

B 样条曲线曲面的降阶方法^{*}

覃 廉, 关履泰

(中山大学 科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘 要: 基于优化技术, 给出了 B 样条曲线曲面降阶的简便方法, 曲线曲面降多阶问题只需要求解一个线性方程组。该方法不管是算法复杂性还是降阶逼近效果都明显好于之前方法, 最后还进行了解的存在性分析和误差分析。

关键词: B 样条; 曲线曲面降阶; 二次规划

中图分类号: TP391.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 04-0019-05

曲线曲面的降阶是计算机辅助几何图形设计中一个非常重要的技术。由于它的实际应用背景, 使得它成为目前的研究热点。对于 Bezier 曲线曲面, 已经有了大量的研究成果^[1-3]。然而 B 样条曲线曲面的降阶方法, 则还不够成熟, 特别是 B 样条曲面, 鲜有人提出比较好的降阶方法。现有 B 样条曲线降阶方法中, Pieg1 等^[4]首先将 B 样条曲线分解成若干段 Bezier 曲线, 然后对各段 Bezier 曲线进行降阶, 最后删除多余的节点得到降阶的 B 样条曲线。文献 [5] 先对 B 样条曲线分段用最小二乘法进行降阶, 然后再对所产生的多组控制顶点进行加权组合。另一类方法是基于控制点扰动的降阶方法^[6-9], 此类方法通过极小化扰动项退化 B 样条曲线逼近原曲线, 文献 [9] 还给出了退化 B 样条曲线精确降一阶的降阶公式。文献 [10] 指出了该类方法的弊端, 并且提出了一种采用最佳平方逼近技术对 B 样条曲线做降阶运算的方法, 但文中只给出了基本思路, 没有给出具体的算法和误差分析。文献 [11] 应用 NURBS 曲线的显式矩阵表示以及 Chebyshev 多项式理论进行处理, 实现了 NURBS 曲线的一次降多阶。该方法对单段 NURBS 曲线段降阶效果比较好, 但对整条曲线的降阶处理方法是, 先分段处理, 再将降阶后的各曲线段相同位置上的控制点和权因子进行平均, 从而得到近似最优的降阶逼近曲线, 显然该方法得到的并不是全局最优的降阶逼近曲线。以上方法均只能处理 B 样条曲线的降阶逼近, 难以推广到曲面的降阶逼近。

本文提出了一种 B 样条曲线曲面降阶的快速算法, 可以实现 B 样条曲线曲面一次降多阶, 降阶后

的 B 样条曲线曲面具有全局最优性质。然后进行解的存在性分析和误差分析, 最后给出数值算例。

1 基于优化技术的 B 样条曲线降阶

设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 为给定的 n 个控制点, 由这些控制点定义的 r 次 ($r+1$ 阶) B 样条曲线为

$$f(t) = \sum_{j=1}^n P_j N_{j,r}(t), 0 \leq t \leq 1$$

(注: 本文中参数 t 全部规范化到区间 $[0, 1]$ 对于参数区间不是 $[0, 1]$ 的情形, 可以使用域参数变换的方法变换到 $[0, 1]$ 区间。)

其中, $N_{j,r}(t)$ 是 B 样条基函数,

$$N_{i,r}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_{i,r-1}(u) + \frac{t_{i+r+1} - t}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1,r-1}(u),$$
$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0 & t \notin [t_i, t_{i+1}); \end{cases} \quad (1)$$

B 样条曲线的降阶问题, 实际上就是要在某个参数分划 $\pi: \dots < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ 上, 找到一条 k ($k < r$) 次 ($k+1$ 阶) B 样条曲线

$$g(t) = \sum_{j=1}^m Q_j N_{j,k}(t), 0 \leq t \leq 1$$

使得 $g(t)$ 尽可能地逼近 $f(t)$ 。一般来说, 我们希望降阶后的 B 样条曲线跟原 B 样条曲线有相同的分段, 即降阶前后两曲线上的参数节点相同, 高阶的 B 样条基函数 $N_{j,r}(t)$ 可由降阶后的低阶 B 样条基函数 $N_{j,k}(t)$ 通过公式 (1) 递推得到。这样, 低阶的 B 样条基函数就可以确定下来。如果不限定降阶后的 B 样条曲线跟原 B 样条曲线具有相同的分段, 可以根据实际需要灵活设置参数节点。最后的

* 收稿日期: 2005-05-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10572154 60475042); 香港中山大学高等学术研究中心基金会资助项目 (05M7)

作者简介: 覃廉 (1979 年生), 男, 博士, 通讯联系人: 关履泰, E-mail: qin_lian@126.com

数值算例显示了采用不同的参数节点个数 (控制点个数) 得到的不同结果。

两曲线的逼近程度, 可以用两曲线的差的范数来度量, 即使得它们的差在某种范数下达到极小。这里, 采用具有最小二乘意义的 L_2 范数, 采用 L_2 范数可以将问题转化为二次规划问题, 易于求解。采用其他类型范数可能会转化为非线性规划问题。对于 B 样条参数曲线的每一个坐标分量 (x 或 y 或 z), 定义如下目标函数

$$J = \|g - f\|_2^2 = \int_0^1 [g(t) - f(t)]^2 dt = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^m Q_i N_{ik}(t) \right]^2 - 2 \left[\sum_{i=1}^m Q_i N_{ik}(t) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^n P_j N_{jr}(t) \right] + \left[\sum_{j=1}^n P_j N_{jr}(t) \right]^2 dt = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Q_i Q_j H_{ij} - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Q_i P_j S_{ij} + G$$

其中, $H_{ij} = \int_0^1 N_{ik}(t) N_{jk}(t) dt$, $S_{ij} = \int_0^1 N_{ik}(t) N_{jr}(t) dt$

$G = \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n P_j N_{jr}(t) \right]^2 dt$ 都可以直接求出。因为 B 样条基函数是分段多项式, 可以用符号计算求精确积分, 也可以用数值积分方法求给定精度的积分值。

这样, B 样条曲线降阶问题就转化为二次规划问题:

$$\min J = \min Q^T H Q - 2 P^T S Q \quad (2)$$

其中, $Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_m]^T$, $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]^T$, H 为 $m \times m$ 阶矩阵, S 为 $n \times m$ 阶矩阵, G 为常数, 在目标函数中可以省略。

要求解该最小化问题, 令 $\frac{\partial J}{\partial Q} = 0$ 即求解线性方程组

$$H Q - S^T P = 0 \quad (3)$$

就可以得到降阶后的 B 样条曲线的控制点的某一坐标分量 (x 或 y 或 z)。这里, 采用共轭梯度法求解。对于三维空间中的 B 样条曲线, 控制点是三维向量, 则分别对 x , y , z 坐标分量, 都解一次线性方程组 (3)。最后得到降阶后 B 样条曲线的控制点坐标。

2 基于优化技术的 B 样条曲面降阶

B 样条曲面的降阶逼近, 就是指用一张 $k \times l$ 次的 B 样条曲面去逼近一张已知的 $r \times s$ 次的 B 样条曲面 ($k < r$, $l < s$)。对于以控制点 P_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n_1$, $j = 1, 2, \dots, n_2$) 定义的 $r \times s$ 次张量积型 B 样条曲面

$$P(u, v) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} P_{ij} N_{ir}(u) N_{js}(v), \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

求一张以 Q_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m_1$, $j = 1, 2, \dots, m_2$) 为控制点的 $k \times l$ 次 B 样条曲面

$$Q(u, v) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} Q_{ij} N_{ik}(u) N_{jl}(v), \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

使得 $P(u, v)$ 尽可能地逼近 $Q(u, v)$, 即使得它们的差在某种范数下达到极小。这里, 同样采用具有最小二乘意义的 L_2 范数。对于 B 样条参数曲面的每一个坐标分量 (x 或 y 或 z), 定义如下目标函数

$$J = \|Q(u, v) - P(u, v)\|_2^2 = \int_0^1 \int_0^1 [Q(u, v) - P(u, v)]^2 du dv = \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} Q_{ij} N_{ik}(u) N_{jl}(v) \right]^2 - 2 \left[\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} Q_{ij} N_{ik}(u) N_{jl}(v) \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} P_{ij} N_{ir}(u) N_{js}(v) \right] + \left[\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} P_{ij} N_{ir}(u) N_{js}(v) \right]^2 du dv = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{g=1}^{m_1} \sum_{h=1}^{m_2} Q_{ij} Q_{gh} H_{ijgh} - 2 \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{g=1}^{n_1} \sum_{h=1}^{n_2} Q_{ij} P_{gh} S_{ijgh} + G$$

其中,

$$H_{ijgh} = \int_0^1 \int_0^1 N_{ik}(u) N_{jl}(v) N_{gk}(u) N_{hl}(v) du dv = \int_0^1 N_{ik}(u) N_{gk}(u) du \int_0^1 N_{jl}(v) N_{hl}(v) dv$$

$$S_{ijgh} = \int_0^1 \int_0^1 N_{ik}(u) N_{jl}(v) N_{gr}(u) N_{hs}(v) du dv = \int_0^1 N_{ik}(u) N_{gr}(u) du \int_0^1 N_{jl}(v) N_{hs}(v) dv$$

$$G = \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} P_{ij} N_{ir}(u) N_{js}(v) \right]^2 du dv$$

都可以直接求出。跟曲线情况类似, 因为 B 样条基函数都是分段多项式, 可以用符号计算求精确二重积分, 也可以使用数值积分方法求给定精度的积分值。

如果令

$$Q = [Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{1m_2}, Q_{21}, \dots, Q_{2m_2}, Q_{31}, \dots, Q_{m_1 m_2}]^T, \\ P = [P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n_2}, P_{21}, \dots, P_{2n_2}, P_{31}, \dots, P_{n_1 n_2}]^T,$$

$$H_{(m_1 \times m_2) \times (m_1 \times m_2)} =$$

$$\begin{bmatrix} H_{1111} & \cdots & H_{m_211} & H_{2111} & \cdots & H_{m_1m_211} \\ H_{1112} & \cdots & H_{m_212} & H_{2112} & \cdots & H_{m_1m_212} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{11m_2} & \cdots & H_{m_21m_2} & H_{211m_2} & \cdots & H_{m_1m_2m_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{1m_1m_2} & \cdots & H_{m_2m_1m_2} & H_{2m_1m_2} & \cdots & H_{m_1m_2m_2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{matrix} S_{n_1 \times n_2 \times (m_1 \times m_2)} = \\ \begin{bmatrix} S_{1111} & \cdots & S_{m_211} & S_{2111} & \cdots & S_{m_1m_211} \\ S_{1112} & \cdots & S_{m_212} & S_{2112} & \cdots & S_{m_1m_212} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{111n_2} & \cdots & S_{m_21n_2} & S_{211n_2} & \cdots & S_{m_1m_21n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{1m_1n_2} & \cdots & S_{m_2m_1n_2} & S_{2m_1n_2} & \cdots & S_{m_1m_2m_1n_2} \end{bmatrix}, \end{matrix}$$

Q 是 $(m_1 \times m_2)$ 维向量, 待求; P 是 $(n_1 \times n_2)$ 维向量; H 为 $(m_1 \times m_2) \times (m_1 \times m_2)$ 阶矩阵; S 为 $(n_1 \times n_2) \times (m_1 \times m_2)$ 阶矩阵; G 为常数, 在目标函数中可以省略。这样 B 样条曲面降阶问题就可以归结为如下二次规划问题:

$$\min J = \min Q^T H Q - 2P^T S Q \tag{4}$$

求解该问题等价于求解 $\frac{\partial J}{\partial Q}=0$ 即求解线性方程组

$$H Q - S^T P = 0 \tag{5}$$

即可求得降阶后 B 样条曲面控制点的某一坐标分量(x 或 y 或 z)。对于三维空间, B 样条曲面的控制点是三维向量, 则分别对 x, y, z 坐标分量, 都解一次线性方程组(5)。最后得到降阶后 B 样条曲面的控制点坐标。

B样条曲面降阶逼近中经常遇到控制点规模很大的问题, 此时求解速度会变得很慢。因为 B 样条基函数具有局部支撑性, 对于曲线降阶问题(3), $H_{ij} = \int_0^1 N_{ik}(t)N_{jk}(t)dt$ 当 N_{ik}, N_{jk} 的支撑区域不重合时, $H_{ij} = 0$ 对于曲面降阶问题(5), $H_{igh} = \int_0^1 N_{ik}(u)N_{gk}(u)du \int_0^1 N_{jl}(v)N_{hl}(v)dv$ 当 $N_{ik}(u), N_{gk}(u)$ 或者 $N_{jl}(v), N_{hl}(v)$ 的支撑区域不重合时, $H_{igh} = 0$ 因此, 线性方程组(3)和线性方程组(5)的系数矩阵 H 都是稀疏矩阵, 如果采用针对大型稀疏线性方程组的解法, 可以解决控制点规模大的问题。

3 解的存在唯一性及误差分析

定理 1 本文给出的 B 样条曲线曲面降阶算法的解是存在且唯一的。

证明 对 B 样条曲线降阶问题, 因为对任意的 Q , 都有

$$Q^T H Q = \int_0^1 [\sum_{i=1}^m Q_i N_{ik}(t)]^2 dt \geq 0$$

当且仅当 Q 为零向量时等号成立。并且 $H_{ij}=H_{ji}$, 所以 H 是对称正定矩阵, 故线性方程组(3)有唯一解。根据二次规划理论, (2)中的目标函数是凸函数, (2)就是凸二次规划问题。只要可行域不空就必定是凸集, 它的 K-T 点就是局部极小点, 也是它的全局极小点。因为问题(2)式是无约束的二次规划, 可行域当然非空, 故线性方程组(3)的解就是全局极小点。

同理, 对于 B 样条曲面降阶问题, 因为对任意 Q , 都有

$$Q^T H Q = \int_0^1 \int_0^1 [\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} Q_{ij} N_{ik}(u)N_{jl}(v)]^2 du dv \geq 0$$

当且仅当 Q 为零向量时等号成立。并且 $H_{igh}=H_{ghj}$, 所以 H 是对称正定矩阵。故线性方程组(5)有唯一解, 它的解就是凸二次规划问题(4)的全局极小点。

对于曲线降阶问题, 降阶逼近误差就是

$$E = \min J = \min Q^T H Q - P^T S Q + G$$

当 $H Q - S^T P = 0$ 时, 即 $Q = H^{-1} S^T P$ 时, J 取最小值。此时, 降阶逼近误差为

$$\begin{aligned} E &= J_{\min} = G + Q^T H Q - 2P^T S Q = \\ &G + Q^T S^T P - 2P^T S Q = G - P^T S Q = \\ &G - P^T S H^{-1} S^T P \end{aligned}$$

同理, 对于曲面降阶问题, 降阶逼近误差是

$$E = G - P^T S H^{-1} S^T P$$

对于不满足退化条件的 B 样条曲线降阶, 如果将降阶曲线的控制点数取得足够多, 使得参数间隔 $h = \max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$ 这样, $P^T S H^{-1} S^T P \rightarrow G$ 即 $E \rightarrow 0$ 即如果用段数足够多的低次分段多项式曲线去逼近原高次分段多项式曲线, 那么逼近误差会趋于零。同理, 曲面降阶情况类似。

对于一次降多阶问题, 文[6-9]给出的方法都是每次降一阶, 通过多次降阶计算求得降多阶的低次 B 样条曲线。这样的做法不但计算量大, 而且误差也大。因为每次进行降一阶处理, 使用的目标函数是, 降阶后的曲线与较之高一阶的曲线的某种距离函数(文[6-9]采用控制点扰动)取极小, 并不是降阶后的曲线与原已知曲线的某种距离函数取极小, 每降一阶都会产生一定误差, 而下一次降阶使用与含有误差的曲线的距离作为目标函数, 所以造成误差的积累, 使得降多阶之后误差大大增加。对于降 n 阶的曲线降阶问题, 文献[6-9]方法需要解 n 次 m 阶的线性方程组, 并且使用 n 次降阶公式^[9]。本文方法不管降几阶, 都只需要计

算一次, 而且不会产生误差积累。对于降阶后是 m 个控制点的 B 样条曲线, 只需要解一个 m 阶的线性方程组; 对于降阶后是 $m_1 * m_2$ 个控制点的 B 样条曲面, 需要解一个 $m_1 * m_2$ 阶的线性方程组。不需要使用降阶公式。

4 数值算例

所有数值算例都使用 Matlab7.0 编程, 运行环境为 CPU 迅驰 1.3 内存 512M, 操作系统 Windows XP。

例 1 (取自文 [6]) 已知 4 次 (5 阶) B 样条曲线, 控制点为 (210 50), (10 120), (0 250), (120 300), (320 320), (510 320), (650 260), (630 130), (430 -50)。

使用 8 个控制点, 降阶为 3 次 (4 阶) B 样条曲线后, 如图 1 两曲线误差很小, 基本重合; 使用 8 个控制点, 降阶为 2 次 (3 阶) B 样条曲线后, 如图 2 两曲线比较接近, 但误差比图 1 大。

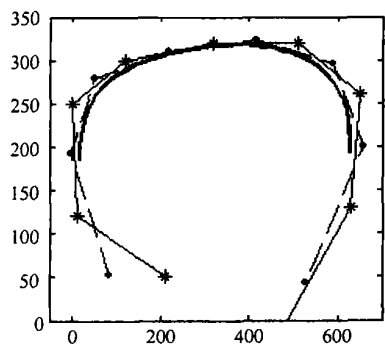


图 1 本文降阶方法, 平均误差 0.24

Fig. 1 Average error 0.24 by this algorithm

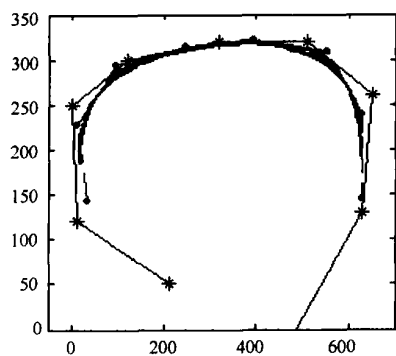


图 2 使用传统方法, 平均误差 3.42

Fig. 2 Average error 3.42 by conventional algorithm

(注: 平均误差计算方法是, 参数 t 在 $[0, 1]$ 区间等距取 100 个点, 计算两曲线在相同参数 t 下的点的距离, 然后取平均值; 曲面则在 $[0, 1]$

$* [0, 1]$ 上等距取 $50 * 50$ 个点, 计算两曲面在

相同参数 (u, v) 下的点的距离, 然后取平均值。实线表示原高阶 B 样条曲线, 虚线表示降阶后的低阶 B 样条曲线。下同。)

例 2 已知 6 次 (7 阶) B 样条曲线, 控制点为 (1 1.95), (2 2.13), (3 1.49), (4 0.74), (5 0.69), (6 1.54), (7 2.67), (8 3.21), (9 2.87), (10 2.17)。

使用文献 [9] 的方法降为 7 个控制点的 3 次 (4 阶) B 样条曲线, 如图 3 使用本文方法降为 7 个控制点的 3 次 (4 阶) B 样条曲线, 如图 4 逼近效果明显好于图 3

例 3 已知双 4 次 B 样条曲面 (如图 5), 降阶为 $5 * 5$ 个控制点的 $3 * 2$ 次 B 样条曲面, 如图 6

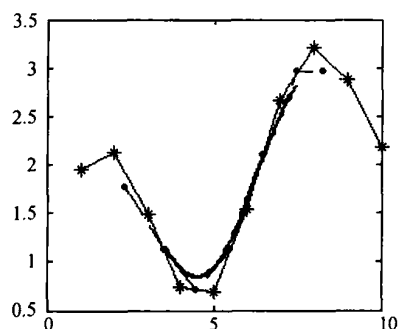


图 3 传统降阶方法平均误差 0.0033

Fig. 3 Average error 0.0033 by the conventional algorithm

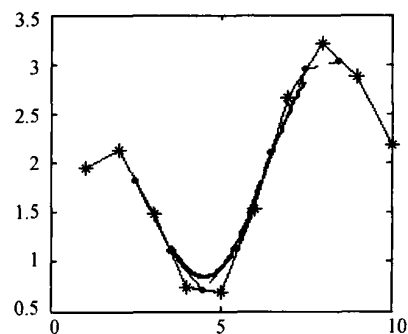


图 4 本文降阶方法, 平均误差 0.0007

Fig. 4 Average error 0.0007 by the algorithm presented here

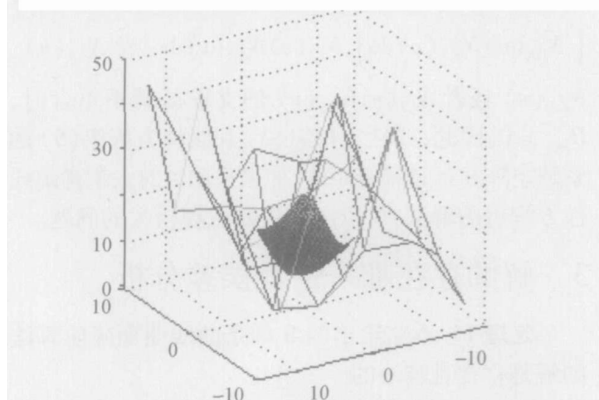


图 5 原曲面

Fig. 5 Original surface

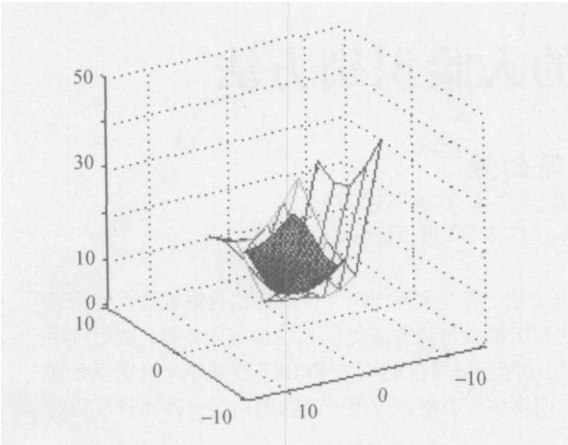


图 6 本文降阶方法, 平均误差 0.0564

Fig 6 Average error 0.0564 by the algorithm presented here

5 小 结

基于优化方法, 本文给出了一种 B 样条曲线曲面降阶的快速算法以及曲线曲面降阶问题的解的存在性分析和误差分析。对于 B 样条曲线降阶问题, 不管是算法复杂性还是降阶逼近效果, 本文方法均好于之前的方法。之前方法由于各种原因, 难以推广到 B 样条曲面降阶情形。对于曲面降阶, 应用本文方法只需要求解一个线性方程组。因为 B 样条基函数的局部支撑特点, 线性方程组的系数矩阵是稀疏矩阵, 采用针对稀疏线性方程组的解法, 对于降阶后控制点个数比较多的 B 样条曲面的求解, 仍然能够轻松应付。

对于曲线曲面降阶问题, 本文方法可以根据精度要求或需要使用任意个数的控制点进行降阶, 并且可以同时处理均匀、非均匀、端点插值或角点插值的样条曲线曲面降阶问题, 甚至均匀 B 样条曲

线曲面降阶后变为非均匀 B 样条曲线曲面, 或者后者降阶后变为前者。此外, 通过对二次规划问题 (2)、(4) 添加约束条件, 还可以实现降阶前后关键点 (如端点、角点等) 重合, 关键点 $1-n$ 阶导数相等要求。因此, 对比之前方法, 本文方法更加灵活, 使用范围更广。

参考文献:

[1] 陈国栋, 王国瑾. 基于广义逆矩阵的曲线降阶逼近 [J]. 软件学报, 2001, 12(3): 435 - 439.

[2] 梁秀霞, 张彩明. 一种端点插值的 Bézier 曲线降阶的方法 [J]. 山东大学学报: 理学版, 2004, 39(1): 68 - 72.

[3] 周登文, 刘芳, 居涛, 等. 张量积 Bezier 曲面降阶逼近的新方法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(6): 553 - 556.

[4] PIEGL L, WAYNE T. A lgorithm for degree reduction of B spline curves[J]. Computer Aided Design, 1995, 27 (2): 101 - 110.

[5] WOLTERS H, J WU G, FARN G. Degree reduction of B-spline curves[J]. Computing Supplement, 1998, 13: 235 - 241.

[6] 雍俊海, 胡事民, 孙家广. 均匀 B 样条曲线的降阶 [J]. 计算机学报, 2000, 23(5): 537 - 540.

[7] 秦开怀, 黄海昆. B 样条曲线降阶新方法 [J]. 计算机学报, 2000, 23(3): 306 - 310.

[8] YONG J, HU S, SUN J et al. Degree reduction of B - spline curves[J]. Computer Aided Geometry Design, 2001, 18(2): 117 - 127.

[9] 潘日晶, 姚志强, 潘日红. B 样条曲线的降阶公式及近似降阶方法 [J]. 计算机学报, 2003, 26(10): 1254 - 1259.

[10] 张彩明, 何军, 张锐. 扰动约束和最佳平方逼近的 B 样条曲线的降阶 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(10): 1392 - 1395.

[11] CHENG M, WANG Guo jin. Multi degree reduction of NURBS curves based on their explicit matrix representation and polynomial approximation theory[J]. Science in China, 2004, 47(1): 44 - 54.

An A lgorithm for Degree Reduction of B- Spline Curves and Surfaces

QIN Lian, GUAN Lü-tai

(Department of Scientific Computation and Computer Applications
Sun Yat Sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract Based on the optimization technique, a convenient algorithm for degree reduction of B-Spline curves and surfaces is presented. Multi-degree reduction of B-Spline curve and surface is achieved by solving systems of linear equations. The algorithm complexity and the approximation result of the algorithm are better than conventional algorithms. In the end, the existence of solution and the error are analyzed.

Key words B-Spline, degree reduction of curves and surfaces, quadratic programming