

混沌与拓扑传递属性^{*}

尹建东¹, 周作领²

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;

2. 中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

摘要: 得到一个动力系统如果存在非几乎周期的(拟)弱几乎周期点, 则存在子系统在修改的狄万内意义下是混沌的。还证明了正规极小点稠密的完全拓扑传递系统是双重拓扑遍历的, 从而对有限型子转移而言, 拓扑强混合与完全拓扑传递等价。

关键词: (拟)弱几乎周期点; 修改狄万内意义下混沌; 有限型子转移; 完全拓扑传递

中图分类号: O189.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 05-0005-04

众所周知, 动力系统研究的核心问题是点的轨道的渐近性与拓扑结构。为了更深刻地认识动力系统中点的轨道拓扑结构与遍历内涵, 文[1-2]相继引进了弱几乎周期点和拟弱几乎周期点这两个概念, 并得到了一些具有重要意义の結果(见文[2]定理1与定理2)。从而无论是从动力系统的角度还是从遍历理论的角度来看, 它使人们对一个动力系统都有更深刻的认识。

本文首先在文[1-2]的基础上, 对由非几乎周期点的拟弱几乎周期点所决定的子系统的混沌状况及其拓扑传递属性进行研究, 得到该子系统在修改的狄万内意义下是混沌的。

其次对于一个完全传递的系统, 如果正规极小点稠密, 则 $(X, T)^m$ 是双重拓扑遍历的 ($\forall n, m \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ 为自然数集, 下同))。从而对有限型子转移而言, 拓扑强混合与完全拓扑传递等价。

1 基本概念

设 (X, T) 是紧致系统, 即 (X, d) 是紧致度量空间且 $f: X \rightarrow X$ 连续。为下面叙述方便这里假设 f 为满射。 $P(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ 非空}\}$, $\Omega(X) = \{(\gamma, \delta) \mid \gamma, \delta \in P(X)\}$ 具有传统意义, 这里不再赘述。

$x \in X$ 称为 (X, T) 的一个弱几乎周期点, 如果对任意的 $\epsilon > 0$ 存在正整数 N , 使得对任意的自然数 n 有

$$\# \{r \mid f^r(x) \in V(x, \epsilon), 0 \leq r < nN\} \geq n$$

$\#(\cdot)$ 表示集合的基数, $V(x, \epsilon)$ 表示以 x 为中心, ϵ 为半径的球形邻域。用 $W(X)$ 表示 (X, T) 的弱几乎周期点集^[1]。 $x \in X$ 称为 (X, T) 的一个拟弱几乎周期点, 如果

对任意的 $\epsilon > 0$ 存在 N 和正整数递增序列 $\{n_i\}$ 使得

$$\# \{r \mid f^r(x) \in V(x, \epsilon), 0 \leq r < n_i N\} \geq n_i, \quad \forall i > 0$$

用 $QW(X)$ 表示 (X, T) 的拟弱几乎周期点集^[2]。

注 1 $A \subseteq B \subseteq W(X) \subseteq QW(X) \subseteq R(X)$, 并且上述包含关系可以是真包含^[3]。

$A = \{a_1 < a_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$, 称 A 为 Synthetic 的, 如果存在正整数 L 使得 $a_{i+1} - a_i < L, \forall i \in \mathbb{N}$; $A \subset \mathbb{N}$ 称为 thick 的, 如果对任意的正整数 L 都能在 A 中找到连续 L 个整数, 即存在 $n_i \rightarrow \infty$ 使得

$$A \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \{n_i, n_i+1, \dots, n_i+L\}$$

$A \subset \mathbb{N}$ 称为正上 Banach 密度集, 如果 $BD^+(A) =$

$$\limsup_{|I| \rightarrow \infty} \frac{\#(A \cap I)}{\#I} > 0$$
 这里的 I 取遍 $\mathbb{N}$ 中的所有区

间; 如果 $D^+(A) = \limsup_{|I| \rightarrow \infty} \frac{\#(A \cap \{0, 1, \dots, n-1\})}{n} > 0$ 则称 A 为正上密度集^[3]。

称为拓扑传递的, 如果存在 $x \in X$ 使得 $\overline{\text{orb}_X(x)} = X$ 。如果对 $\forall n \in \mathbb{N}$ f^n 是拓扑传递的, 则称 (X, T) 是完全拓扑传递的。两个系统 $(X, T), (Y, S)$ 称为弱不交, 如果 $(X \times Y, T \times S)$ 是拓扑传递的。 (X, T) 称为 E -系统, 如果 (X, T) 是拓扑传递的且存在不变概率测度 μ 使得它的支撑 $S_\mu = X$ 。称为拓扑遍历的, 如果对任意的非空开集 $U, V \subset X$ $N_U(V) = \{n \in \mathbb{N} \mid f^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$ 为正上密度

* 收稿日期: 2005-10-24

基金项目: 国家自然科学基金天元基金资助项目(A0424619)

作者简介: 尹建东 (1975年生), 男, 博士生; E-mail: jifenfengchen@yahoo.com

集, 即^[4]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ \# N_f(U \cap V) \cap \{0, 1, \dots, n-1\} \} > 0$$

称为强拓扑遍历的, 如果对任意的非空开集 $U, V \subset X$, $N_f(U \cap V) = \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(V) \cap U \neq \emptyset\}$ 为 Syndetic 集。显然强拓扑遍历蕴涵拓扑遍历。若 $(X \times X, \mathcal{F})$ 是拓扑遍历的, 称 $(X, \mathcal{F})$ 双重拓扑遍历^[5]。

一个动力系统 $(X, \mathcal{F})$ 称为拓扑强混合, 如果对 X 中的任意两非空开集 U, V 存在正整数 M , 当 $n > M$ 时, 有 $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ 。如果它与任何拓扑传递系统弱不交则称它为 Mild-混合的; 如果它与自身弱不交则称它为拓拓扑弱混合的; 显然双重拓扑遍历蕴涵拓拓扑弱混合。如果它与任何强拓扑遍历系统弱不交则称它为极度扩散的; 如果它与任何 E -系统弱不交则称它为强扩散的; 如果它与任何极小系统弱不交则称它为扩散的; 如果它与任何极小等度连续系统弱不交则称它为弱扩散的^[6]。

注 2 拓扑强混合 $\Rightarrow$ Mild-混合 $\Rightarrow$ 拓拓扑弱混合 $\Rightarrow$ 极度扩散 $\Rightarrow$ 强扩散 $\Rightarrow$ 扩散 $\Rightarrow$ 弱扩散 $\Rightarrow$ 完全拓拓扑传递^[6]。

如果存在 $\delta > 0$ 使得对每一点 $x \in X$ 和 x 的任意邻域 U , 存在 $y \in U$ 和 $n > 0$ 满足 $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$ 则称 T 对初值敏感依赖, T 称为敏感常数。如果 T 是拓扑传递的且对初值敏感依赖, 则称 T 是修改的狄万内意义下混沌的^[7]。

$x \in X$ 称为 T 的一个极小点 (也称几乎周期点), 如果对包含 x 的任一开集 U , $N(T, U)$ 为 Syndetic 集, 其中 $N(T, U) = \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in U\}$ 。用 $M(T)$ 表示 T 的所有极小点集 (实际上 $M(T) = A(T)$)。 (X, T) 称为 M -系统, 如果 T 是拓扑传递的且 $\overline{M(T)} = X$ 。 $x \in X$ 称为 T 的正规极小点, 如果对包含 x 的任一开集 U 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall j \in \mathbb{N}$, 有 $T^j(x) \in U$ 。用 $RG(T)$ 表示的所以正规极小点的集合。显然周期点是正规极小点, 正规极小点是极小点^[8]。

2 引理

引理 1^[2] 设 (X, T) 为紧致系统, $x \in R(T)$, 则下述条件等价

- (i) $x \in QW(T)$;
- (ii) $R(V(x)) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$;
- (iii) $x \in G_x$;
- (iv) $\omega(x, T) = \overline{\bigcup_{x \in M_x} S_x}$;
- (v) $C_x = \omega(x, T)$ 。

以上引理中相关的记号所表示的具体意义见文

引理 2^[9] 设 X 为紧致的度量空间, $f: X \rightarrow X$ 连续满射, 则 f 是拓扑遍历且不是敏感依赖于初值条件的充要条件是 f 是一致几乎周期的极小同胚。

引理 3^[9] 若 T 是拓扑传递的且存在具有满支撑的不变的 Bore 概率测度, 则 T 是拓扑遍历的。

3 主要结果

定理 1 设 $x \in QW(T) - A(T)$, 令 $X_1 = \omega(x, T)$, $f_1 = T|_{X_1}$, 则系统 $f_1: X_1 \rightarrow X_1$ 在修改的狄万内意义下是混沌的。

证明 若 $x \in QW(T) - A(T)$, 则由引理 1 知 $x \in \omega(x, T)$ 且对任意的正整数 k 有 $T^k(x) \in \omega(x, T)$ 。从而 $x \in QW(f_1)$ 且对任意的正整数 k $T^k(x) \in QW(f_1)$, $\overline{\text{orb}(x, f_1)} = X_1$ 。再由引理 1 知对任意的正整数 k 以及对包含 $T^k(x)$ 的任意邻域 U 有 $N(T^k(x), U) = \{n \mid T^n(T^k(x)) \in U\}$ 为正上密度集, 从而为正上 Banach 密度集。所以 (X_1, f_1) 是 E -系统, 从而是拓扑遍历的。又 $x \in QW(T) - A(T)$, 所以 (X_1, f_1) 不是极小的。由引理 2 知 f_1 敏感依赖于初值条件, 从而 f_1 是修改的狄万内意义下混沌的。

注 3 在定理 1 中若 $x \in W(T) - A(T)$, 定理 1 结论同样成立。

定理 2 条件同定理 1, 在系统 $f_1: X_1 \rightarrow X_1$ 中, 以下结论成立。

- (1) 拓拓扑弱混合 $\Leftarrow$ 极度扩散 $\Leftarrow$ 强扩散;
- (2) 弱扩散 $\Leftarrow$ 扩散。

证明 由定理 1 的证明过程知 (X_1, f_1) 是 E -系统, 从而也是拓扑遍历系统。由文 [6] 命题 4.1 知结论 (1) 成立, 由文 [6] 定理 4.11 知结论 (2) 成立。

命题 1 $f_1(RG(T)) \subseteq RG(f_1)$, 并且对 $\forall n \in \mathbb{N}$ $RG(T^n) = RG(f_1)$ 。

证明 设 $x \in RG(T)$, 则 x 为极小点, 从而 $T(x)$ 为极小点。所以对包含 $T(x)$ 的任一邻域 U 由 T 的连续性知, $T^{-1}(U)$ 为 x 的一个邻域, 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $kZ \in N(x, T^{-1}(U))$, 即对 $\forall j \in \mathbb{Z}$, $T^j(x) \in T^{-1}(U)$, 从而 $T^j(T^k(x)) \in U$, 即 $T^k(x) \in RG(f_1)$ 。由正规极小点的定义易知对 $\forall n \in \mathbb{N}$ $RG(T^n) = RG(f_1)$ 。

命题 2 设 $x \in RG(T)$, 记 $X_2 = \omega(x, T)$, $f_2 = T|_{X_2}$, $f_2: X_2 \rightarrow X_2$, 则 $x \in RG(f_2)$ 。

证明 若 $x \in RG(T)$, 则 $x \in \omega(x, T)$, 对包含 x 的任意开集 $V \subset X$ 存在开集 $U \subset X$ $x \in U$ 使得 $V = U \cap X_2$ 。对开集 U 由 $x \in RG(T)$ 知存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得对 $\forall j \in \mathbb{Z}$ 有 $T^j(x) \in U$ 。又对 $\forall j \in \mathbb{Z}$

有 $f^j(x) \in \omega(f)$. 从而 $f^j(x) \in \omega(f) \cap U = X_2 \cap U = V$, 即 $x \in RG(f)$.

定理 3 若动力系统 (X, f) 是完全拓扑传递的且 $RG(f) = X$ 则对 $\forall n, m \in \mathbb{N}$ 有 $(f^m)^n =$

$f \times f \times \dots \times f$ 是双重拓扑遍历的.

证明 因为对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 由命题 1 以及定理条件知 $RG(f) = RG(f^n) = X$ 从 (X, f) 而为 M -系统, 所以存在相对于 f 的不变概率测度 μ 具有满支撑, 即 $S_n = X$ S_n 为 μ 的支撑. 又 f 拓扑传递, 由引理 3 知 f 是拓扑遍历的.

因 f 是拓扑传递的, 对任意的非空开集 U, V 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$, 令 $W = f^n(V) \cap U$ 又 $RG(f) = X$ 所以存在 $x \in W \cap RG(f)$. 对于开集 W 存在正整数 k 使得 $f^k(x) \in W \forall k \in \mathbb{N}$ 从而 $f^{k+n}(x) \in V, f^{k+n}(x) \in f^{k+n}(U)$, 即 $f^{k+n}(U) \cap V \neq \emptyset$. 因 f 拓扑遍历, 故存在正上密度集 J 使得对

$$\forall k \in J, f^k(U) \cap f^n(U) \neq \emptyset$$

所以 $f^{k+n}(U) \cap U \neq \emptyset$. 令 $\tilde{J} = kJ + n = \{kt + n | t \in J\}$, 则 $\tilde{J}$ 为正上密度集. 对 $\forall l \in \tilde{J}, f^l(U) \cap U \neq \emptyset, f^l(U) \cap V \neq \emptyset$, 由文 [5] 引理 1 知 f 是双重拓扑遍历的.

因 f 是完全拓扑传递的, 所以对 $\forall n \in \mathbb{N}, f$ 是完全拓扑传递, 又

$$RG(f) = RG(f^n) = X$$

由上面的证明过程可知 f 是双重拓扑遍历的. 由文 [5] 引理 2 知, $\forall n, m \in \mathbb{N}, (f^m)^n$ 是双重拓扑遍历的.

注 4 该定理推广了文 [5] 定理 1.

以下考虑由 $0-1$ 方阵所决定的有限型子转移的拓扑传递属性.

设 $k \geq 2$ 记 $S = \{0, 1, \dots, k-1\}$ 并赋以离散拓扑. S 上的单边符号空间记作

$$\sum_k = \{x = (x_0 x_1 \dots) | x_i \in S, \forall i \geq 0\}$$

在积拓扑下 $\sum_k$ 是紧致可度量空间. 本文恒取它的拓朴度量为

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x = y \\ \frac{1}{k^N} & \text{若 } x \neq y, N = \min\{n | x_n \neq y_n\} \end{cases}$$

令 $\sigma: \sum_k \rightarrow \sum_k$ 为 $\sum_k$ 上的转移映射, 即 $\sigma(x_0 x_1 x_2 \dots) = (x_1 x_2 \dots), \forall x = (x_0 x_1 x_2 \dots) \in \sum_k$

设 $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq k-1}$ 为 $k \times k-0, 1$ 方阵. A 称为不可约的, 如果对任意 $0 \leq i, j < k$ 存在正整数

n 使得 $a_{ij}^{(n)} > 0$ 并总假设其每一行和每一列都至少有一个元素为 1. 记

$$\sum_A = \{x = (x_0 x_1 \dots) \in \sum_k | a_{x_i x_{i+1}} = 1, \forall i \geq 0\}$$

$\sum_A$ 是 $\sum_k$ 的一个紧致子集, 叫做由 A 决定的有限型子集.

记 $\sigma_A = \sigma|_{\sum_A}: \sum_A \rightarrow \sum_A$ 为方阵 A 所决定的子转移. 详细介绍见文 [7].

定理 4 设 $\sigma_A: \sum_A \rightarrow \sum_A$ 是由 $0-1$ 方阵 A 决定的有限型子转移, 则以下 9 个条件等价

- (1) σ_A 拓扑强混合; (2) σ_A Mild-混合; (3) σ_A 双重拓扑遍历;
- (4) σ_A 拓扑弱混合; (5) σ_A 极度扩散; (6) σ_A 强扩散;
- (7) σ_A 扩散; (8) σ_A 弱扩散; (9) σ_A 完全拓扑传递.

证明 只需证明若 σ_A 是完全拓扑传递的, 则 σ_A 是拓扑强混合即可. 若 σ_A 完全拓扑传递, 则 σ_A 拓扑传递, 从而 A 是不可约的. 由文 [7] 第 5 章命题 3 知 A 上的有向图 $G(A)$ 中有一条闭路过 A 的所有顶点, 因此由文 [7] 第 5 章命题 6 知 $\Omega(\sigma_A) = \sum_A$. 再由文 [7] 第 5 章命题 7 知 $\overline{P(\sigma_A)} = \Omega(\sigma_A) = \sum_A$ 即当 $0-1$ 方阵 A 不可约时 σ_A 的周期点在 $\sum_A$ 中稠密, 从而 σ_A 的正规极小点在 $\sum_A$ 中稠密, 由定理 3 知 σ_A 是双重拓扑遍历的. 即 σ_A 完全拓扑传递蕴涵 σ_A 双重拓扑遍历的. 又 σ_A 双重拓扑遍历蕴涵 σ_A 拓扑弱混合且 σ_A 拓扑弱混合蕴涵 σ_A 完全拓扑传递, 所以 σ_A 完全拓扑传递, σ_A 拓扑弱混合和 σ_A 双重拓扑遍历三者互相等价. σ_A 又拓扑强混合与 σ_A 拓扑弱混合等价. 故由注 2 知结论成立.

参考文献:

- [1] ZHOU Zuo-jing Weakly Almost Periodic Point and Ergodic Measure, J. Chin Ann of Math 1992 13B(2): 137-142
- [2] 周作领, 何伟弘. 轨道结构的层次与拓扑半共轭[J]. 中国科学: A 辑, 1995 25(5): 457-464
- [3] FURSTENBERG H. Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1981.
- [4] AKN E. The General Topology of Dynamical Systems [M]. Graduate Studies in Mathematics. Amer Math Soc Providence 1993 Vol 1.
- [5] 杨润生. 拓扑遍历与拓扑双重遍历[J]. 数学学报, 2003 46(3): 555-560
- [6] HUANG Wen, YE Xiang-dong. An Explicit Scattering Non-Weakly Mixing Example and Weak Disjointness

[M]. Nonlinearity 2002 15 849—862

[7] 周作领. 符号动力系统 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1997

[8] HUANG Wen, YE Xiangdong Topological Complexity Return Times and Weak Disjointness [J]. Ergod Th and Dynam Sys 2004 24 825—846

[9] 杨润生. 拓扑遍历映射 [J]. 数学学报, 2001, 44(6): 1063—1068

Chaos and Topological Transitive Properties

YIN Jiandong ZHOU Zuoling

(School of Mathematics and Computational Science Sun Yat sen University Guangzhou 510275 China
Lingnan College Sun Yat sen University Guangzhou 510275 China)

Abstract: For a dynamic system, if there is a (quasi) weakly almost periodic point but not an almost periodic point, then there exists a subsystem which is chaotic in the sense of revised Devaney. Also a totally topological transitive system is topologically double ergodic if the regular minimal points are dense in it. Therefore for the finite type sub-shift, topologically strong mixing and totally topological transition are equivalent.

Key words: (quasi) weakly almost periodic; chaos in the sense of revised Devaney; finite type sub-shift; totally transitive

(上接第 4 页)

tions [J]. SIAM J Numer Anal 1998 35 406—434

[7] MICCHELLI C A, XU Y S, ZHAO Y H Wavelet Galerkin methods for second-kind integral equations [J]. J Comp Appl Math 1997 86 251—270

[8] 黄敏. Fredholm 第二型积分方程的小波 Petrov-Galerkin 算法 [D]. 北京: 中国科学院博士论文, 2003

[9] HUANG M A construction of multiscale bases for Petrov-Galerkin methods for integral equations [J]. Adv Comput Math 2006 25 7—25

Fast Wavelet Petrov-Galerkin Methods for Singular Integral Equations

LONG Guangqing

(Department of Scientific Computing and Computer Applications Sun Yat sen University
Guangzhou 510275 China)

Abstract: Two suitable multiscale wavelet bases are constructed, which have the higher vanishing moment, small support and bi-orthogonal properties. Using this bases, fast Petrov-Galerkin methods are developed, and are shown having optimal order of convergence, almost optimal complexity and bounded condition number.

Key words: singular integral equation; Petrov-Galerkin method; fast algorithm; wavelet; optimal order of convergence