

Beurling-Ahlfors 扩张的非调和性*

孙宗良

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 扩张的共形自然性刻画了扩张与单位圆的 Möbius 变换群的相容性. 构造反例证明了 Beurling-Ahlfors 扩张并非总是共形自然的, 证明了拟共形调和和粗糙等距扩张的共形自然性. 作为应用, 证明了 Beurling-Ahlfors 扩张的非调和性.

关键词: Beurling-Ahlfors 扩张; 共形自然; 调和扩张

中图分类号: O174.51 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 02-0114-03

熟知同胚 $h: S \rightarrow S$ 是拟对称映射当且仅当 h 是单位圆到自身的拟共形同胚的边界^[1]. Douady-Earle^[2] 构造了一类扩张 (Douady-Earle 扩张): 对给定的边界值, 考虑其对应的概率测度, 指定此概率测度所对应的向量场的唯一的共形重心为给定边界的扩张. Douady-Earle 扩张是共形自然的^[2], 即与单位圆的 Möbius 变换群是相容的. Liu-Yao^[3] 证明了 Douady-Earle 扩张并非总是调和的 (待发表). Royden^[4] 首先考虑了如下问题: 是否任意的边界同胚都存在调和扩张. Schoen^[3] 猜想对该问题的回答是肯定的, 即任意的边界同胚都存在调和扩张. 对高维的情况, Li-Wang^[4] 给出了 Schoen 的上述猜想的更自然的推广: 对非紧的秩为 1 的对称空间, 定义在其几何边界上的拟对称映射都可以唯一地扩张为调和和粗糙等距. Li-Wang^[4] 还证明了他们的猜想的唯一性. Li 和 Tan^[5-9], Li^[4-6], Markov^[7] 等人做了很多关于这两个猜想的相关工作.

本文将采用如下记号: 记 D 为单位圆, 赋以 Poincaré 度量 $\delta(z) = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$. 为方便起见, Poincaré 圆盘可以是 $(D, \delta(z) = \frac{2|dz|}{1-|z|^2})$ 或 $(H, \delta(z) = \frac{|dz|}{\text{Im } z})$, 其中 H 为上半平面. $\text{Re } z$ 和 $\text{Im } z$ 分别表示 z 的实部、虚部. 本文将证明 (定理 1) 拟共形调和和粗糙等距扩张是共形自然的. (引理 4) Beurling-Ahlfors 扩张并非总是共形自然的. 作为应用, 还证明 (定理 2) Beurling-Ahlfors 扩张的非调和性.

引理 1 拟共形调和扩张是唯一的.

注 此引理的证明参考文 [5] (定理 1.1). 事实上, 文 [5] 证明了: 对给定的拟对称边界同胚, 其拟共形调和微分同胚扩张是唯一的. 注意到下列事实即可得到此引理: 对调和映射, 若其边界是同胚, 则是微分同胚.

引理 2 设 $w: (D, \sigma(z) = |dz|^2) \rightarrow (D, \rho(w) = |dw|^2)$ 为调和映射, f, g 为任意两个 Möbius 变换. 则 $w \circ f, g \circ w$ 也是调和映射.

证明 不失一般性, 只证明 $g \circ w$ 是调和映射. 记 $u = g \circ w$ 则 $g \circ w$ 成为 $(D, \sigma(z) = |dz|^2) \rightarrow (D, \rho(u) = |du|^2)$. 从而只需验证 $u = g \circ w$ 满足 Euler-Lagrange 方程

$$\tau(g \circ w) = \tau(u) = u_z + (\log \rho(u))_u u_z u_z = 0$$

由于 g 是共形的, 故 $g_w = g_v = 0$. 由链式法则可得

$$\begin{aligned} \tau(g \circ w) &= \tau(u) = u_z + (\log \rho(u))_u u_z u_z = \\ &= (g_w w_z + g_v w_z)_z + (\log \rho(u))_u (g_w w_z + \\ &\quad g_v w_z)(g_w w_z + g_v w_z) = \\ &= (g_w w_z)_z + (\log \rho(u))_u (g_w w_z) g_w w_z = \\ &= g_w w_z + \frac{\rho_u}{\rho} g_w w_z w_z = \\ &= g_w (w_z + \frac{\rho_u}{\rho} g_w w_z w_z) \end{aligned} \quad (1)$$

同样由链式法则, 得

$$\rho_w = \rho_g g_w + \rho_v g_v = \rho_g g_w$$

从而

* 收稿日期: 2006-07-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371078); 广东省自然科学基金资助项目 (04009797); 中山大学高等学术中心基金资助项目 (03M7)

作者简介: 孙宗良 (1981 年生), 男, 博士生. E-mail: moonshore@163.com

$$\tau(w) = w_z + (\log)_w w_z w_z =$$
$$w_z + \frac{\rho_w}{\rho} w_z w_z = w_z + \frac{\rho_u g_w}{\rho} w_z w_z = 0 \quad (2)$$

联合 (1), (2) 式即得 $\tau(u)=0$. 这样证明了 $u=g\circ w$ 是调和的. 类似可证 $w\circ$ 也是调和的.

引理 3 对边值映射 $h: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ 其拟共形调和扩张 $E(h)$ 是共形自然的.

证明 由定义, 称扩张 $E(h)$ 是共形自然的, 如果对任意的 Möbius 变换 $f: D \rightarrow D$ 和 $g: D \rightarrow D$ 都有

$$E(g \circ h \circ f) = g \circ E(h) \circ f$$

成立. 易见, 这等价于对任意的 Möbius 变换 $f: D \rightarrow D$ 和 $g: D \rightarrow D$ 都有

$$E(g \circ h) = g \circ E(h),$$
$$E(h \circ f) = E(h) \circ f$$

同时成立.

不失一般性, 证明对任意的 Möbius 变换 $f: D \rightarrow D$ 和 $g: D \rightarrow D$ 都有 $E(g \circ h) = g \circ E(h)$ 成立. 对 Möbius (共形) 变换 $g: D \rightarrow D$ 由于 $E(h)$ 拟共形调和扩张, 故 $g \circ E(h)$ 是拟共形的. 又由引理 2 知, $g \circ E(h)$ 是调和的. 从而 $g \circ E(h)$ 是拟共形调和的. 易见 $g \circ E(h)$ 以 $g \circ h$ 为边值, 故由引理 1 的唯一性, 得

$$E(g \circ h) = g \circ E(h)$$

定理 1 对非紧的秩为 1 的对称空间, 设 h 为其几何边界上的任意拟对称映射, 则 h 的拟共形调和粗糙等距扩张是共形自然的.

证明 设 $\psi(h)$ 是 h 的拟共形调和粗糙等距扩张. 如前所述, 只需证明: 对任意的 Möbius 变换 $f: D \rightarrow D$ 和 $g: D \rightarrow D$ 都有

$$\psi(g \circ h) = g \circ \psi(h),$$
$$\psi(h \circ f) = \psi(h) \circ f$$

同时成立.

不失一般性, 以下证明: 对任意的 Möbius 变换 $g: D \rightarrow D$ 都有

$$\psi(g \circ h) = g \circ \psi(h)$$

成立. $g: D \rightarrow D$ 是 Möbius (共形) 变换, 又 $\psi(h)$ 是拟共形调和粗糙等距扩张, 故 $g \circ \psi(h)$ 是拟共形的. 由引理 2 知, $g \circ \psi(h)$ 是调和的. 从而 $g \circ \psi(h)$ 是拟共形调和的. 由粗糙等距的定义 ([4], 定义 1.1) 知, 对任意的粗糙等距 χ 对任意的 Möbius 变换 $f: D \rightarrow D$ 和 $g: D \rightarrow D$ $g \circ \chi$ 和 $\chi \circ$ 也是粗糙等距. 故 $g \circ \psi(h)$ 是拟共形调和粗糙等距. 由于 $g \circ \psi(h)$ 以 $g \circ h$ 为边值, 由拟共形调和粗糙等距扩张的唯一性 [4] 知, $\psi(g \circ h) = g \circ \psi(h)$.

引理 4 Beurling-Ahlfors 扩张并非总是共形自

然的.

证明 事实上, Beurling-Ahlfors 扩张是仿射自然的 [8]. 我们构造一个例子说明 Beurling-Ahlfors 扩张可以不是共形自然的.

现在构造这样的例子. 设

$$Aut(H) = \{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \}$$

是上半平面 H 的自同构群. 已知 $Aut(H)$ 是 H 到自身的共形变换群. 设 $A(z) = z, B(z) = \frac{z-1}{z+1}$ 以下将证明: 对某些 $z \in H, \Phi(A \circ h \circ B)(z) \neq A \circ \Phi(h) \circ B(z)$ 其中 $\Phi(h)$ 表示边界同胚 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张. 简单计算知

$$f = Re(\Phi(A \circ h \circ B)(z)) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\frac{t-1}{t+1}) dt$$

$$f = Re(A \circ \Phi(h) \circ B(z)) =$$

$$\frac{(x+1)^2 + y^2}{4y} \int_{\frac{x+1-2y-1}{(x+1)^2+y^2}}^{\frac{x+1+2y-1}{(x+1)^2+y^2}} h(t) dt$$

取 $z = -3+i$ 即 $x = -3, y = 1$. 取 $h(x) = x$ 若 $x \leq 0$ 取 $h(x) = kx$ 若 $x > 0$ 则

$$f = k(1 + \log 3) \neq f = \frac{18}{5} k$$

引理得证.

定理 2 Beurling-Ahlfors 扩张并非总是调和的.

证明 反证法. 假设 Beurling-Ahlfors 扩张是调和的. 由于 Beurling-Ahlfors 扩张是拟共形的, 故 Beurling-Ahlfors 扩张是拟共形调和的, 这样由引理 3 知, Beurling-Ahlfors 扩张是共形自然的, 这与引理 4 矛盾.

致谢 作者对刘立新老师的帮助与鼓励表示衷心的感谢!

参考文献:

[1] BEURLING S L, AHLFORS L V. The boundary correspondence for quasiconformal mappings [J]. Acta Math 1956 (96): 125—142

[2] DOUADY A, EARLE C J. Conformally natural extension of homeomorphism of the circle [J]. Acta Math 1986 (157): 23—48

[3] SCHOEN R. The role of harmonic mappings in rigidity and deformation problems. Complex geometry (Osaka 1990) [J]. Lecture Notes in Pure and Appl Math. Dekker, New York 1993 (143): 179—200

[4] LI P, WANG J P. Harmonic rough isometries into Hadamard space [J]. Asian J Math 1998 (2): 419—442

[5] LI P, TAM L F. Uniqueness and regularity of proper harmonic maps II [J]. Indiana University Math J 1993

[6] LIP TAM L F Uniqueness and regularity of proper harmonic maps [J]. Ann of Math 1993 (137): 167—201.

[7] MARKOVIC V Harmonic diffeomorphisms of noncompact surfaces and Teichmüller spaces [J]. J London Math Soc 2002 65 (2): 103—114.

[8] GARDNER F LAKIC N Quasiconformal Teichmüller theory [M]. Mathematical Surveys and Monographs [M]. Providence: American Mathematical Society (AMS), 2000.

Non-hamonicity of Beurling-Ahlfors Extensions

SUN Zong-liang

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University
Guangzhou 510275, China)

Abstract: The conformal naturality of extensions characterizes the compatibility of extensions with the group of Möbius transformations of the unit disk. In this paper, a counterexample is constructed to show that the Beurling-Ahlfors extension is not always conformally natural. The conformal naturality of quasiconformal harmonic rough isometric extensions is proved. As an application, the non-hamonicity of the Beurling-Ahlfors extension is shown.

Key words: Beurling-Ahlfors extension; conformal naturality; harmonic extension

(上接第 113 页)

Applications of Spatio-Temporal Forecasting to Forest Fire Prevention

WANG Jia-qin, CHENG Tao

(School of Geography and Planning, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A stochastic time series model was constructed to capture the temporal characteristics of each spatially independent subcomponent. Then a dynamic recurrent neural network (DRNN) was built to discover the hidden spatial correlation. Finally, the previous individual temporal and spatial forecasts were combined based upon statistical regression to produce the final forecasting result. The results indicated that the forest fire could be forecasted exactly and effectively by the proposed method. Detailed discussions on the performance and the training precision of the model were presented, and the feasibility of forest fire forecasting was analyzed. ISMIF had comprehensive application value in the forecast of forest fire.

Key words: spatio-temporal forecasting; forest fire prevention; dynamic recurrent neural network