

一类二阶具多偏差变元微分方程周期解的存在性^{*}

郭承军¹, 王根强²

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;
2. 广东技术师范学院计算机系, 广东 广州 510631)

摘 要: 利用 Mawhin 延拓定理和最佳不等式研究了一类二阶具多偏差变元的微分方程

$$x''(\eta) + f(\eta, x(\eta), x(\tau_0(\eta)))x'(\eta) + \sum_{i=1}^m \beta_i(\eta)g_i(x(\tau_i(\eta))) = p(\eta)$$

的周期解问题, 得到了存在周期解的充分性结果. 进一步对周期解的先验界给出了较好的估计.

关键词: 多偏差; 周期解; 延拓定理

中图分类号: O175.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 06-0005-05

近年来, 国内外关于微分方程的周期解的研究较多, 其中二阶微分方程的周期解的研究较为成熟^[1-12]. 本文利用 Mawhin 延拓定理给出存在 T 周期解的三个充分性条件. 同时, 在周期解界的估计中, 采用了 Li 等^[12] 关于周期函数的最佳不等式, 从而作为我们主要结果的推广也改进了文 [1] 的主要结果.

考虑

$$x''(\eta) + f(\eta, x(\eta), x(\tau_0(\eta)))x'(\eta) + \sum_{i=1}^m \beta_i(\eta)g_i(x(\tau_i(\eta))) = p(\eta) \quad (1)$$

其中 f, τ, x, y 为 $\mathbb{R}^3$ 上的连续函数, 且 f, τ, x, y 关于 η 为 T 周期函数; $g_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, m$) 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数; $\tau_0(\eta), \tau_1(\eta), \tau_2(\eta), \dots, \tau_m(\eta), \beta_1(\eta), \beta_2(\eta), \dots, \beta_m(\eta)$ 及 $p(\eta)$ 都是 T -一周期的连续函数. 为此, 先介绍 Mawhin 延拓定理^[11].

引理 1 (Mawhin 延拓定理)^[11] 设 Z, Y 均为 Banach 空间, $L: D(L) \subset Z \rightarrow Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子, $\Omega \subset Z$ 为有界开集, 且 $N\bar{\Omega} \rightarrow Y$ 在 $\bar{\Omega}$ 是 L -紧的; 如果下列条件成立:

- (1) $Lx \neq \lambda Nx, \forall x \in \partial\Omega \cap D(L), \lambda \in (0, 1)$
- (2) $Nx \notin \text{Im } L, \forall x \in \partial\Omega \cap \ker L$
- (3) $\deg QN, \Omega \cap \ker(L, 0) \neq 0$ 则方程 $Lx = Nx$ 在 $\Omega \cap D(L)$ 上至少有一解.

本文记

$$C_T = \{x \mid x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\ x(\eta+T) = x(\eta), \forall \eta \in \mathbb{R}\}$$

并赋予范数 $\|x\|_0 = \max_{0 \leq \eta \leq T} |x(\eta)|$. 类似的,

记

$$C_T = \{x \mid x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$x(\eta+T) = x(\eta), \forall \eta \in \mathbb{R}\}$$

其中范数为 $\|x\|_1 = \max\{\|x\|_0, \|x'\|_0\}$. 易证 $(C_T, \|\cdot\|_0)$ 与 $(C_T, \|\cdot\|_1)$ 均为 Banach 空间.

引理 2^[12] 假设 $x = x(\eta) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap C_T$ 且 $\zeta \in [0, T]$, 则有

$$\|x\|_0 \leq |x(\zeta)| + \frac{1}{2} \int_0^T |x'(\eta)| d\eta$$

这里系数 $1/2$ 是最佳的.

引理 3^[12] 令 $y \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap C_T$, 则

$$\|y'\|_0 \leq \frac{1}{2} \int_0^T |y''(\eta)| d\eta$$

下面在 C_T 上定义算子

$$L: D(L) \subset C_T \rightarrow C_T, Lx = x''(\eta)$$

$$D(L) = \{x \mid x \in C_T, x'' \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$$

易知

$$\ker(L) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im } L = \{x \mid x \in C_T, \int_0^T x(\eta) d\eta = 0\}$$

故 L 是指标为零的 Fredholm 算子, 令投影算子 P, Q 分别为

$$P: C_T \rightarrow \ker(L), [Px](\eta) = x(0),$$

$$Q: C_T \rightarrow C_T, [Qx](\eta) = \frac{1}{T} \int_0^T x(\eta) d\eta$$

则满足 $\text{Im } P = \ker(L), \text{Im } L = \ker(Q)$. 令 $I_P =$

$I_{D(L) \cap \ker(P)}$, 则 I_P 是可逆的, 其逆为

$$I_P^{-1}: \text{Im } L \rightarrow D(L) \cap \ker(P)$$

* 收稿日期: 2006-11-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471155)

作者简介: 郭承军 (1977年生), 男, 博士研究生; E-mail: guoch817@163.com

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma_p^{-1} y \right] (t) = \frac{1}{T} \int_0^T (t-s) y(s) ds + \\ & \int_0^T (t-s) y(s) ds \in D(L) \end{aligned} \quad (2)$$

1 主要结果

定理 1 设

$$\begin{aligned} h &= \sup_{(t,x,y) \in \mathbb{R}} |f(t,x,y)| < \frac{2}{T} \\ \beta_i^{(2)} &= \max_{t \in [0,T]} \beta_i(t) \geq \beta_i(t) \geq \beta_i^{(1)} = \\ & \inf_{t \in [0,T]} \beta_i(t) > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

且条件

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{g_i(x)}{x} \right| \leq r_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (4)$$

$$\text{和} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}(x) g_i(x) = +\infty \quad (5)$$

满足, 则当 $\beta_1^{(2)} T + \beta_2^{(2)} T + \dots + \beta_m^{(2)} T < \frac{2(2-hT)}{T^2}$

时, 方程 (1) 存在 T -周期解。

证明 $Lx = X''(t) N_1(t) \rightarrow C_T$,

$$\begin{aligned} & [N_1 y](t) = -f(t, x(t), x(t-\tau_0(t))) x'(t) - \\ & \sum_{i=1}^m \beta_i(t) g_i(x(t-\tau_i(t))) + P(t) \end{aligned} \quad (6)$$

则方程 (1) 可化为算子方程 $Lx = N_1 x$, 其中 L 是 $D(L) \subset C_T \rightarrow C_T$ 的指标为零的 Fredholm 算子。记

$$\Omega_1 = \{x | x \in D(L), Lx = \lambda N_1 x, \lambda \in (0,1)\}$$

则对任意的 $x \in \Omega_1$ 得

$$\begin{aligned} & x''(t) + \lambda f(t, x(t), x(t-\tau_0(t))) x'(t) + \\ & \lambda \sum_{i=1}^m \beta_i(t) g_i(x(t-\tau_i(t))) = \lambda P(t) \end{aligned} \quad (7)$$

下面我们断言: 一定存在某个 $\zeta^* \in \mathbb{R}$ 使得

$$|x(\zeta^*)| \leq \bar{M} \quad (8)$$

其中 $\bar{M}$ 与 λ 无关。事实上, 令 t 为 $x(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上取得最大值点, 则 $x'(t) = 0$, $x''(t) \leq 0$ 。由 (7) 得

$$\sum_{i=1}^m \beta_i(t) g_i(x(t-\tau_i(t))) - P(t) \geq 0 \quad (9)$$

由 (5) 知, $\lim_{x \rightarrow \infty} g_i(x) = -\infty$ ($i=1,2,\dots,m$)。因此必存在 $M_0 > 0$ 使得当 $x \leq -M_0$ 时有

$$g_i(x) < \frac{1}{m\beta_i(t)} P(t) \quad (10)$$

由 (9) 和 (10) 可推出 $x(t-\tau_1(t)), x(t-\tau_2(t)), \dots, x(t-\tau_i(t))$ 中必定有一个大于 $-M_0$ 。不妨设 $x(t-\tau_1(t)) > -M_0$ 。记 $\zeta_0 = t-\tau_1(t)$, 即有

$$x(\zeta_0) > -M_0 \quad (11)$$

同理, 可以证明存在 $M_0^* > 0$ 和 ζ_1 , 使得

$$x(\zeta_1) < M_0^* \quad (12)$$

记 $\bar{M} = \max\{M_0, M_0^*\}$, 则由 (11) 和 (12) 得

$$x(\zeta_0) > -\bar{M} \quad (13)$$

$$x(\zeta_1) < \bar{M} \quad (14)$$

由 (13), (14) 并利用介值定理可知, 在 ζ_0 与 ζ_1 之间必定存在一点 ζ^* 使得 (8) 成立, 即 (8) 得证。

记 $\zeta^* = kT + \frac{1}{2}$, $k \in [0, T]$ (其中 k 为整数), 因为 $x(t)$ 是 T 周期函数, 则由 (8) 有

$$|x(\frac{1}{2})| = |x(\zeta^*)| \leq \bar{M}$$

于是分别由引理 2 和引理 3 有

$$\|x\|_0 \leq \bar{M} + \frac{1}{2} \int_0^T |x'(s)| ds \quad (15)$$

$$\text{和} \quad \|x'\|_0 \leq \frac{1}{2} \int_0^T |x''(s)| ds \quad (16)$$

由 (4) 式知, 对给定的

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[\frac{2(2-hT)}{T^2} - (\beta_1^{(2)} T + \beta_2^{(2)} T + \dots + \beta_m^{(2)} T) \right]$$

存在 $M > 0$ ($M > \bar{M}$), 使当 $|x(t-\tau_i(t))| > M$ 时有

$$\begin{aligned} & |g_i(x(t-\tau_i(t)))| \leq \\ & \left(r_i + \frac{\epsilon}{m\beta_i^{(2)}} \right) |x(t-\tau_i(t))| \\ & (i=1,2,\dots,m) \end{aligned} \quad (17)$$

定义集合

$$\begin{aligned} E_1^{(i)} &= \{t | t \in [0, T], |x(t-\tau_i(t))| > \\ & M (i=1,2,\dots,m)\} \end{aligned} \quad (18)$$

和 $E_2^{(i)} = [0, T] \setminus E_1^{(i)}$, ($i=1,2,\dots,m$) (19) 并记

$$\rho_i = \max_{x \leq M} |g_i(x)|, (i=1,2,\dots,m) \quad (20)$$

由 (3), (7), (16) 至 (20) 式可得

$$\begin{aligned} & \|x'\|_0 \leq \frac{1}{2} \int_0^T |x''(s)| ds \leq \\ & \frac{\lambda}{2} \int_0^T |f(t, x(t), x(t-\tau_0(t))) x'(t) + \\ & \sum_{i=1}^m \beta_i(t) |g_i(x(t-\tau_i(t)))| + |P(t)| dt \leq \\ & \frac{\lambda hT}{2} \|x'\|_0 + \frac{\beta_1^{(2)}}{2} \left[\int_{E_1^{(1)}} |g_1(x(t-\tau_1(t)))| dt + \right. \\ & \left. \int_{E_1^{(2)}} |g_2(x(t-\tau_2(t)))| dt + \dots + \right. \\ & \left. \frac{\beta_m^{(2)}}{2} \left[\int_{E_1^{(m)}} |g_m(x(t-\tau_m(t)))| dt + \right. \right. \\ & \left. \left. \int_{E_2^{(m)}} |g_m(x(t-\tau_m(t)))| dt \right] + \frac{T}{2} \|P\|_0 \leq \\ & \frac{hT}{2} \|x'\|_0 + \frac{T}{2} (\beta_1^{(2)} T + \beta_2^{(2)} T + \dots + \\ & \beta_m^{(2)} T + \epsilon) \|x\|_0 + C_0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $C_0 = \frac{1}{2} \{[\beta_1^{(2)} \rho_1 + \beta_2^{(2)} \rho_2 + \dots + \beta_m^{(2)} \rho_m] +$

$\|P\|_0\} T$ 。由 ϵ 的选择及 (15) 有

$$\|x'\|_0 \leq \frac{hT}{2} \|x'\|_0 + \frac{\overline{MT}}{4} \left[\frac{2(2-hT)}{T} + (\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m) \right] + \frac{T}{8} \left[\frac{2(2-hT)}{T} + (\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m) \right] \|x'\|_0 + C_0$$

从而有

$$\|x'\|_0 \leq \frac{4C_0 + \frac{2(2-hT)}{T} \overline{M} + (\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m) \overline{MT}}{2-hT - \frac{T^2}{2} (\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m)}$$

结合 (15) 式知一定存在某个 $M_1 > 0$ 使对任意 $x \in \Omega_1$ 都有 $\|x\|_0 \leq M_1$, $\|x'\|_0 \leq M_1$, 故 $\Omega_1 \subset \{x \mid \|x\|_1 \leq M_1\}$ 为有界集。接着我们设

$$\Omega_2 = \{x \mid x \in \ker L \cap C_0, N(x) \in \mathbb{R} \} \quad (22)$$

令 $x(t) \in \Omega_2$, 则 $x(t) \equiv c$ 且满足

$$\int_0^T [N x](t) dt = \int_0^T \left[- \sum_{i=1}^m \beta_i(t) g_i(x(t - \tau_i(t)) + p(t)) \right] dt = 0 \quad (23)$$

由 (5) 和 (23) 知存在与 λ 无关的常数 $M_2 > 0$ 使得对任意的 $x(t) \in \Omega_2$ 都有 $|x(t)| = |c| \leq M_2$, 从而 Ω_2 为有界集。进一步由 (5) 知存在 $M_3 > 0$ 当 $|x| > M_3$ 时有

$$\operatorname{sgn}(x) g_i(x) > \frac{1}{m\beta_i} \|p\|_0 \quad (24)$$

取 $\Omega = \{x \mid \|x\|_1 < M_4\}$, 其中 $M_4 > \max\{M_1, M_2\} + M_3$ 显然 Ω 为有界开集且 $\Omega \supset \Omega_1 \cup \Omega_2$ 。由 (2) 及 (6) 知 N 在 Ω 上是 L -紧的。对任意的 $x \in \partial\Omega \cap D(L)$ 和对任意的 $\lambda \in (0, 1)$ 均有 $Lx \neq Nx$ 作变换

$$H(x; \mu) = -\mu x - \frac{1}{T}(1-\mu)$$

$$\int_0^T \left[\sum_{i=1}^m \beta_i(t) g_i(x(t - \tau_i(t)) - p(t)) \right] dt$$

因当 $x \in \ker L \cap \partial\Omega$ 时, 显然有 $x = M_4 (> M_3)$ 或 $x = -M_4$, 故由 (6), (24) 和算子 Q 的定义易知

$$(QN)x = \frac{1}{T} \int_0^T \left[- \sum_{i=1}^m \beta_i(t) g_i(x(t - \tau_i(t)) + p(t)) \right] dt \neq 0$$

易证 $H(x; \mu)$ 是一个同伦。因此有

$$\deg\{QN, \Omega \cap \ker L, 0\} = \deg\{-x, \Omega \cap \ker L, 0\} \neq 0$$

故由引理 1 知, 方程 (1) 至少存在一个 T -周期解。

定理 2 设

$$\sigma = \inf_{x \in [0, T] \times \mathbb{R}} f(t, x, y) > 0 \quad (25)$$

且定理 2.1 中的 (3), (4) 和 (5) 均满足, 则当

$$\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m < \frac{2\sigma}{T}$$

时, 方程 (1) 存在周期解。

证明 类似于定理 1 的证明, 存在 $t \in [0, T]$ 和正数 $\overline{M}$ 使得

$$\|x\|_0 \leq \overline{M} \quad (26)$$

其中, $\overline{M}$ 是与 λ 无关的常数。将 (7) 式两端乘以 $x'(t)$ 并在 $[0, T]$ 上积分, 整理得

$$\int_0^T p(t) x'(t) dt =$$

$$\int_0^T f(t, x(t), x(t - \tau_0(t))) [x'(t)]^2 dt + \int_0^T \left[\sum_{i=1}^m \beta_i(t) g_i(x(t - \tau_i(t))) \right] x'(t) dt \quad (27)$$

由 (25) 和 (27) 有

$$\sigma \int_0^T |x'(t)|^2 dt \leq - \int_0^T \left[\sum_{i=1}^m \beta_i(t) g_i(x(t - \tau_i(t))) \right] x'(t) dt + \int_0^T p(t) x'(t) dt \quad (28)$$

$$\text{取 } (\epsilon = \frac{1}{2} \left[\frac{2\sigma}{T} - (\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m) \right])$$

由 (4) 式可知存在 $\eta > 0$ 当

$$|x(t - \tau_i(t))| > \eta \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

有 $|g_i(x(t - \tau_i(t)))| \leq$

$$\left(\eta + \frac{\epsilon}{m\beta_i^{(2)}} \right) |x(t - \tau_i(t))| \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

用 η 取代 M 便得到 (18) 至 (20) 由引理 2, (18) 至 (20), (26), (28) Cauchy 不等式可得

$$\sigma \int_0^T |x'(t)|^2 dt \leq$$

$$\sum_{i=1}^m \int_0^T \beta_i^{(2)} |g_i(x(t - \tau_i(t)))| |x'(t)| dt + \sum_{i=1}^m \int_0^T \beta_i^{(2)} |g_i(x(t - \tau_i(t)))| |x'(t)| dt +$$

$$\int_0^T |p(t)| |x'(t)| dt \leq$$

$$\left[(\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m) + \epsilon \right] \cdot \left[\overline{M} + \frac{1}{2} \int_0^T |x'(t)| dt \int_0^T |x'(t)| dt + \right.$$

$$C_1 \int_0^T |x'(t)| dt \leq$$

$$\left[C_1 + (\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m + \epsilon) \overline{M} \right] \cdot \left(T \int_0^T |x'(t)|^2 dt \right)^{1/2} +$$

$$\frac{1}{2} \left[(\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m) + \epsilon \right]$$

$$T \int_0^T |x'(\eta)|^2 d\eta \quad (29)$$

其中

$$C_1 =$$

$$\{[\rho_1 \beta_1^{(2)} f + \rho_2 \beta_2^{(2)} f + \dots + \rho_m \beta_m^{(2)} f] + \|P\|_0\}$$

由 (29) 得

$$\left\{1 - \frac{T}{2}[(\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m) + \epsilon]\right\} \cdot \int_0^T |x'(\eta)|^2 d\eta \leq [C_1 + (\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m + \epsilon) \overline{M}_1] T^{1/2} \left(\int_0^T |x'(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2}$$

由上式和 ϵ 的选择有

$$\int_0^T |x'(\eta)|^2 d\eta \leq \frac{1}{T}$$

$$\left[\frac{4TC_1 + 4\sigma \overline{M}_1 + 2T\overline{M}_1(\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m)}{2\sigma - T(\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m)} \right]^2$$

结合引理 1.2 和 Cauchy 不等式, 进一步有

$$\|x\|_0 \leq \overline{M}_1 + \frac{T}{2} \left(\int_0^T |x'(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \leq M_1 \quad (30)$$

其中

$$M_1 = \overline{M}_1 +$$

$$\frac{2TC_1 + 2\sigma \overline{M}_1 + T\overline{M}_1(\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m)}{2\sigma - T(\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m)}$$

和

$$N_2^{(1)} = \sup_{|x| \leq M_1} |g(x)|$$

由 (27) 有引理 3 (7) 知 Ω_1 为有界集, 余下证明类似定理 1 中的证明。

设 $f(t, x, y) = f_1(t, x, y) + f_2(t, x, y)$, 其中 $f_1(t, x, y)$ 和 $f_2(t, x, y)$ 均在 R^3 连续, 且对任意的 $(x, y) \in R^2$, $f_1(t, x, y) + f_2(t, x, y)$, 均是关于 t 的 T -周期函数, 则有下列结果:

定理 3 若 $\inf_{(t, x, y) \in R^3} f_1(t, x, y) \geq 0$

$\sup_{(t, x, y) \in R^3} |f_2(t, x, y)| = \delta < \frac{1}{2T}$, 且定理 1 中的 (3), (4) 和 (5) 均满足, 则当 $(\beta_1^{(2)} f + \beta_2^{(2)} f + \dots + \beta_m^{(2)} f_m) < \frac{1-2\delta T}{T}$ 时, 方程 (1) 至少存在一个

T -周期解。

证明类似文 [10] 中的引理 3, 故在此略证。

3 例子和注记

$$x'(\eta) + [1 + x(\eta) + x(\eta - \frac{2}{\pi})] x'(\eta) +$$

$$\frac{1}{14} [x(\eta - \cos \eta) + x(\eta - \sin \eta)] = 2 \cos \eta - \sin \eta$$

$$(31)$$

由于 $f + f = \frac{1}{7}$, $\sigma = 1$, 故 $\frac{1}{7} < \frac{\sigma}{T} = \frac{1}{2\pi}$, 因而由本

文定理 2 可知, 方程 (31) 存在 2π 周期解。

显然上述结论是不能由文 [8-9, 11] 的结果得到, 因而本文的结论是有关微分方程周期解问题研究的新的结果。由本文的定理, 对于文 [9] 中的方程

$$x'(\eta) + f_1(t, x(\eta), x(\eta - \tau_0(\eta))) x'(\eta) + \beta(\eta) g(x(\eta - \tau_1(\eta))) = P(\eta) \quad (32)$$

立即得到如下三个推论:

推论 1 设,

$$f = \sup_{(t, x, y) \in R^3} |f_1(t, x, y)| < \frac{2}{T}$$

$$\beta_1 = \max_{\eta \in [0, T]} \beta(\eta) \geq \beta(\eta) \geq \beta_0 = \inf_{\eta \in [0, T]} \beta(\eta) > 0$$

且条件

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} | \frac{g(x)}{x} | \leq r \quad (33)$$

和

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}(x) g(x) = +\infty \quad (34)$$

满足, 则当 $\frac{2(2-fT)}{\beta_1 T} < 1$ 时, 方程 (32) 至少存在一个 T -周期解。

推论 2 设

$$\sigma = \inf_{(t, x, y) \in [0, T] \times R^2} f_1(t, x, y) > 0$$

$$\beta_1 = \max_{\eta \in [0, T]} \beta(\eta) \geq \beta(\eta) \geq \beta_0 = \inf_{\eta \in [0, T]} \beta(\eta) > 0$$

且条件 (34) 和 (35) 满足, 则当 $\frac{2\sigma}{\beta_1 T} < 1$ 时, 方程 (34) 至少存在一个 T -周期解。

推论 3 若

$$\inf_{(t, x, y) \in R^3} f_1(t, x, y) \geq 0$$

$$\sup_{(t, x, y) \in R^3} |f_2(t, x, y)| = \delta < \frac{1}{2T}$$

$$\beta_1 = \max_{\eta \in [0, T]} \beta(\eta) \geq \beta(\eta) \geq \beta_0 = \inf_{\eta \in [0, T]} \beta(\eta) > 0$$

且条件 (32) 和 (34) 满足, 则当 $\frac{1-2\delta T}{\beta_1 T} < 1$ 时, 方程 (32) 至少存在一个 T -周期解。

注 1 推论 1 将文 [9] 中定理 1 的条件

$$f = \sup_{(t, x, y) \in R^3} |f_1(t, x, y)| < \frac{1}{T}$$

和

$$\frac{1}{T} < (1 - fT) \beta_1 T$$

分别改进为较弱的条件

$$f = \sup_{(t, x, y) \in R^3} |f_1(t, x, y)| < \frac{2}{T}$$

和

$$\frac{1}{T} < 2(2 - fT) \beta_1 T$$

注 2 推论 2 将文 [9] 中定理 2 的条件

$$\frac{1}{T} < \sigma \beta_1 T$$

改进为较弱的条件

$$\frac{1}{T} < 2\sigma \beta_1 T$$

注 3 推论 3 将文 [9] 中定理 3 的条件
 $\tau < (1 - 2\delta T) / 2\beta_1 T^2$
改进为较弱的条件
 $\tau < (1 - 2\delta T) / \beta_1 T$

参考文献:

[1] DING T R The nonlinear oscillation on the resonance point[J]. Science in China Ser A 1982(1): 1—13
[2] OMARI P ZANOLINI P A note on nonlinear oscillation at resonance[J]. Acta Mathematica 1987 3(3): 351—361
[3] 葛渭高. 一类 n 维—Lé nard 方程的调和解[J]. 数学年刊, 1990 11A(3): 297—307
[4] GE W G On the existence of harmonic solution of Lé nard system[J]. Nonlinear Analysis TMA 1991 16(2): 183—190
[5] 徐登洲, 马如云. 线性微分方程的非线性扰动[M]. 北京: 科学出版社, 1998
[6] IANNACI R NKASHAMA M N Lecture Notes in Math

[M]. Berlin: Sping—Verlag 1984 224—232
[7] 黄先开. 具有时滞的保守系统的 2π 周期解[J]. 系统科学与数学, 1989 9(4): 298—308
[8] HUANG X K XIANG Z G On the existence of 2π -periodic solution for delay duffing equation $x'(t) + g(x(t-\tau)) = p(t)$ [J]. Chinese Science Bulletin 1994 39(3): 201—203
[9] LU S P GE W G Periodic solutions of the second order differential equation with deviating arguments[J]. Acta Mathematica Sinica 2002 45(4): 811—818
[10] GANES R MAWHIN J Coincidence degree nonlinear differential equation[M]. Berlin: Springer—Verlag 1977.
[11] WANG G Q YAN J R Existence of periodic solutions for second order nonlinear neutral delay equations[J]. Acta Mathematica Sinica 2004 47(2): 379—384
[12] LI J W, WANG G Q Sharp inequalities for periodic functions[J]. Applied Mathematics E—Notes 2005 (5): 75—83

Existence of Periodic Solutions for A Class of Second-Order Differential Equation With Multiple Deviating Arguments

GUO Cheng-Jun, WANG Gen-qiang

- (1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China
2. Department of Computer Science, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: BY means of Mawhin's continuation theorem and sharp inequalities for periodic functions, a second order differential equation with multiple deviating arguments is studied. Sufficient conditions are given for the existence of periodic solutions. Moreover, a better estimate can be obtained for the priori bounds of periodic solutions.
Key words: multiple deviating arguments; periodic solutions; Mawhin's continuation theorem