

同速度的具有 m 台通用机的 n 组工件的排序问题*

丁 伟

(中山大学数学系//物理系, 广东 广州 510275)

摘 要: 改进了经典的 LPT (Longest Processing Time) 算法, 利用“首先空闲”准则安排机器, 而对于工件的安排则按照“长时间任务优先”的原则, 讨论了将 n 组工件安排在 n 台速度相同的专用机, m 台同速度的通用机上的优化排序问题, 得到了利用该近似算法所得的解 T 与最优解 T^* 的一个估计: $T/T^* \leq (2m+1)/(m+1)$ 。

关键词: 启发式算法; 性能指标; LS 算法; LPT 算法; 通用机与专用机

中图分类号: O223 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 03-0019-04

将 n 个独立工件安排在 m 台机器上, 使得所有机器的总的最后完工时间最小的经典平行机调度问题, 一直受到人们的广泛关注。它在经济管理、生产调度、工程技术和军事方面有着广泛的应用背景。近几十年来, 人类社会越来越需要合理地安排与利用有限的资源、人力和时间, 以发挥尽可能高的效能, 因此它的研究在国际上得到了广泛的重视。该类问题产生的背景主要是机器制造, 后来被广泛应用于计算机系统、运输调度、生产管理等领域。从普通生产部门的计划安排、人员调度、学校课程表的制定, 到宇宙飞船复杂庞大的飞行计划, 都要用到排序的理论和算法。

1954 年 Johnson^[1]最先研究了两台机器的排序问题。由于该类问题是 NP-Hard 的, 人们在解决该类问题时经常使用的一个启发式规则是 LPT (Longest Processing Time) 规则, 即一旦有机器空闲, 总是把等待加工的最大工件安排给这个首先空闲的机器加工。LPT 规则最早由 Graham^[2]提出, 该文献对经典的平行机调度问题还给出了近似解 T 与最优解 T^* 的一个比值: $T/T^* \leq 4/3 - 1/3m$, 其中 m 是机器的数目; 后来 Coffman^[3]将其改进为: $T/T^* \leq (n+1)/n - 1/nm$, 其中 n 是工件的数目; Webster^[4]对将 n 个工件安排在 m 台同速度的平行机的情形, 给出了 LPT 算法是最优算法的充分条件: 如果 $p_j (j=1, \dots, n)$ 表示工件的加工时间, 若对所有的 $j=1, \dots, n-1$ 均有 p_j/p_{j+1} 是整数, 那么 LPT 算法可得到最优解; Gonzalez^[5]研究了 m 台速度不同的平行机的调度问题, 并得到了界 $T/T^* \leq 3/2 - 1/2m$; Chen^[6]令 r_m 是最快速度与最慢速度

的比值, 运用 LPT 算法得到了 $\frac{T}{T^*} \in [1 + \frac{N_m - 1}{3N_m}, 1 + \frac{r_m}{3}]$, 其中 $N_m = (3/\sqrt{e})(\frac{3}{2})^m - 2$; Kovacs^[7]考虑了 $m-1$ 台机器速度相同, 一台机器速度比较快的情形, 得到了 $\frac{T}{T^*} \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 1.366$; 文中同时还考虑了另一种机器速度均是 2 的情形, 得到了 $41/30 < T/T^* < 42/30$ 。

在实际应用如纺纱工艺中, 存在着一类关于多组工件在多组加工速度不同的机器上的排序问题。该类 Cmax 问题要求工件在机器上的一种安排, 使得从第一个工件开始加工时刻起, 到最后一个工件完成加工时刻止的时间跨度最小。许多学者对此进行了广泛的研究: 文献 [8-10] 针对两组工件, 两台速度不同专用机的情形, 分别就一台通用机、两台通用机和 m 台通用机的情形的到了不同的紧界: $4/3$, $3/2$ 和 2 ; 文献 [11-13] 针对 n 组工件, n 台专用机和一台通用机 (速度相同) 的情形, 分别讨论了 $n=3, 4$ 和一般情形, 分别得到了界: $4/3$, $5/4$ 和 $(n+1)/n$ 。

本文在 [8-13] 的基础上讨论一种更为复杂的情形: 有 n 组工件 $L_r = \{t_{ri}, i \in I_r\}$, $I_r = \{1, 2, 3, \dots, n_r\}$, $r=1, 2, 3, \dots, n$, n_r 为非负整数, t_{ri} 代表工件并表示其绝对加工时间; 有 $m+n$ 台机器 $\{M_l\}$, $l=1, 2, 3, \dots, m+n$, 其中 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 分别为工件组 $L_1, L_2, \dots, L_n$ 的专用机, $M_{n+1}, M_{n+2}, \dots, M_{m+n}$ 为通用机, 可加工 $L_1, L_2, \dots, L_n$ 中的任何工件, 由于我们考虑的是专用机的

* 收稿日期: 2007-10-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10531040)

作者简介: 丁伟 (1969 年生), 女, 讲师, 博士; E-mail: dingwei@mail.sysu.edu.cn

速度与通用机的速度相同的情形,所以可以不失一般性的假设所有机器的加工速度为 $s_e = 1$, $l = 1, 2, \dots, n + m$ 。称 t_{ri} 为工件 t_{ri} 在机器 M_l 上的加工时间。假设工件之间是独立的,与加工次序无关,加工是不允许中断的,则问题为:将 n 组工件安排在 $m + n$ 台速度相同的机器上,使其最后完工时间最小。本文利用改进的 LPT 算法(见第二节),由“首先空闲”准则选择机器,按照“长时间任务优先”的原则安排工件,得到(见第三节的定理1): $T/T^* \leq (2m+1)/(m+1)$, 推广和涵盖了用经典的 LPT 算法所获得的结果。

1 M-LPT 算法及有关性质

M-LPT 算法首先对 n 组工件按其加工时间的长短从大到小混合排序,假设用 $t_k(r)$ 表示混合排序后的第 k 个工件, r 表示该工件所属的工件组;若工件 $t_k(r)$ 先于 $t_{k'}(r')$ 被分配,则记作 $t_k(r) < t_{k'}(r')$;若工件 $t_k(r)$ 分配给机器 M_l , 则记作 $t_k(r) \in M_l$; $MT_l(k)$ 表示混合排序后第 k 个工件安排之前各机器上的最后完工时间; M_{T_l} 表示所有工件均被安排完后,各机器上的最后完工时间; $ML_l(k)$ 表示第 k 个工件安排之前各机器上的工件集合,并记

$$M_{L_l}(k) = \sum_{t_{k'}(r') \in M_{L_l}, t_{k'}(r') < t_k(r)} t_{k'}(r'); MT_l = \sum_{t_k(r) \in M_l} t_k(r);$$

$$ML_l(k) = \{t_{k'}(r') \mid t_{k'}(r') < t_k(r), t_{k'}(r') \in M_l\};$$

$$T_r = \sum_{i=1}^{n_r} t_{ri}, l = 1, \dots, m + n,$$

$$r = 1, \dots, n, k = 1, \dots, |L|;$$

其中 $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ 表示全体工件, $|L_r|$ 表示 L_r 中工件的个数, $|L| = |L_1| + |L_2| + \dots + |L_n|$ 。

M-LPT 算法的步骤:

Step1: 初始化

(i) 对工件组排序,使 $T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_n$;

(ii) 对每组工件分别排序,使 $t_{rs} \geq t_{r,s+1}$, $s = 1, 2, \dots, n_r - 1, r = 1, 2, \dots, n$;

(iii) 对 n 组工件混合排序,使 $t_k(r) \geq t_{k+1}(w)$, $k = 1, 2, 3, \dots, |L| - 1, r, w = 1, 2, \dots, n$;

(iv) 令 $k = 1$, $MT_l(k) = 0$, $ML_l = \Phi$ (空集), $ss_r = \{r\} \cup \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$, $l = 1, 2, 3, \dots, m+n$, $r = 1, 2, \dots, n$;

Step2: 如果 $k > |L|$ 则输出解 $ML_l(k)$, $l = 1, 2, 3, \dots, m+n$, $C_{max} = \max_l \{MT_l(k)\}$; 结束。

Step3: 选择机器: $u_0 = \min_u \{u \mid MT_u(k) + t_k(r) = \min_{l \in ss_r} \{MT_l(k) + t_k(r)\}\}$;

Step4: 令 $MT_{u_0}(k+1) = MT_{u_0}(k) + t_k(r)$; $ML_{u_0}(k+1) = ML_{u_0}(k) \cup \{t_k(r)\}$; $k \leftarrow k+1$, 转到 Step 2。

由算法可知,工件 t_{kl} 必然被安排在机器 M_k 上,其中 $k = 1, 2, \dots, n$ 。

下面给出 M-LPT 算法的性质。

对于工件 $t_k(r)$ 用 $ST(t_k(r))$ 表示其开始加工的时刻, $CT(t_k(r))$ 表示其完成加工的时刻。

引理1 若 $t_k(r) < t_{k'}(r')$, 则 $t_k(r) \geq t_{k'}(r')$, 且 $CT(t_k(r)) \leq ST(t_{k'}(r'))$, 其中 $k, k' = 1, 2, 3, \dots, |L|$, $r, r' = 1, 2, \dots, n$ 。

证明 由 $ST(t_k(r))$ 和 $CT(t_k(r))$ 的定义即得。

引理2 若在 L 中存在工件 $t_z(r)$, 使得 $CT(t_z(r)) = T$, 且 $Z < |L|$, 则存在 L' , 满足 $|L'| < |L|$ 且 $T(L')/T^*(L') \geq T(L)/T^*(L)$ 。

证明 因为 $CT(t_z(r)) = T$, 且 $Z < |L|$, 则可令 $L' = L \setminus \{t_{z+1}(r), t_{z+2}(r), \dots, t_{|L|}(r)\}$, 由于工件被安排的次序只与工件的顺序有关,而 L, L' 两组工件中前 Z 个工件的加工时间相同,每个工件所可能选择的加工机器也相同,且前后工件的大小关系也相同,机器的选择只与机器的速度和前 Z 个工件的分配情况有关,故 L 与 L' 的 M-LPT 解相同,即 $T(L) = T(L')$, 但 $|L'| < |L|$, 必有 $T^*(L') \leq T^*(L)$, 从而有 $T(L')/T^*(L') \geq T(L)/T^*(L)$ 。

引理3 若 $CT(t_{|L|}(r)) = T$, $T > T^*$ 且在 M-LPT 算法中有一台机器 M_i , 其 $ML_i = \Phi$ (空集), $1 \leq i \leq m+n$, 即没有一个工件被分配到该机器上,那么在最优排序中也无任何工件在此机器上。

证明 由 $CT(t_{|L|}(r)) = T$, 而 $ML_i(|L|) = \Phi$ (空集) 知,最后一个工件也没有被分配到 M_i 上, 即有 $t_{|L|}(r) \geq T$ (由算法知,必有 $t_{11} \in ML_1, t_{21} \in ML_2, \dots, t_{n1} \in ML_n$, 因此 $ML_1, ML_2, \dots, ML_n$ 必不空)。假设在最优排序中 $ML_i^* \neq \Phi$ (空集), 则在最优排序中 M_i 上至少有一个工件, 设为 $t_k(s)$, 显然有 $t_k(s) \geq t_{|L|}(r)$ 。因为 $T^* \geq t_k(s)$, 则可得 $T^* \geq t_k(s) \geq t_{|L|}(r) \geq T$ 。若 $T = T^*$, 则 M-LPT 算法已得到了问题的一个最优解, 此解在机器 M_i 上无任何工件。若 $T^* > T$, 则得矛盾。证毕。

引理4 若 $CT(t_{|L|}(r)) = T$, $t_{|L|}(r) \in L_j$, $1 \leq j \leq n$, 若存在某个 k , $1 \leq k \leq n$, 且 $k \neq j$, 使得 $\{t_{ku} \in ML_i, n+1 \leq i \leq m+n, 1 \leq u \leq n_k\} = \Phi$ (空集), 则存在 L' , $|L'| < |L|$, 且 $T(L')/T^*(L') \geq T(L)/T^*(L)$ 。

证明 根据算法和假设知道在公用机 $M_{n+1}, M_{n+2}, \dots, M_{m+n}$ 上无 L_k 中的工件, 令 $L'_1 = L_1, L'_2 = L_2, \dots, L'_{k-1} = L_{k-1}, L'_k = L_{k+1}, \dots, L'_{n-1} = L_n, L'_n = \Phi$ (空集), $L' = (L'_1, L'_2, \dots, L'_n)$ 。把 L' 用 $M-LPT$ 算法安排到机器 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{m+n}$ 上去, 等价于将 $L-L_k$ 分配到机器 $M_1, M_2, \dots, M_{k-1}, M_{k+1}, \dots, M_n, \dots, M_{m+n}$ 上去。把 L 用 $M-LPT$ 算法分配到机器 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{m+n}$ 上去, 由算法及假设知 L_k 中工件均被分配到机器 M_k 上, 此时也等于是将工件组 $L-L_k$ 分配到机器 $M_1, M_2, \dots, M_{k-1}, M_{k+1}, \dots, M_n, \dots, M_{m+n}$ 上去。由于对 L 而言有 $t_{1L}(r) \in L_j, CT(t_{1L}(r)) = T$, 故有 $T(L) = T(L')$, 而由 $|L'| < |L|$ 知 $T^*(L) \geq T^*(L')$, 所以 $T(L')/T^*(L') \geq T(L)/T^*(L)$ 。

引理 5 如果在最优排序中公用机 $M_{n+1}, M_{n+2}, \dots, M_{m+n}$ 均空闲, 则存在机器组 M' , 满足 $|M'| < |M|$, 且 $T(M')/T^*(M') \geq T(M)/T^*(M)$ 。

证明 由假设可令 $M' = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ 。若将 $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ 安排到机器组 M' 上去, 此时在最优排序中仍有 $t_i \in ML_r, r=1, 2, \dots, n, i=1, 2, \dots, n_r$, 因此 $T^*(M') = T^*(M)$, 而由 $|M'| < |M|$ 知 $T(M) \leq T(M')$, 故有 $T(M')/T^*(M') \geq T(M)/T^*(M)$ 。

2 $M-LPT$ 算法性能指标的界

定理 1 在 $M-LPT$ 算法下, 把 $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ 分配到机器 $M = \{M_1, M_2, \dots, M_{m+n}\}$ 上去, 其中 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 分别为 $L_1, L_2, \dots, L_n$ 的专用机, $M_{n+1}, \dots, M_{m+n}$ 为公用机, 且专用机与公用机的加工速度相同, 当 $n \leq m+1$ 时, 近似解 T 与最优解 T^* 之间有 $T/T^* \leq (2m+1)/(m+1)$ 。

证明 采用反证法。设 (L, M) 是满足以下三个条件的最小反例。

$$(i) \frac{T(L)}{T^*(L)} > \frac{2m+1}{m+1};$$

(ii) 凡使 (i) 成立的 L' 均满足 $|L'| \geq |L|$;

(iii) 凡使 (i), (ii) 成立的 M' 均满足 $|M'| > |M|$ 。

若存在 $t_z(r), CT(t_z(r)) = T$, 且 $Z < |L|$, 则由引理 2 知存在 $L', |L'| < |L|$, 且 $T(L')/T^*(L') \geq T(L)/T^*(L)$, 这与 L 是满足 $T(L)/T^*(L) > (2m+1)/(m+1)$ 的最小工件组相矛盾, 故可设若存在 $t_z(r), CT(t_z(r)) = T$, 必有 $Z =$

$|L|$ 。

根据引理 3 知在 $M-LPT$ 解中若有机器空闲, 则在最优解中该机器仍然空闲, 因此, 如果将该机器抹去, 即把 L 安排到剩余的 $m+n-1$ 台机器上去, 其 T, T^* 值不变, 这与假设 (iii) 相矛盾, 所以以下的论证都是在假设在 $M-LPT$ 算法下无空闲机器的情形进行的, 即在 $M-LPT$ 算法下, M_i 上至少存在一个工件, 其中 $i = n+1, n+2, \dots, m+n$ 。

CASE A. 若 $CT(t_{1L}(r)) = T, t_{1L}(r) \in L_j, t_{1L}(r) \in ML_j, 1 \leq j \leq n$ 。则此时有 $MT_j = T, MT_i + t_{1L}(r) \geq T, i = n+1, n+2, \dots, m+n$, 即 $MT_j + \sum_{i=n+1}^{m+n} MT_i \geq T + m(T - t_{1L}(r))$ 。

CASE B. 若 $CT(t_{1L}(r)) = T, t_{1L}(r) \in L_j, t_{1L}(r) \in ML_p, n+1 \leq p \leq m+n$, 则 $MT_p = T, MT_j + t_{1L}(r) > T$, 即 $MT_j > T - t_{1L}(r), MT_i + t_{1L}(r) \geq T, i = n+1, n+2, \dots, m+n, i \neq p$ 。因此 $MT_j + \sum_{i=n+1}^{m+n} MT_i > T - T_{1L}(r) + T + (m-1)(T - T_{1L}(r)) = T + m(T - T_{1L}(r))$ 。

由 $M-LPT$ 算法知 $t_{q1} \in ML_q$, 因此 $MT_q \geq t_{q1}$, 而 $t_{q1} \geq t_{1L}(r)$, 所以 $MT_q \geq t_{1L}(r)$,

$$T^* \geq \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_n}{m+n} =$$

$$\frac{MT_1 + MT_2 + \dots + MT_n + \sum_{i=n+1}^{m+n} MT_i}{m+n} \geq \frac{T + m(T - T_{1L}(r)) + (n-1)t_{1L}(r)}{m+n} = \frac{(m+1)T + (n-m-1)t_{1L}(r)}{m+n}$$

$$\text{即 } \frac{T}{T^*} \leq \frac{m+n}{m+1} + \frac{m-n+1}{m+1} \frac{t_{1L}(r)}{T^*}$$

若在最优排序中在 m 台公用机上无任何工件, 则由引理 5 知存在机器组 M' , 使得 $|M'| < |M|$, $T(M')/T^*(M') \geq T(M)/T^*(M)$, 这与 M 是满足 (i) - (iii) 的最小机器组相矛盾。因此可设在最优排序中在公用机上至少有一个工件, 设为 $t_{v'}(r)$, 则显然有 $t_{v'}(r) \geq t_{1L}(r)$, 且有 $T^* \geq t_{v'}(r)$, 故 $T^* \geq t_{1L}(r)$ 。因此得 $\frac{T}{T^*} \leq \frac{2m+1}{m+1}$ 。证毕。

参考文献:

- [1] JOHNSON S M. On the representations of an integer as the sum of products of integers[J]. Trans Amer Math Soc 1954, 76:177-189.

- [2] GRAHAN R L. Bounds on multiprocessing timing anomalies[J]. SIAM J Appl Math, 1969, 17(2): 416-429.
- [3] COFFMAN E G, SETHI R. A generalized bound on LPT sequencing[J]. Informat Res Oper, 1976, 10 (B-2): 17-25.
- [4] WEBSTER S T. A general lower bound for the makespan problem[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 89: 516-524.
- [5] GONZALEZ T, IBARRA O H, SAHNI S. Bounds for LPT schedules on uniform processors[J]. SIAM J Comput, 1977, 6 (1): 155-166.
- [6] CHEN B. Parametric bounds for LPT scheduling on uniform processors[J]. Acta Math Appl Sinica (English Ser), 1991, 7(1): 67-73.
- [7] KOVACS A. Tighter approximation bounds for LPT scheduling in two special cases[M]. // Algorithms and complexity, Lecture Notes in Computer Science, 3998, Springer, Berlin, 2006, 187-198.
- [8] 秦成林, 丁伟. 具有通用机的两组工件的 $Q_4//C_{\max}$ 问题[J]. 上海大学学报: 自然科学版, 1995, 6(1): 18-25.
- QIN C L, DING W. A $Q_4//C_{\max}$ problem for two groups of jobs with general-purpose machinery [J]. Journal of Shanghai University: Natural Science Edition, 1995, 6 (1): 18-25.
- [9] 秦成林, 潘家定. 具有两台专用机、两台通用机的 $Q_4//C_{\max}$ 问题的近似算法[J]. 运筹学学报, 1998, 2(1): 64-70.
- QIN C L, PAN J D. An approximate algorithm for the $Q_4//C_{\max}$ problem with two special-purpose machines and two general-purpose machines [J]. OR Transactions, 1998, 2(1): 64-70.
- [10] 丁伟. 具有通用机的两组工件的排序问题[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2004, 43(2): 33-36.
- DING W. Scheduling problem on general purpose machinery and two groups tasks with uniform processors [J]. Journal of Zhongshan University: Natural Science Edition, 2004, 43(2): 33-36.
- [11] 丁伟. 具有通用机的三组工件的排序问题[J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2005, 11(1): 48-51.
- DING W. A scheduling problem on a general-purpose machine and many-group tasks with indential processors [J]. Journal of Shanghai University: Natural Science Edition, 2005, 11(1): 48-51.
- [12] 丁伟. 具有通用机的四组工件的排序问题[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2005, 33(10): 108-111.
- DING W. A Type of scheduling problem on general-purpose machinery and four-group tasks with uniform processors [J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2005, 33(10): 108-111.
- [13] 丁伟. 具有通用机的 n 组工件的排序问题[J]. 运筹学学报, 2006, 10(4): 122-126.
- DING W. A type of scheduling problem on general-purpose machinery and n -group tasks with uniform processors [J]. OR transactions, 2006, 10(4): 122-126.

A Type of Scheduling Problem on m General-Purpose Machinery and n Group Tasks with Uniform Processors

DING Wei

(Department of Mathematics // Department of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The $C_{\max}$ problem on many-group jobs with m general-purpose machinery and n special-purpose machineries with the same speed was studied in this paper. This problem is always a NP-Hard problem, and an approximate method need to be found. An improved LPT algorithm and the upper bound performance are given. The ratio of the approximate solution and the best solution is $(2m+1)/(m+1)$.

Key words: heuristic approach; performance indexes; LS algorithm; LPT algorithm; general-purpose and special-purpose machinery