

时变切换系统的能控与能观^{*}

孙 伟, 赵 怡, 黄 煜

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 区别于已有 Lie 代数方法, Lyapunov 方法, 微分几何方法及不变空间方法, 关于定常系统的研究, 提出了一种新的方法。从另外一个角度研究形如 $\dot{x} = A_{\sigma}(t)x + B_{\sigma}(t)u$, $t \in [t_0, T]$ 的时变切换系统, 通过先构造基于给定的切换序列的一系列能控矩阵及其秩条件来研究原切换系统, 给出了能控以及能观的一些充分性与必要性条件。

关键词: 切换系统; 能控; 能稳

中图分类号: TP271 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 05-0013-04

1 研究背景

由于切换控制系统大量存在于工程技术和社会科学领域中, 所以有关这类系统的分析与控制问题已引起广泛关注^[1]。而且在诸如切换系统的能达、能稳、控制器及最优控制等许多问题上^[2], 都已取得重要进展。近年来在切换系统能稳、能控性问题的研究方面涌现出一批优秀的研究成果^[3], 例如能观性的判定条件。已有文献严格定义了一般线性切换系统的能控性并利用能达集概念给出能控性和能达性的充要条件。关于离散线性切换系统的能控、能达问题的研究^[4], 近年来也有一些结果^[5]。

本文研究在给定的切换下, SIVS (时变切换系统) 系统的能控能稳性问题^[6-8], 区别于以往的方法, 本文提出了能控矩阵的方法。

1.1 定义与引理

本文考虑由下式给出的时变切换系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\sigma}(t)x + B_{\sigma}(t)u, & t \in [t_0, T] \\ y(t) = C_{\sigma}(t)x + D_{\sigma}(t)u \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 是状态变量, $A_{\sigma}(t)$ 和 $B_{\sigma}(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵, $u(t) \in R^m$ 是系统输入, $\sigma: R^+ \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ 是要被设计的切换序列, 若 $\sigma(t) = i$ 表明要选择子系统 (A_i, B_i) , $i = 1, 2, \dots, N$ 。对系统 (1), 一个切换序列就是表明整个系统怎样由各个子系统合成的。

1.2 预备知识

定义 1 (切换序列) 对于切换系统 (1) 来

讲, 切换序列是一对有限集

$$V = \{(i_1, h_1), (i_2, h_2), \dots, ((i_M, h_M))\}$$

其中, $M \in N$ 是切换序列 V 的长度, $i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $j = 1, 2, \dots, M$ 是第 j ($j = 1, 2, \dots, M$) 个实现的子系统的序号, h_j ($0 < h_j < T - t_0$) 是第 j ($j = 1, 2, \dots, M$) 个子系统所实现的时间。为表示方便, 记 $t = t_0 + \sum_{j=1}^j h_j$, $j = 1, 2, \dots, M$ 。

定义 2 (状态能控)^[2] 一个非零状态 $x_0 \in R^n$ 是能控的, 如果可以找到一个序列 $V = \{(i_1, h_1), \dots, (i_M, h_M)$ 和一个分段连续的输入 $u(t)$ ($t \in [t_0, T]$), 使得 $x(t_0) = x_0$, $x(T) = 0$, 其中 $T - t_0 = \sum_{j=1}^M h_j$ 。

定义 3 (系统能控)^[4-5] 系统 (1) 被称为系统能控, 如果对任何非零状态 $x_0 \in R^n$ 都是能控的。

引理 1 对任一给定的切换序列 $V = \{(i_1, h_1), \dots, (i_M, h_M)$, 系统 (1) 在 $t \in [t_{n-1}, t_n]$ ($n = 1, \dots, M$) 上的一般解为

$$\begin{aligned} x(t) = & \Phi_{i_n}(t, t_{n-1})\Phi_{i_{n-1}}(t_{n-1}, t_{n-2})\dots\Phi_{i_1}(t_1, t_0)x_0 \\ & + \Phi_{i_n}(t, t_{n-1})\Phi_{i_{n-1}}(t_{n-1}, t_{n-2})\dots\Phi_{i_2}(t_2, t_1) \cdot \\ & \int_{t_1}^t \Phi_{i_1}(t_1, s)B_{i_1}(s)u_1(s)ds + \\ & \Phi_{i_n}(t, t_{n-1})\Phi_{i_{n-1}}(t_{n-1}, t_{n-2})\dots\Phi_{i_3}(t_3, t_2) \cdot \\ & \int_{t_2}^{t_1} \Phi_{i_2}(t_2, s)B_{i_2}(s)u_2(s)ds + \dots + \\ & \Phi_{i_n}(t, t_{n-1}) \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \Phi_{i_{n-1}}(t_{n-1}, s)B_{i_{n-1}}(s)u_{n-1}(s)ds + \end{aligned}$$

* 收稿日期: 2005-10-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371136)

作者简介: 孙伟 (1980年生), 女, 博士生; 通讯联系人: 赵怡, E-mail: vsun_2006@163.com

$$\int_{t_{j-1}}^t \Phi_{ij}(t, s) B_{ij}(s) u_j(s) ds \quad (3)$$

其中, $\Phi_{ij}(t, s) (j=1, 2, \dots, M)$ 是系统 $\dot{x} = A_j x(t) + B_j u(t)$ 的系统转移矩阵, $u_j(t) |_{t_{j-1}}^{t_j} = u_j(t)$.

证明 给定的切换序列 $v = \{(i, h_j)\}_{j=1, 2, \dots, M}$, 在 $[t_0, t_1]$ 上系统 (1) 为 $\dot{x} = A_1 x(t) + B_1 u(t)$, 可以得到它的解为

$$x(t) = \Phi_1(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_1(t, s) B_1(s) u_1(s) ds \quad t \in [t_0, t_1]$$

代入 $t = t_1$ 得到

$$x(t_1) = \Phi_1(t_1, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_1(t_1, s) B_1(s) u_1(s) ds$$

同理, 对任意的 $t \in [t_1, t_2]$ 有

$$x(t) = \Phi_2(t, t_1) x(t_1) + \int_{t_1}^t \Phi_2(t, s) B_2(s) u_2(s) ds \quad t \in [t_1, t_2]$$

一直重复这个过程, 就可推导出 (3) 式。

推论 1 如果引理 1 中系数矩阵和 $A_j(t)$ 和 $B_j(t)$ 为常矩阵, 则

$$x(t) = \prod_{j=M}^1 \exp(A_{i_j}, t_{j-1}) x_0 + \sum_{j=1}^M \left(\prod_{i=j+1}^M \exp(A_{i_i}, t_{i-1}) \right) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \exp(A_{i_j}(t - s)) B_{ij} u_j(s) ds$$

证明 略。

2 能控性

现在考虑系统 (1) 在给定切换序下的能控性, 为方便, 不妨定义下列 $M \times n$ 矩阵

$$W_{j-1} = W(t_{j-1}, t) =$$

$$\int_{t_{j-1}}^t \Phi_{ij}(t, s) B_{ij}(s) B_{ij}^T(s) \Phi_{ij}^T(t, s) ds \quad j=1, \dots, M-1$$

$$W_{M-1} = W(t_{M-1}, t) =$$

$$\int_{t_{M-1}}^t \Phi_{i_M}(t, s) B_{i_M}(s) B_{i_M}^T(s) \Phi_{i_M}^T(t, s) ds$$

其中, $\Phi_{ij}(t, s) (j=1, 2, \dots, M)$ 是系统 $\dot{x} = A_j x(t) + B_j u(t)$ 的系统转移矩阵。

定理 1 若切换系统在切换列 $v = \{(i, h_j)\}_{j=1, 2, \dots, M}$ 下存在至少一个矩阵 $W_i (i \in \{0, 1, \dots, M-1\})$ 使得 $\text{rank}(W_i) = n$, 且系数矩阵 $B_j(t)$ 及其基解矩阵 $\Phi_{ij}(t, s) (j=1, 2, \dots, M)$ 满足交换条件, 则切换系统在 $[t_0, t_1]$ 上能控, 其中 $t_1 > t_0$ 。

证明 由假设知道存在 $i \in \{0, 1, \dots, N\}$, 使得 $\text{rank}(W_i) = n$, 对于所定的切换列 $v = \{(i, h_j)\}_{j=1, 2, \dots, M}$ 下, 令

$$W_{j-1} = W(t_{j-1}, t) =$$

$$\int_{t_{j-1}}^t \Phi_{ij}(t, s) B_{ij}(s) B_{ij}^T(s) \Phi_{ij}^T(t, s) ds \quad j=1, \dots, M-1$$

$$W_{M-1} = W(t_{M-1}, t) =$$

$$\int_{t_{M-1}}^t \Phi_{i_M}(t, s) B_{i_M}(s) B_{i_M}^T(s) \Phi_{i_M}^T(t, s) ds$$

其中, $t \in [t_{M-1}, t_1]$ 。那么选择分段连续函数 $u(t) (t \in [t_0, t_1])$ 作为系统输入, 我们不妨取

$$u(t) = \begin{cases} U_1 B_{i_1}^T(t) \Phi_{i_1}^T(t_1, t) W^{-1}(t_1, t) x_0 & t \in [t_1, t_2] \\ 0 & t \in [t_0, t_1] - [t_1, t_2] \end{cases}$$

其中, $U_1 = \Phi_{i_1}(t_1, t_1) \Phi_{i_1}(t_1, t_2) \dots \Phi_{i_1}(t_1, t_0)$ 。将 $u(t)$ 代入 (3) 式得到

$$x(t) = \Phi_{i_M}(t, t_{M-1}) \Phi_{i_{M-1}}(t_{M-1}, t_{M-2}) \dots \Phi_{i_1}(t_1, t_0) x_0 + \Phi_{i_M}(t, t_{M-1}) \Phi_{i_{M-1}}(t_{M-1}, t_{M-2}) \dots \Phi_{i_1}(t_1, t_0) \int_{t_1}^t \Phi_{i_1}(t, s) B_{i_1}(s) (-\Phi_{i_1}(t, t_1) \dots \Phi_{i_1}(t, t_0)) B_{i_1}^T(t_1, s) \Phi_{i_1}^T(t_1, s) W^{-1}(t_1, t) x_0 ds = 0$$

这意味着系统能控。

例: 考虑下列的切换系统

$$\dot{x} = A_{i_j} x(t) + B_{i_j} u(t) \quad (t \in [t_{j-1}, t_j])$$

假如取切换 $v = \{(1, 1), (2, 9)\}$, 即:

$$\dot{x} = A_1 x(t) + B_1 u(t) \quad (t \in [t_0, t_1])$$

$$\dot{x} = A_2 x(t) + B_2 u(t) \quad (t \in [t_1, t_2])$$

容易验证系数矩阵 $B_i(t)$ 及其基解矩阵 $\Phi_{ij}(t, s) (i=1, 2)$ 满足交换条件, 且 $W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 6 & 71 \end{bmatrix}$, $\text{rank} W_0$

$$= 2, W_0 \text{ 可逆, 根据定理 1, 存在 } u(t), \text{ 使得 } x(t_0) = 0, \text{ 因此, 系统能控。}$$

定理 2 若系统 (1) 在 $[t_0, t_1]$ 上能控, 则 $\text{rank}(W_0, W_1, \dots, W_{M-1}) = n$ 。其中, $W_i (i=0, \dots, M-1)$ 的定义如上。

证明 反证法。

设系统 (1) 在 $[t_0, t_1]$ 上能控, 却有 $\text{rank}(W_0, W_1, \dots, W_{M-1}) < n$, 则存在一个非零向量 x_0 , 使得

$$\begin{aligned} x_0^T \text{rank}(W_0, W_1, \dots, W_{M-1}) x_0 &= 0 \\ \text{则有 } x_0^T W_j x_0 &= 0 \quad (j=0, 1, \dots, M-1) \\ 0 &= x_0^T W_j x_0 = \end{aligned}$$

$$\int_{t_{j-1}}^t x_0^T \Phi_{ij}(t, s) B_{ij}(s) B_{ij}^T(s) \Phi_{ij}^T(t, s) x_0 ds$$

由于上式最右端是非负连续函数, 则 $x_0^T \Phi_{ij}(t, s) B_{ij}(s) = 0$ 。

由于切换系统在 $[t_0, t_1]$ 上能控, 选择 $x_0 = x$ 可以找到分段连续输入 $u(t)$ 代入 (3) 式, 使得 $x(t) = 0$ 令

$\Phi = \Phi_{i_j}(\tau, \tau_1)\Phi_{i_{j-1}}(\tau_1, \tau_2)\dots\Phi_{i_1}(\tau_1, \tau_0)x_\alpha$

两边同时左乘以 Φ^{-1} , 整理后得到

$$-\dot{x}_\alpha^T x_\alpha = \Phi_{i_1}^{-1}(\tau, \tau_0) \cdot$$
$$\int_0^\tau \dot{x}_\alpha^T \Phi_{i_1}(\tau, s) B_{i_1}(s) u_1(s) ds = 0$$
$$|x_\alpha|^2 \leq \|\Phi_{i_1}^{-1}(\tau, \tau_0)\| \cdot$$
$$\|\dot{x}_\alpha^T \Phi_{i_1}(\tau, s) B_{i_1}(s)\| \|u_1(s)\| (\tau - \tau_0)$$

则 $x_\alpha = 0$ 与 $x_\alpha \neq 0$ 矛盾, 故假设不成立, 因此定理成立。

3 能观性

类似与时变连续系统的能观性, 切换系统的能观性定义如下:

定义 4 状态能观切换系统被称为在 $[\tau_0, \tau_1]$ 上状态能观, 如果给定的切换序列 $v = \{(i_1, \tau_1 - \tau_0), \dots, (i_M, \tau_1 - \tau_0)\}$ 下, 状态初值 $x(\tau_0) = x_0$ 可由相应的状态输入 $u_i(\tau)$ 和状态输出 $y_i(\tau)$ 确定 ($\tau \in [\tau_0, \tau_1]$)。

下面给出系统的能观性定理。

定理 4 切换系统 (1) 在 $[\tau_0, \tau_1]$ 上状态能观 $\Leftrightarrow S = \sum_{j=1}^M S_j$ 是可逆的。

其中, $S_j(\tau) = \int_{\tau_1}^\tau \Phi_{i_j}^T(\tau, \sigma) \dots \Phi_{i_j}^T(\tau, \tau_{j-1}) C_{i_j}^T C_{i_j} \Phi_{i_j}(\tau, \tau_{j-1}) \dots \Phi_{i_j}(\tau, \tau_0) d\sigma$ ($j = 1 \dots M-1$);

$$S_M(\tau) = \int_{\tau_{M-1}}^\tau \Phi_{i_1}^T(\tau, \sigma) \dots \Phi_{i_M}^T(\tau, \tau_{M-1}) C_{i_j}^T C_{i_j} \Phi_{i_M}(\tau, \tau_{M-1}) \dots \Phi_{i_1}(\tau, \tau_0) d\sigma$$

证明 由定理 1 知道系统的输出可以表示为:

$$y(\tau) = \begin{cases} C_{i_1}(\tau) \Phi_{i_1}(\tau, \tau_0) x_0 + C_{i_1}(\tau) \cdot \int_0^\tau \Phi_{i_1}(\tau, s) B_{i_1}(s) u_1(s) ds + D_{i_1}(\tau) u_1(\tau) & (\tau \in [\tau_0, \tau_1]) \\ C_{i_1}(\tau) \Phi_{i_1}(\tau, \tau_1) \dots \Phi_{i_1}(\tau, \tau_0) x_0 + \dots + C_{i_1}(\tau) \Phi_{i_1}(\tau, \tau_1) \int_{\tau_2}^{\tau_1} \Phi_{i_1}(\tau, s) B_{i_1}(s) u_1(s) ds + C_{i_1}(\tau) \int_{\tau_1}^\tau \Phi_{i_1}(\tau, s) B_{i_1}(s) u_1(s) ds + D_{i_1}(\tau) u_1(\tau) & (\tau \in [\tau_1, \tau_2]) \end{cases}$$

将 $y(\tau)$ 改写成

$$y(\tau) = \begin{cases} C_{i_1}(\tau) \Phi_{i_1}(\tau, \tau_0) x_0 & (\tau \in [\tau_0, \tau_1]) \\ C_{i_1}(\tau) \Phi_{i_1}(\tau, \tau_1) \dots \Phi_{i_1}(\tau, \tau_0) x_0 & (\tau \in [\tau_1, \tau_2]) \end{cases}$$

其中,

$$y(\tau) = \begin{cases} C_{i_1}(\tau) \int_0^\tau \Phi_{i_1}(\tau, s) B_{i_1}(s) u_1(s) ds + D_{i_1}(\tau) u_1(\tau) & (\tau \in [\tau_0, \tau_1]) \\ C_{i_1}(\tau) \Phi_{i_1}(\tau, \tau_1) \dots \Phi_{i_2}(\tau, \tau_1) \cdot \int_{\tau_1}^\tau \Phi_{i_1}(\tau, s) B_{i_1}(s) u_1(s) ds + \dots + C_{i_1}(\tau) \int_{\tau_1}^\tau \Phi_{i_1}(\tau, s) B_{i_1}(s) u_1(s) ds + D_{i_1}(\tau) u_1(\tau) & (\tau \in [\tau_1, \tau_2]) \end{cases}$$

从能观性的定义可以知道系统 (1) 的能观性等价于从 $y(\tau)$ 估计出 x_0 。由于 $y(\tau)$ 和 $u_i(\tau)$ 都是任意的, 这就等价于当 $u_i(\tau) = 0$ 时估计 $y(\tau) = -y(\tau)$ 则

$$\int_0^\tau \dot{y}(\tau) y(\tau) d\tau = x_0^T S x_0$$

因为左端只依赖于 $y(\tau)$, 而右端只与 x_0 相关, 由于 S 可逆, 所以得到结论: x_0 可由 $y(\tau)$ 决定, 即系统能观。

充分性: 假设系统能观, 但是 S 不可逆, 则存在一个非零向量 x_α 使得 $x_\alpha^T S x_\alpha = 0$ 。

由于 $S_1, \dots, S_M$ 都是半正定的, 可以得到 $x_\alpha^T S_\alpha x_\alpha = 0$ ($\alpha = 1 \dots M$)。

可以选择 $x_0 = x_\alpha$, 如上 $\int_0^\tau \dot{y}(\tau) y(\tau) d\tau = x_0^T S x_0$ 故 $\int_0^\tau \|y(\tau)\|^2 d\tau = 0$ 因此 $y(\tau) = 0$ 。

由定义得系统不可观, 矛盾, 故 S 可逆。

4 结 论

本文就时变切换系统进行了研究, 区别于已有的方法, 提出了能控矩阵方法, 得到关于时变切换系统在给定切换条件下的能控能观条件。

参考文献:

[1] GEORGE R K NANDAKUMARAN A K A note on controllability of impulsive systems [J]. Math Anal Appl San Diego, 2000 241: 276—283.

[2] WANG C J Controllability and observability of linear time-varying singular systems [J]. IEEE Trans Autom Contr 1999 44: 1901—1905.

[3] BRANICKY M S Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched hybrid systems [J]. IEEE Trans Autom Control 1998 43: 475—482.

[4] PAIT FM MORSE A S A cyclic switching strategy for parameter adaptive control [J]. IEEE Trans Autom Control 1994 39: 1172—1183.

- [5] SUN Zhen-dong GE Shu-zhi \$ Switched Linear Systems [M]. London: Springer-Verlag Limited 2005
- [6] 段广仁. 线性系统理论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1996
- [7] RUGH W J Linear Systems Theory [M]. NJ: Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1993
- [8] CHEN C T Linear Systems Theory and Design [M]. New York: Holt Rinehart and Winston 1984

The Controllability and Observability of Time-varying Switched System

SUN Wei ZHAO Yi HUANG Yu

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Different from the Lie algebra method, the common Lyapunov function method, the differential geometry method and the invariant space method for the study of the time-invariant switched systems, a new method is obtained. The known results are all about the time-invariant system, while the condition about the time-varying case has not been concerned yet. The time-varying switched system as the following form is studied

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x + B_{\sigma(t)} u, \quad t \in [0, T]$$

A series of controllable matrixes based on the switching sequence and the rank condition of them are presented. Some necessary and sufficient conditions about the controllability and observability are presented.

Key words: switched system; controllability; observability

(上接第 12 页)

- with Variable coefficients [J]. J of Optimal Theory and Applications 2002, 114(2): 373—395
- [6] GUO B Z, SONG Q. Tracking Control of a Flexible Beam by Nonlinear Boundary Feedback [J]. J of Applied Mathematics and Stochastic Analysis 1995, 8(1): 47—58
- [7] GUO B Z. Riesz Basis Property and Exponential Stability of Controlled Euler-Bernoulli Beam Equations with Variable Coefficients [J]. SIAM Journal on Control and Optimization 2002, 40(6): 1905—1923
- [8] LIJIMAN W, MARKUS L. Exact Boundary Controllability of Hybrid System of Elasticity [J]. Arch Rational Mech Anal 1988, 103(1): 193—236
- [9] LIJIMAN W, MARKUS L. Stabilization of a Hybrid System of Elasticity by Feedback Boundary Damping [J]. Ann Mat Pura Appl 1988, 152(1): 281—330
- [10] CURTAIN R F, ZWARTH J. An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory [M]. New York: Springer-Verlag 1995

On the Boundary Feedback Control of the Hybrid System with Variable Coefficients: Riesz Base Approach

ZONG Xi-ju

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A model of the spacecraft control laboratory experiment (SCOLE) with variable coefficients is considered. It is shown that the closed-loop system under shear force boundary control of the form $u(t) = kV_{\text{xxx}}(1, t)$ has a sequence of generalized eigen functions, which form a Riesz basis for the state Hilbert space. Therefore, the spectrum-determined growth condition holds. The exponential stability and an asymptotic expansion of spectrum are obtained.

Key words: hybrid system; boundary feedback control; beam equation; stability