截断到 N 阶时变为

$$\sum_{n=1}^N \sum_k [E_l^\alpha, [E_l^\alpha, R_n]] + \sum_{n+n \leq N} \sum_k [E_l^\alpha, R_n] [E_l^\alpha, R_n'] - \frac{2}{g} \sum_P \text{tr}(U_P + U_P^+) = \text{const} \quad (7)$$

2 SU (3) 群的么模条件

在方程 (7) 式的计算过程中会产生一些相关的图形, 必须用么模条件将不独立图用独立图代换, SU (3) 群么模条件为

$$U_{ij} U_{kl} U_{mn} \epsilon_{jkl} = \epsilon_{imn} \quad (8)$$

其中 U 为任意群元. 在三阶计算中, 由么模条件 (8) 可以得到下列变换:

$$(tU)^2 = tU^2 + 2U^+ \quad (9)$$

$$tU V tU = tU^2 V - tU^+ V + tU^+ tU \quad (10)$$

由于 Wilson 圈图变化多样, 获得封闭方程组仅仅利用么模条件是不够的, 对计算过程中出现的不相连多图组态, 按照 RPA 方法, 将其中较小的图取平均值, 保留较大的图, 这种近似不影响胶球质量的计算^[9].

3 无规相近似计算

下面分别采用相连重叠图和相连空心图展开波函数, 计算 2+1 维 SU (3) 格点规范场真空波函数 μ_0 和 μ_2 并讨论其收敛行为.

3.1 相连重叠图方案

设波函数由相连重叠图线性组合而成

$$R_1 = c_1 G_{1,1} + h.c \quad (11)$$

$$R_2 = b_1 G_{2,1} + b_2 G_{2,2} + b_3 G_{2,3} + h.c \quad (12)$$

$$R_3 = d_1 G_{3,1} + d_2 G_{3,2} + d_3 G_{3,3} + d_4 G_{3,4} + d_5 G_{3,5} + d_6 G_{3,6} + d_7 G_{3,7} + d_8 G_{3,8} + d_9 G_{3,9} + h.c \quad (13)$$

将 (11) - (13) 代入 (7) 式计算过程如下 (以二阶图计算为例):

$$[E, G_{1,1}] [E, G_{1,1}] = \frac{1}{2} [-4G_{2,1} + 4G_{2,3}] \quad (14)$$

$$[E, G_{1,1}] [E, G_{1,1}^+] = \frac{1}{2} [2G_{2,2} + h.c] - 12 \quad (15)$$

由 (14) 和 (15) 式得

$$[E, G_{1,1} + h.c] [E, G_{1,1} + h.c] = \frac{1}{2} [-4G_{2,1} + 4G_{2,2} + 4G_{2,3}] + h.c - 12 \quad (16)$$

用同样方法可以进行三阶图的计算. 为了保证方程组的封闭性, 对于不相连图的重叠非线性组态, 利用么模条件将其换成相连图. 对于不相连非重叠图的非线性组态, 用 RPA 方法进行近似处理, 例如: $G_{2,c} \approx G_{1,1} < G_{1,1} >$, $G_{2,d} \approx G_{1,1} < G_{1,1}^+ >$, $< G_{1,1}^+ > \approx < G_{1,1} >$. 设哈密顿量 $H' = H + c_1 [G_{1,1} + h.c]$, c_1 为变分参数, 由 Feynman 定理^[8]得

$$\begin{aligned} \langle G_{1,1} \rangle &= \frac{\partial w_0}{\partial c_1} \Big|_{c'=0} = -12c_0 \frac{\partial c_1}{\partial c_1} \Big|_{c'=0} \\ w_0' &= w_0 = -12c_1^2 \end{aligned} \quad (17)$$

这样可得到 14 条方程组成封闭的代数方程组 (略), 解方程组得到 μ_0 和 μ_2 的结果如图 3 (圆圈) 所示:

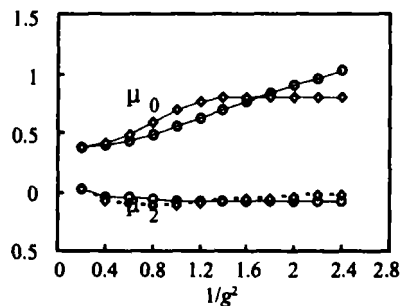


图 3 圆圈对应相连重叠图方案, 菱形对应相连空心图方案

Fig. 3 The circles correspond to the results by methods of connected graphs and the diamonds correspond to results by methods of hollow graphs

从图 3 看到, μ_0 随着 $1/g^2$ 的增加而单调上升, 表现出发散行为, 说明用这种方法在弱耦合区获得 (4) 式所期望的标度行为是困难的.

3.2 相连空心图方案

在 2+1 维 SU (2) 真空波函数的计算中发现

采用空心图可以改善真空波函数的标度行为, 将这种方法推广到 2+1 维 SU(3) 真空波函数的计算中, 设波函数的线性组合全部是相连空心图:

$$R_1 = c_1 G_{1,1} + h.c \quad (18)$$

$$R_2 = b_1 G_{2,1} + b_2 G_{2,2} + h.c \quad (19)$$

$$R_3 = d_1 G_{3,1} + d_2 G_{3,2} + d_3 G_{3,3} + d_4 G_{3,4} + d_5 G_{3,5} + d_6 G_{3,6} + h.c \quad (20)$$

对于计算中遇到的相连重叠图如 $G_{2,3}G_{3,7} - G_{3,9}$, 首先用么模条件将其换成非相连重叠图 $G_{2,a} - G_{2,d}$, $G_{3,a} - G_{3,e}$, 然后用 RPA 方法将三阶非相连重叠图做近似处理: $G_{3,a} \approx G_{2,1} \langle G_{1,1} \rangle$, $G_{3,b} \approx G_{2,2} \langle G_{1,1} \rangle$, $G_{3,c} \approx G_{2,3} \langle G_{1,1} \rangle$ 。在方程 (7) 的计算过程中, 要注意考虑空心图的变位的方式, 例如: $G_{2,1} \rightarrow [G_{2,1} + G_{2,1r}] \quad \Delta \quad G_{2,2} \rightarrow [G_{2,2} + G_{2,2r}] \quad \Delta \quad G_{3,2} \rightarrow [G_{3,2} + G_{3,2r1} + G_{3,2r2} + G_{3,2r3}] \quad \Delta \quad G_{3,3} \rightarrow [G_{3,3} + G_{3,3r1} + G_{3,3r2} + G_{3,3r3}] \quad \Delta$ 余此类推。再利用 Feynman 定理可获得的 10 条独立方程, 解得三阶真空波函数的如图 3 (菱形) 所示, μ_0 和 μ_2 在弱耦合区出现了较好的标度行为, 在 $1/g^2 > 1.2$ 弱耦合区时, 基本趋于常数 ($\mu_0 = 0.80 \pm 0.01$)。

4 讨 论

计算结果表明: 两种方案中, 采用相连空心图方案使 2+1 维 SU(3) LGT 的真空波函数有更好的标度行为, 在弱耦合区趋于常数。此方法可以推广到 3+1 维 SU(3) LGT 的计算中去。无论是选相连空心图, 还是选相连重叠图的线性组合作为波函数都是合理的方案, 上述每一个方案内的图都是相互独立的。在截断到三阶的计算过程中, 所有的独立图都被考虑在计算中。计算结果对图的选择的依赖性较强, 这是由于本文用截断本征值方程的方

法只计算到较低的阶数 (三阶), 但随着截断阶数的提高, 波函数展开的完备性也提高, 这种依赖性应该变小。这种判断是否正确有待于进一步研究, 在这里展示给同行们讨论。本文认为选相连空心图的方案更好。

参考文献:

- [1] GREENSITE J P. Large-scale vacuum structure and new calculational techniques in lattice SU(N) gauge theory [J]. Nucl Phys 1980 B166: 113.
- [2] GUO S H, CHEN Q Z, LI L. Analytic calculation of the vacuum wave function for (2+1) dimensional SU(2) lattice gauge theory [J]. Phys Rev (D), 1994, 49(1): 507.
- [3] LUO X Q, CHEN Q Z. Estimate for the 0++ Glueball Mass in QCD [J]. Mod Phys Lett A 1996 11: 2435.
- [4] LUO X Q, CHEN Q Z, GUO S H, et al. Glueball Mass in quantum chromodynamics [J]. Nucl Phys B (Proc Suppl), 1997, 53: 243.
- [5] LUO X Q, GUO S H, KROGER H, et al. Improved lattice gauge field Hamiltonian [J]. Phys Rev D 1999, 59: 034503.
- [6] HUI P, FANG X Y, CHEN Q Z. Approximated fourth order calculation of the vacuum wave function of (2+1) dimensional SU(3) lattice gauge theory [J]. Phys Rev (D), 2000, 62: 034505.
- [7] HUI P, SHI T Y, FANG X Y. Approximated seventh order calculation of the vacuum wave function of (2+1) dimensional SU(2) lattice gauge theory [J]. Phys Rev (D), 2005, 72: 054505.
- [8] 曾谨言. 量子力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1997: 290.

Convergent Behaviors of Vacuum Wave Function in 2+1-D SU(3) LGT

HUI Ping

(Department of Physics, Guangdong Education Institute, Guangzhou 510303, China)

Abstract The methods of connected overlapped Wilson graphs and connected hollow Wilson graphs are adopted respectively to investigate convergent behaviors of vacuum wave function in 2+1-D SU(3) lattice gauge theory. The average of small Wilson graphs is introduced in the random phase approximation (RPA) method, and Feynman theorem is utilized to obtain closed equation group. The results show that the method of connected hollow Wilson graphs is the better one to obtain good scaling behavior and good convergent behavior of vacuum wave function μ_0 and μ_2 in 2+1-D SU(3) lattice gauge theory.

Key words lattice gauge theory; random phase approximation method; vacuum wave function