

图 $K \vee C_n$ 的非连通并图的优美性^{*}

魏丽侠, 张昆龙

(华北科技学院 基础部, 河北 三河 101601)

摘 要: 将 k -优美图的概念进行了推广, 给出了简单无向图 G 在集合 $\{0, 1, \dots, p\}$ 上的 $\{k_1, n_1, n_2, n_3, \dots, n_{t-1}, n_t\}$ -标号及 $\{k_1, n_1, n_2, n_3, \dots, n_{t-1}, n_t\}$ -优美图的概念, 并在此定义的基础上, 得出了非连通图 $G_1 \cup G_2$ 是 k -优美图的一个充分条件; 同时证明了在一定条件下一些图是优美图的结论。

关键词: 优美图; 优美标号; 星形树

中图分类号: O157.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 04-0013-04

以下所讨论的图 $G=(V, E)$ 均为简单无向图, 设 $V=V(G)$ 为图 G 的顶点集, $E=E(G)$ 为图 G 的边集, $|A|$ 为集合 A 的阶数, $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数, K_1 是 1 个顶点的平凡图, C_n 是长为 n 的圈。图 G_1 与 G_2 的并图 $G_1 \cup G_2$ 是指其顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$, 边集为 $E(G_1) \cup E(G_2)$ 的图。图 K_1 与 C_n 的联图 $K_1 \vee C_n$ 是指其顶点集为 $V(K_1) \cup V(C_n)$, 边集为 $E(C_n) \cup [V(K_1), V(C_n)]$ 的图。设 W_n 为 $K_1 \vee C_n$, 则 W_n 是优美图^[1-9]。

1 $\{k_1, n_1, n_2, n_3, \dots, n_{t-1}, n_t\}$ -优美图

定义 1 设图 $G=(V, E)$, k 为任意正整数, 若存在一个单射 $f: V \rightarrow \{0, 1, \dots, |E| + k - 1\}$, 使得对所有的边 $uv \in E$ 由 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ 导出一个双射 $f': E \rightarrow \{k, k+1, \dots, |E| + k - 1\}$, 则称 G 是 k -优美图, f 是 G 的一个 k -优美标号。1-优美图也称优美图, 其标号也称优美标号。

设 m, n 为任意正整数, 且 $m \leq n$ 记数列: $m, m+1, \dots, n$ 为 $m..n$ 当 $m=n$ 时, 记 $m..m$ 为 m 。设 t 是任意正奇数, 如果正整数 $k, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t$ 满足: $k \leq n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4 \leq n_5 < \dots < n_{t-1} \leq n_t$, 则集合 $\{k, k+1, \dots, n_1, n_2, n_2+1, \dots, n_3, \dots, n_{t-1}, n_{t-1}+1, \dots, n_t\}$ 记为 $\{k_1, n_1, n_2, n_3, \dots, n_{t-1}, n_t\}$ 。定义 1 可推广为:

定义 2 设图 $G=(V, E)$, p 为任意正整数, 如果存在一个单射 $f: V \rightarrow \{0, 1, \dots, p\}$, 使 $p = \max\{f(v) \mid v \in V\}$, 且对所有的边 $uv \in E$ 由 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ 导出一个双射 $f': E \rightarrow$

$\{k_1, n_1, n_2, n_3, \dots, n_{t-1}, n_t\}$, 则称 是图 G 在集合 $\{0, 1, \dots, p\}$ 上的一个 $\{k_1, n_1, n_2, n_3, \dots, n_{t-1}, n_t\}$ -标号。如果 $p=n$ 则称 G 是 $\{k_1, n_1, n_2, n_3, \dots, n_{t-1}, n_t\}$ -优美图, f 是 G 的一个 $\{k_1, n_1, n_2, n_3, \dots, n_{t-1}, n_t\}$ -优美标号。由定义 2 知, 图 G 的 $\{k_1, |E| + k - 1\}$ -优美图是 k -优美图, $\{1, |E|\}$ -优美图是优美图。

设 a, b 分别是序列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 偶数项和奇数项的最大脚标, $s = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 则: n 为偶数时,

$$s = \frac{n}{2}, a = n - 2s, b = n - 1 = 2n - 2s - 1; n \text{ 为奇数}$$

$$\text{时, } s = \frac{n-1}{2}, a = n - 1 = 2s, n = 2s + 1, b = n = 2n - 2s - 1. \text{ 即当 } n \geq 2 \text{ 时, } a = 2s, b = 2n - 2s - 1.$$

定理 1 设 n 是任意正整数, $n \geq 3$ 则:

- (1) 若 n 为奇数, 且 $n \geq 3$ 则 W_n 是 $\{s, (n-1), (n+1), (n+1+s-1)\}$ -优美图;
- (2) 若 n 为偶数, 且 $n \geq 4$ 则 W_n 是 $\{1, s, (n-1), (n+1), (n+1+s-1)\}$ -优美图。

证明 设 $V(W_n) = \{w_0, w_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, $p = n + 1 + s - 1$, 定义 W_n 的顶点标号 f 为:

$$\begin{aligned} f(w_0) &= 0, f(w_1) = p - s, \\ f(w_i) &= \begin{cases} p - \frac{i}{2} + 1, & \text{当 } i = 2, 4, \dots, n \text{ 时,} \\ s + \frac{1}{2}(i-1), & \text{当 } i = 3, 5, \dots, n \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $f(w_2) = p = n + 1 + s - 1, f(w_n) = p - s + 1,$

$$f(w_0) = s + \frac{1}{2}(2n - 2s - 2) = n - 1.$$

* 收稿日期: 2006-12-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19801016, 10261003)

作者简介: 魏丽侠 (1962年生), 女, 副教授; E-mail: weilixia622@sina.com

(i) 因 $f(w_0) < f(w_3) < f(w_5) < \dots < f(w_6) < f(w_1) < f(w_n) < f(w_{n-2}) < \dots < f(w_2)$, 其对应值为: $0 < s+1 < s+2 < \dots < n-1 < p-s < p-s+1 < p-s+2 < \dots < p$, 故 $p = \max\{f(v) \mid v \in V(W_n)\}$, $f: V(W_n) \rightarrow \{0, 1, \dots, p\}$ 是单射。

(ii) 对所有的边 $uv \in E(W_n)$, 设 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$, 则: $f'(w_0 w_1) = p-s$, $f'(w_1 w_2) = s$, $f'(w_i w_{i+1}) = p-s-i+1$ ($i=2, 3, \dots, n-1$),

$$f'(w_0 w_i) = \begin{cases} p - \frac{i}{2} + 1 & \text{当 } i=2, 4, \dots, \text{ 时,} \\ s + \frac{1}{2}(i-1) & \text{当 } i=3, 5, \dots, \text{ 时.} \end{cases} \quad (2)$$

(a) 当 n 为奇数时, $a=n-1$, $b=p$, $f'(w_1 w_n) = f'(w_1 w_0) = p-s-n+1=r$, 此时有:

$f'(w_1 w_2) < f'(w_0 w_3) < f'(w_0 w_5) < \dots < f'(w_0 w_6) < f'(w_1 w_n) < f'(w_{n-1} w_n) < f'(w_{n-2} w_{n-1}) < \dots < f'(w_2 w_3) < f'(w_0 w_1) < f'(w_0 w_a) < f'(w_0 w_{a-2}) < \dots < f'(w_0 w_2)$, 其对应值为: $s < s+1 < s+2 < \dots < n-1 < r < r+1 < r+2 < \dots < p-s-1 < p-s < p-s+1 < p-s+2 < \dots < p$, 所以 $f': E(W_n) \rightarrow \{s, s+1, \dots, (n-1), r, p\}$ 是双射。

由 (i), (ii)(a) 及定义 2 知, 图 W_n 是 $\{s, s+1, \dots, (n-1), r, p\}$ 一优美图。

(b) 当 n 为偶数时, $a=n$, $b=n-1$, $f'(w_1 w_n) = f'(w_1 w_a) = (p-s+1) - (p-s) = 1$, 在 (a) 式中将下划线的项 $f'(w_1 w_n)$ 移至该式最左端, 即成为该式中的最小项, 其它项不变, 则该式仍成立, 其对应值为: $1 < s < s+1 < s+2 < \dots < n-1 < r+1 < r+2 < \dots < p-s-1 < p-s < p-s+1 < p-s+2 < \dots < p$. 所以 $f': E(W_n) \rightarrow \{1, s, s+1, \dots, (n-1), (r+1), p\}$ 是双射。

由 (i), (ii)(b) 及定义 2 知, 图 W_n 是 $\{1, s, s+1, \dots, (n-1), (r+1), p\}$ 一优美图。

推论 1 设 m 是任意正整数, 则 W_{2m+1} 是 m -优美图, W_{2m} 是 $\{1, m, (5m-2)\}$ 一优美图。

当 $n=2m+1$ 时, 取 $r=2m+1$; 当 $n=2m$ 时, 取 $r=2m-1$, 由定理 1 可得此推论。

2 图 $G \cup G_2$ 及 $W_n \cup St(m) \cup St(\ell)$ 的优美性

定理 2 设图 $G=(V, E)$, $G_2=(V_2, E_2)$, k, p, p_2 是任意正整数, f 是 G 在集合 $\{0, 1, \dots, p\}$ 上的一个 $\{k, n, n_2, n_3, \dots, n_{2n-1}\}$ 一标号, f_2 是 G_2 在集合 $\{0, 1, \dots, p_2\}$ 上的一个 $\{(n+1)-(n_2-1), (n_3+1)-(n_4-1), \dots, (n_{2n-1}+1)-n_1\}$ 一标号, 如果满足: (1) $f(V) \cap f_2(V_2) = \emptyset$; (2)

$\max\{p, p_2\} = |E(G \cup G_2)| + k - 1$. 则 $G \cup G_2$ 是 k -优美图。

证明 设 $n_1=2$, $E=E(G \cup G_2)$, $A=\{k, n, n_2, n_3, \dots, n_{2n-1}\}$, $A_2=\{(n+1)-(n_2-1), (n_3+1)-(n_4-1), \dots, (n_{2n-1}+1)-n_1\}$. 由 f 的定义知, $f': E \rightarrow A$ 是双射, 故 $|E| = |A|$. 因 $A \cap A_2 = \emptyset$, $A \cup A_2 = \{k, k+1, \dots, n\}$, 从而, $|A \cup A_2| = n - k + 1$, 又因 $|A \cup A_2| = |A| + |A_2| = |E| + |E_2| = |E|$, 所以 $n - k + 1 = |E|$, $n = |E| + k - 1$. 定义图 $G \cup G_2$ 的顶点标号 f : 当 $u \in V_1$ 时, $f(u) = f(u)$; 当 $u \in V_2$ 时, $f(u) = f_2(u)$, 所以 $f(V_1) = f(V_1)$, $f(V_2) = f_2(V_2)$; $f'(E_1) = f'_1(E_1)$, $f'(E_2) = f'_2(E_2)$.

(i) 因 $f: V_1 \rightarrow \{0, 1, \dots, p\}$ 是单射, 所以 $f(V_1) \subseteq \{0, 1, \dots, p\}$. 由 $f(V_1) \cap f_2(V_2) = \emptyset$ 知 $f(V_1) \cap f_2(V_2) = \emptyset$; 由定理 2 条件 (2) $\max\{p, p_2\} = |E| + k - 1$ 知, $f(V_1) \cup f_2(V_2) = f(V_1) \cup f_2(V_2) \subseteq \{0, 1, \dots, p\} \cup \{0, 1, \dots, p_2\} = \{0, 1, \dots, \max\{p, p_2\}\} = \{0, 1, \dots, |E| + k - 1\}$; 又因 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 所以 $f: V \cup V_2 \rightarrow \{0, 1, \dots, |E| + k - 1\}$ 是单射。

(ii) 因 $f'_1(E_1) = A$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $f'(E_1) \cap f'(E_2) = f'_1(E_1) \cap f'_2(E_2) = A \cap A_2 = \emptyset$, $f'(E_1) \cup f'(E_2) = f'_1(E_1) \cup f'_2(E_2) = A \cup A_2 = \{k, k+1, \dots, n\} = \{k, k+1, \dots, |E| + k - 1\}$, 所以 $f': E_1 \cup E_2 \rightarrow \{k, k+1, \dots, |E| + k - 1\}$ 是双射。由 (i), (ii) 知图 $G \cup G_2$ 是 k -优美图。

在定理 2 中, 设 $A=\{k, n, n_2, n_3, \dots, n_{2n-1}\}$, $B=\{(n+1)-(n_2-1), (n_3+1)-(n_4-1), \dots, (n_{2n-1}+1)-n_1\}$, 若将 A 换为 $\{k, n, n_2, n_3, \dots, n_{n-1}, n_n\}$, B 换为 $\{(n+1)-(n_2-1), (n_3+1)-(n_4-1), \dots, (n_{2n-1}+1)-(n_{n-1}-1)\}$, 其它条件不变, 则定理 2 仍成立。

设 $St(m)$ 和 $St(\ell)$ 是两棵分别具有 m 条边和 ℓ 条边的星形树, $V(St(m)) = \{x_0, x_i \mid i=1, 2, \dots, m\}$, $V(St(\ell)) = \{y_0, y_j \mid j=1, 2, \dots, \ell\}$, 其中 x_0, y_0 分别是 $St(m)$ 和 $St(\ell)$ 的中心顶点。

引理 对任意的正整数 m, ℓ, k, h, t , 如果 $m \geq h \geq h-1 \geq h-2$, 则存在一个图 $St(m) \cup St(\ell)$ 的在集合 $\{0, 1, \dots, m+\ell+k+t-h\}$ 上的 $\{k, h, t, (m+\ell+k+t-h-2)\}$ 一标号。

证明 设 $c=k+t-h$, 定义 $St(m) \cup St(\ell)$ 的顶点标号 g 如下:

(a) $g(x_0)=1$, $g(x_i)=k+i$ ($i=1, 2, \dots, h-k+1$), $g(x_i)=c+i-1$ ($i=h-k+2, h-k+3, \dots, m$), $g(y_0)=2$, $g(y_j)=m+c+j$ ($j=1, 2, \dots, \ell$), 从而:

(b) $g'(\bar{x} \bar{x}) = k + i - 1 (\bar{x} = 1, 2, \dots, h - k + 1)$
 $g'(\bar{x} \bar{x}) = c + i - 2 (\bar{x} = h - k + 2, h - k + 3, \dots, m)$,
 $g'(\bar{y} \bar{y}) = m + c + j - 2 (\bar{y} = 1, 1, \dots, \ell)$.

由 (a) 中的定义式有: $g(\bar{x}) < g(\bar{y}) < g(\bar{x}) < g(\bar{x}) < \dots < g(\bar{x}_{h-k-1}) < g(\bar{x}_{h-k-2}) < \dots < g(\bar{x}_m) < g(\bar{y}) < g(\bar{y}_2) < \dots < g(\bar{y}_\ell)$, 其对应值为: $1 < 2 < k + 1 < k + 2 < \dots < h + 1 < h + 1 < \dots < m + c - 1 < m + c + 1 < m + c + 2 < \dots < m + c + \ell$. 由 (b) 表达式有: $g'(\bar{x} \bar{x}) < g'(\bar{x} \bar{x}) < \dots < g'(\bar{x} \bar{x}_{h-k-1}) < g'(\bar{x} \bar{x}_{h-k-2}) < \dots < g'(\bar{x} \bar{x}_m) < g'(\bar{y} \bar{y}) < g'(\bar{y} \bar{y}_2) < \dots < g'(\bar{y} \bar{y}_\ell)$. 其对应值为: $k < k + 1 < \dots < k < \dots < m + c - 2 < m + c - 1 < m + c < \dots < m + c + \ell - 2$. 故标号 g 是 $St(m) \cup St(\ell)$ 在集合 $\{0, 1, \dots, m + \ell + k + t - h\}$ 上的 $\{k, h - t, (m + \ell + k + t - h - 2)\}$ 一标号.

定理 3 设 n, m, ℓ, k 是任意正整数, $s = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 那么: (1) 若 n 是奇数, 且 $m \geq s \geq k \geq 2$ 则图 $W_n \cup St(m) \cup St(\ell)$ 是 k -优美图; (2) 若 n 是偶数, 且 $m + 1 \geq s \geq 3$ 则图 $W_n \cup St(m) \cup St(\ell)$ 是优美图.

证明 由 n, s 有:

$$n \geq s - 1 \quad (3)$$

设整数 n 满足条件: n 为奇数时, $s = \frac{n}{2}$; n 为偶数时, $s = \frac{n}{2} - 1$, $p = n + r + s - 1$, $p_2 = n + m + \ell + k - s + 1$, $E = E(W_n \cup St(m) \cup St(\ell))$, 则 $|E| = 2n + m + \ell$.

定义 W_n 的顶点标号 同 (1) 式, 则 $f(w_2) = p$, $f(w_s) = p - s + 1$, $f(w_b) = n - 1$. 设 $d = n + m + k$ 定义图 $St(m) \cup St(\ell)$ 的顶点标号 g 同引理证明 (a) 中各式, 其中 $h - k + 1 = s - k$.

(i) 当 n 是奇数时, 取 $r = n + m + \ell + k - s$ 则 $r \geq n$. 由定理 1 (1) 知, W_n 是 $\{s - (n - 1), r, p\}$ 一优美图. 其中 $p = n + r + s - 1 = 2n + m + \ell + k - 1 = |E| + k - 1$. 由条件 $m \geq s \geq k \geq 2$ 及 (3) 式知, $m > s - 1$, $n > s - 1 \geq k \geq 2$. 由引理知 g 是图 $St(m) \cup St(\ell)$ 在集合 $\{0, 1, \dots, p_2\}$ 上的 $\{k - (s - 1), n - (p_2 - 2)\}$ 一标号. 因 $p_2 = n + m + \ell + k - s + 1 = r + 1$, $p_2 - 2 = r - 1$, 故 g 是 $St(m) \cup St(\ell)$ 在集合 $\{0, 1, \dots, p_2\}$ 上的 $\{k - (s - 1), n - (r - 1)\}$ 一标号, 且,

$$\max\{p, p_2\} = p = |E| + k - 1 \quad (4)$$

(ii) 当 n 是偶数时, 取 $r = n + m + \ell - s + 1$, $k \geq 2$ 则 $s = \frac{n}{2} - 1$. 由定理 1 (2) 知, W_n 是 $\{1, s - (n - 1), (r + 1) - p\}$ 一优美图. 其中 $p = n + r + s - 1 = 2n + m + \ell - |E|$. 由条件 $m + 1 \geq s \geq 3$ 及 (3) 式,

有, $m \geq s - 1$, $n > s - 1 \geq k \geq 2$ ($k \geq 2$), 由引理知 g 是图 $St(m) \cup St(\ell)$ 在集合 $\{0, 1, \dots, p_2\}$ 上的 $\{2 - (s - 1), n - (p_2 - 2)\}$ 一标号. 因 $p_2 = n + m + \ell + k - s + 1 = r + 2$, $p_2 - 2 = r$, 从而 g 是 $St(m) \cup St(\ell)$ 在集合 $\{0, 1, \dots, p_2\}$ 上的 $\{2 - (s - 1), n - r\}$ 一标号, 且,

$$\max\{p, p_2\} = p = |E| \quad (5)$$

由 (4), (5) 式有 $p \geq |E|$, 因 $|E| = 2n + m + \ell$ 故 $p \geq 2n + m + \ell$. 因 $s \geq k$ (n 为偶数时 $k \geq 2$), 从而 $n \geq 2s \geq 2k \geq k + 1$, $p \geq 2n + m + \ell > n + m + \ell + k + 1$, $p - s > n + m + \ell + k - s + 1$, 而 $f(w_1) = p - s$, $g(y_\ell) = n + m + \ell + k - s + 1$, 所以 $f(w_1) > g(y_\ell)$, 从而, $f(w_0) < g(\bar{x}) < g(\bar{y}) < g(\bar{x}) < g(\bar{x}) < \dots < g(\bar{x}_k) < f(w_3) < f(w_5) < \dots < f(w_b) < g(\bar{x}_{h-k-1}) < g(\bar{x}_{h-k-2}) < \dots < g(\bar{x}_m) < g(\bar{y}_1) < g(\bar{y}_2) < \dots < g(\bar{y}_\ell) < f(w_1) < f(w_a) < f(w_{a-2}) < \dots < f(w_2)$, 其对应值为: $0 < 1 < 2 < k + 1 < k + 2 < \dots < s - s + 1 < s + 2 < \dots < n - 1 < n + 1 < n + 2 < \dots < d - s < d - s + 2 < d - s + 3 < \dots < d + \ell - s + 1 < p - s < p - s + 1 < p - s + 2 < \dots < p$, 从而,

$$\{f(w) | w \in V(W_n)\} \cap \{g(w) | w \in V(St(m) \cup St(\ell))\} = \emptyset \quad (6)$$

当 n 是奇数时, 由 (4), (6) 及定理 2 可知, 图 $W_n \cup St(m) \cup St(\ell)$ 是 k -优美图; 当 n 是偶数时, 由 (5), (6) 及定理 2 可知, 图 $W_n \cup St(m) \cup St(\ell)$ 是优美图.

3 图 $W_{2n+1} \cup G_n$ ($n \geq 3, 4$) 的优美性

定理 4 设 n 是任意正整数, 那么: (1) 如果 G_n 是一个具有 n 条边的优美图, 则 $W_{2n+1} \cup G_n$ 是优美图; (2) 如果 G_n 是一个具有 n 条边的 2-优美图, 则 $W_{2n+1} \cup G_n$ 是优美图.

证明 设 $i = 1, 2, \dots, e = 2n + 2$, 则 $e + 1 = 2n + 3$, $e + 2 = 2n + 4$. 设 $G_n^{(i)}$ 是具有 n 条边的 i -优美图, $E_i = E(W_{e+1} \cup G_n^{(i)})$, $p^{(i)} = |E_i|$, 则 $p^{(i)} = 5n + 2i + 4$.

由推论 1 知, W_{e+1} 是 $\{(n + 1) - p^{(1)}, p^{(1)}\}$ 一优美图, W_{e+2} 是 $\{1, (n + 2) - p^{(1)}, p^{(1)}\}$ 一优美图. 设 $A = \{(n + 1) - p^{(1)}, p^{(1)}\}$, $A = \{1, (n + 2) - p^{(1)}, p^{(1)}\}$, 由定义 2 知, W_{e+1} 是 A -优美图. 设 f 是 W_{e+1} 的一个 A -优美标号, 则 f 可由 (1) 式定义. 在 (1) 式中, 将 W_n 的下标参数 n 代换为 $e + 1$, i 则可得到 f 的定义式. 即当 $i = 1$ 时, n 代换为 $2n + 3$ 可得到 f 的定义式; $i \geq 2$ 时, n 代换为 $2n + 4$ 可得到 f 的定义式. 设 $s = \lfloor \frac{e+1}{2} \rfloor$, 则 $s = n + 1$. 由 f 的定义知, $f(w_0) = 0$

$f(w_2) = p_1^{(1)}$, $f(w_3) = s+1 = n+i+1$, 并且:

$$f(w_0) < f(w_3) < f(w_5) < \dots < f(w_b) < f(w_1) < f(w_a) < f(w_{a-2}) < \dots < f(w_2) \quad (7)$$

设标号 g_i 是图 $G_i^{(n)}$ 的一个 i -优美标号, $p_i^{(2)} = n+i-1$, 则由定义 2 知, $G_i^{(n)}$ 是 $\{i, p_i^{(2)}\}$ -优美图, 且 $g_i: V(G_i^{(n)}) \rightarrow \{0, 1, \dots, n+i-1\}$ 是单射, 故对任意的 $v \in V(G_i^{(n)})$, 有 $0 \leq g_i(v) \leq n+i-1$, $1 \leq g_i(v)+1 \leq n+i$. 从而,

$$f(w_0) < g_i(v)+1 < f(w_3) \quad (8)$$

对任意的 $v \in V(G_i^{(n)})$, 设

$$z(v) = g_i(v)+1 \quad (9)$$

则 $z: V(G_i^{(n)}) \rightarrow \{0, 1, \dots, n+i\}$ 是单射. 任取边 $uv \in E(G_i^{(n)})$, 因 $z'(uv) = |z(u) - z(v)| = |(g_i(u)+1) - (g_i(v)+1)| = |g_i(u) - g_i(v)| = g'_i(uv)$, 故 $z': E(G_i^{(n)}) \rightarrow \{i, p_i^{(2)}\}$ 是双射, 所以 z 是 $G_i^{(n)}$ 在集合 $\{0, 1, \dots, n+i\}$ 上的 $\{i, p_i^{(2)}\}$ 标号. 由 (8)、(9) 式有: $f(w_0) < z(v) < f(w_3)$, 结合 (7) 式则有: $f(w_0) < z(v) < f(w_3) < f(w_5) < \dots < f(w_b) < f(w_1) < f(w_a) < f(w_{a-2}) < \dots < f(w_2)$, 其对应值为: $0 < z(v) < n+i+1 < n+i+2 < \dots < 2n+i+1 < p_1^{(1)} - s < p_1^{(1)} - s+1 < p_1^{(1)} - s+2 < \dots < p_1^{(1)}$, 所以 $\{f(v) \mid v \in V(W_{n+i})\} \cap \{z(w) \mid w \in V(G_i^{(n)})\} = \emptyset$, $\max\{p_1^{(1)}, p_i^{(2)}\} = \max\{5n+2i+4, n+i-1\} = p_1^{(1)} = |E_i|$, 由定理 2 知 $W_{n+i} \cup G_i^{(n)}$ 是优美图, 定理 4 得证.

推论 2 对任意正整数 n , 图 $W_{2n+3} \cup C_n$ 是优

美图; 设 T_n 是一个具有 n 条边的优美树, 则图 $W_{2n+3} \cup T_n$ 是优美图.

参考文献:

- [1] RINGEL G. Problem 25 in theory of graph and its applications [C]. Smolenice Proc Symposium Smolenice 1963: 162-167.
- [2] ROSA A. On certain valuations of the vertices of a graph theory of graphs [C]. Proc Internat Sympos Rome 1966: 349-355.
- [3] GOLOMB SW. How to number a graph: graph theory and computing [M]. New York: Academic Press, 1972: 23-37.
- [4] 马克杰. 优美图 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
- [5] ECKLER A R. The construction of missile guidance codes resistant to random interference [J]. Bell Syst Technical J 1960: 39: 973-994.
- [6] 毕双艳, 李秀芬. 路线. 图 $G_k \cup St(m)$ 的 k -优美性及算术性 [J]. 吉林大学自然科学学报, 1999(2): 19-22.
- [7] 路线, 李秀芬, 付彤. 图 $G_k \cup St(m)$ 的 k -优美性及算术性 [J]. 长春邮电学院学报, 2000: 18(4): 17-20.
- [8] 潘伟, 路线. 两类非连通图 $(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup T_n$ 的优美性 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2003: 41(2): 152-154.
- [9] 魏丽侠, 贾治中. 非连通图 $G_1 \cup G_2$ 及 $G_1 \cup G_2 \cup K_2$ 的优美性 [J]. 应用数学学报, 2005: 28(4): 689-694.

The Gracefulness of Union Graphs on Graph $K \vee C_n$

WEI Lixia ZHANG Kunlong

(North China Institute of Science and Technology, Hebei Sanhe 101601, China)

Abstract: The definitions of k -graceful graph and k - ℓ graceful graph are extended. Two new concepts $\{k, n, n_2, n_3, \dots, n_{t-1}, n_t\}$ -LABEL of graph G on the set $\{0, 1, \dots, p\}$ and $\{k, n, n_2, n_3, \dots, n_{t-1}, n_t\}$ -GRACEFUL GRAPH are presented. On the basis of them, a sufficient condition that unconnected graph $G_1 \cup G_2$ is a k -graceful graph is obtained. In the meanwhile, the results that some graphs are graceful graphs are proved.

Key words: graceful graph; graceful label; star tree