

一类驻定时标动态竞争方程的定性分析^{*}

李艳会¹, 黄文强², 朱思铭¹

(1 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;
2 中国南方航空股份有限公司, 广东 广州 510406)

摘 要: 讨论非线性时标动态系统的定性分析。首先讨论了 2 个基本性质, 并提出了容许曲线的概念。根据步差函数 $\mu(t)$, 时标动态方程的右端函数 $x(t)$ 可分为离散和连续 2 种情况。离散点时将在不同容许曲线上跳动, 连续情况将沿着容许曲线前进。在此基础上, 对平面时标动态 Volterra 竞争模型进行定性分析。用时标动态方程进行模拟自然界中的两种群竞争, 当争夺环境资源时将在有限时间内其中一种群会突然死亡。

关键词: 时标动态方程; 定性分析; Volterra 竞争模型

中图分类号: O175.13 O317 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579(2006)06-0007-05

时间标度演算法——测度链微积分(The calculus of Measure Chains)是将微分与差分方程理论统一的演算理论。自 1988 年提出之后^[1-2] 引起了许多学者关注^[3-5], 发展成为一种新理论:“时标动态理论”^[6-8]。

LIU 和 ZHU^[8] 在特殊周期时标下对常系数线性时标动态方程进行过定性分析。但尚未见文献研究非线性驻定时标动态方程的定性理论。本文将对驻定时标动态方程给出进行定性分析的基本性质, 提出了容许曲线的概念。在此基础上, 对平面时标动态 Volterra 竞争模型进行区域定性分析。

1 时标微积分

时标 T 是实数 $\mathbf{R}$ 上的非空闭集。对 $t \in T$, 定义前跳算子 σ 和后跳算子 ρ 及步差函数 μ :

$$\sigma(t) = \sup\{s \in T; s < t\},$$

$$\rho(t) = \inf\{s \in T; s > t\}, \mu(t) = \sigma(t) - t$$

对 $t \in T$, 对满足 $\sigma(t) \geq t$ 及 $\rho(t) \leq t$ 及 $\rho(t) < t < \sigma(t)$ 和 $\rho(t) = t = \sigma(t)$ 分别称 t 是右发散、右稠密; 左发散、左稠密及孤立、稠密的。

对 $t \in T$, 称 $f^\Delta(t)$ 为函数 $f(t): T \rightarrow \mathbf{R}$ 在 t 点的 Hilger 导数, 或称 Δ 导数 (若它存在的话); 若对任意的 $\epsilon > 0$ 存在 t 邻域 U 使得对 $\forall s \in U$, 有

$$|[f(\sigma(t)) - f(t)] - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

此时, 称 $f(t)$ 在 t 点 Δ 可微。

引理^[6] 设函数 $f(t): T \rightarrow \mathbf{R} \ t \in T$

1) 如果函数 $f(t)$ 在 t 点 Δ 可微, 则 $f(t)$ 在 t 点连续。

2) 如果函数 $f(t)$ 在 t 点连续, 且 t 是右发散点, 则 $f(t)$ 在 t 点 Δ 可微, 且此时 $f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$ 。

3) 如果 t 是右稠密的, 那么函数 $f(t)$ 在 t 点 Δ 可微, 当且仅当极限 $\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ 存在, 且此时

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

4) 如果 $f^\Delta(t) \geq 0$, 则函数 $f(t)$ 是非递减的。

如果存在函数 $F: T \rightarrow \mathbf{R}$, 使得对所有的 $t \in T$ 有 $F^\Delta(t) = f(t)$, 则称 $F(t)$ 为 $f(t)$ 的原函数。 $f(t)$ 从 $a \in T$ 到 $b \in T$ 的柯西积分定义为

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a)$$

称函数 $f(t): T \rightarrow \mathbf{R}$ 是右稠连续的, 如果在所有右稠密点连续且在所有左稠密点的左极限存在, 记所有右稠密连续函数构成的集合为 $C_{rd} = C_{rd}(T, \mathbf{R})$ 。而称多元函数 $f: T \times S \rightarrow S$ 是右稠密连续的, 若对任意连续函数 $x: T \rightarrow S \ g(t) = f(t, x(t))$ 是右稠密连续的。

可以证明^[6] 右稠密连续函数有原函数, 由此可定义柯西积分

$$\int_a^b f(t) \Delta t = f(b) - f(a)$$

* 收稿日期: 2006-03-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371137); 中山大学青年教师科研启动基金资助(2004340001131015)

作者简介: 李艳会(1972年生), 女, 博士, 讲师; E-mail: liyanhui@sysu.edu.cn

2 驻定时标动态方程的定性分析

考虑驻定时标动态方程:

$$\dot{z} = Z(z), z \in D \subseteq \mathbf{R}^n, t \in T \quad (1)$$

其中, $Z(z)$ 是 z 的连续函数。

对 $t \in T$, 方程 (1) 可分 2 种情况进行分析:

(1) $\mu(t) = 0$ 时, 方程 (1) 变为在区间 $[t^*, t^*] \subset T$ 上连续时间 t 的微分方程:

$$\frac{dz}{dt} = Z(z) \quad (2)$$

(2) $\mu(t) \neq 0$ 时, 方程 (1) 可改写为:

$$z(\sigma(t)) = z(t) + Z(z(t))\mu(t) \quad (3)$$

因此, 对比驻定微分方程所定义的动力系统的性质有:

性质 1 驻定时标动态方程 (1) 的右端函数 $Z(z)$ 可唯一确定相空间 (z) 中的向量场, 对任何 $t \in T$,

(1) 当 $\mu(t) = 0$ 时, 为对应连续微分方程 (2) 的轨线的切线方向, 并沿着其轨线前进;

(2) 当 $\mu(t) \neq 0$ 时, $z(\sigma(t))$ 由式 (3) 确定, 即沿向量场方向前进或后退 $\mu(t)$ 距离。

依据基本性质 1, 时标动态方程 (1) 的解 $z(t)$, $t \in T$ 在相空间 (z) 中同样是方程 (1) 的轨线, 可以是离散点或极限点 $z(t)$, 也可以是连续轨线段 $z(t)$, $t \in [t^*, t^*]$, 此连续轨线段属于开始点相同的微分方程 (2) 的轨线的一段。为清楚区别时标方程 (1) 的轨线和微分方程 (2) 的轨线, 本文把微分方程 (2) 的轨线称为时标方程 (1) 的容许曲线, 即时标方程 (1) 的连续轨线为其容许曲线中的一段。

现进一步讨论非线性驻定时标动态方程 (1) 在相空间 (z) 上对应的连续时间段的解与离散时间点的解的区别, 这也是微分方程 (2) 和离散方程 (3) 的解的区别。因对微分方程 (2), 其方向场充满整个相空间, 即轨线族充满整个相空间, 且只有线性微分方程的解才是直线段。因此, 对非线性驻定时标动态方程 (1), 其时标在连续时间段时将沿着容许曲线前进, 而离散时间点时则从一条容许曲线上跳到另一条容许曲线上。只有容许曲线是直线时才在同一条容许曲线上。根据这些分析可得

性质 2 非线性驻定时标动态方程 (1) 在相空间 (z) 上, 其时标在连续时间段时将沿着同一容许曲线前进; 而离散时间点时则在不同容许曲线上跳动, 只有容许曲线是直线或螺旋状时才在或可能在同一条容许曲线上。

应用基本性质 1 和性质 2 可以对具体的非线

性驻定时标动态方程进行定性分析。

3 平面时标动态 Volterra 竞争模型的区域定性分析

现讨论在时标上的两种群 Volterra 竞争时标方程:

$$\begin{cases} x^\Delta = x(a - by) & x \geq 0 \\ y^\Delta = y(c - dx) & y \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中, a, b, c, d 均为正数。

对任意 $t \in T$, 当 t 右稠密即 $\mu(t) = 0$ 情形, 存在 T 上的最大区间 $[t^*, t^*] \subset T$, 在其上时标方程 (4) 变为微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) & x \geq 0 \\ \frac{dy}{dt} = y(c - dx) & y \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

用分离变量法得到解的关系式:

$$y^a e^{-by} = Kx^c e^{-dx} \quad (6)$$

平衡点有 $(0, 0)$ 和 $(c/d, a/b)$, 其中, $(0, 0)$ 为不稳定结点, $x=0$ 和 $y=0$ 为轨线, $(c/d, a/b)$ 为鞍点。利用 Volterra 作图分析技巧或等倾斜线分析方法得到趋于鞍点 $(c/d, a/b)$ 的两条轨线即方程 (4) 的容许曲线; 并将第一象限划分为其轨线趋于 $x=0$ 和 $y=0$ 的两个区域。这样得到了或趋于 $x=0$ 或趋于 $y=0$ 的 (4) 的两容许曲线族。如图 1 所示, 其中参数为 $a=1, b=1, c=3, d=1.5$ 且

$$u = Kx^c e^{-dx}, w = y^a e^{-by}, K = 0.01$$

而当 t 右离散即 $\mu(t) \neq 0$ 情形, 时标方程 (4) 直接有解:

$$\begin{cases} x(\sigma(t)) = x(t) + x(t)(a - by(t))\mu(t) \\ y(\sigma(t)) = y(t) + y(t)(c - dx(t))\mu(t) \end{cases} \quad (7)$$

对具体时标 T 从 $t_0 \in T$ 开始, 如 $\mu(t_0) \neq 0$ 则用 (7) 式求得 $(x(\sigma(t_0)), y(\sigma(t_0)))$; 如 $\mu(t_0) = 0$, 则取 $t_1 = \sup\{t \in [t_0, t] \subset T\}$, 在过 $(x(t_0), y(t_0))$ 的 (6) 的闭容许曲线中截取 $[t_0, t_1]$ 的轨线段 $(x(t_0), y(t_0)) \sim (x(t_1), y(t_1))$, 然后再用 (7) 式求得离散点 $(x(\sigma(t_1)), y(\sigma(t_1)))$, 如此类推, 逐步推进。在推进过程中根据方程特性需要满足 $x(t) \geq 0$ 且 $y(t) \geq 0$, 对 (6) 式由于 $x=0$ 及 $y=0$ 均是方程的解其轨线不能越过 x 轴和 y 轴而始终停留在第一象限, 因此容许曲线族均满足要求 $x(t) \geq 0$ 且 $y(t) \geq 0$, 但对 (7) 式则可能存在 $x(t) < 0$ 或 $y(t) < 0$ 的情形, 此时应作 $x(t) = 0$ 或 $y(t) = 0$ 处理, 即其中一种群绝灭, 此种情况称为方程 (4) 突然在有限时间死亡。除种群突然死亡外, 时标方程 (4) 的轨线一般是逐渐趋于 $x=0$ 或 $y=0$ 。

即一种群获胜生存而另一种群绝灭；极为特殊的情形如图 (1) 所示，仅存在两条轨线趋于平衡点 $(c/a, b)$ 。

现进一步讨论时标方程 (4) 的解的渐近性态。对于微分方程 (5)，已知其轨线为满足关系式 (6) 的一族曲线，即 (4) 的容许曲线。容许曲线中有且仅有两条趋于平衡点 $(c/a, b)$ 且此两条容许曲线连同其平衡点称为特殊边界，它在第一象限内，将第一象限划分为上、下两个区域。在上区域中的容许曲线均逐渐趋于 $x=0$ 即 x 种群逐渐减少至绝灭；在下区域中的容许曲线则均逐渐趋于 $y=0$ 即 y 种群逐渐减少至绝灭。而对时标方程 (4)，由性质 1 知当时标 $t \in T$ 为连续区间上的值时，为某一容许曲线中的一段；而时标 $t \in T$ 为离散时间点时则从一条容许曲线上跳到另一条容许曲线上，只有容许曲线是直线时才在同一条容许曲线上。由于离散时间点的跳动，时标方程 (4) 的解可能会越过特殊边界，从一个区域跳至另一个区域。除极个别会逐渐或突然跳向平衡点 $(c/a, b)$ 外，一般会趋向两侧，逐渐或突然跳向 $x=0$ 或 $y=0$ 。

随 T 中 t 的逐渐增大，其对应的 K 值为一串 $K_0, K_1, K_2, \dots$ ，且 $K_{i+1} \neq K_i$ 。于是有

定理 Volterra 竞争时标动态方程 (4) 的轨线必属于由 K 确定的闭容许曲线族 (6) 中的一段或一点，且随着 T 中 t 的逐渐增大而有

- (1) 当 K_i 有限或无限但有上限时，如果时标方程 (4) 不突然跳向平衡点 $(c/a, b)$ 或突然死亡于 $x=0$ 或 $y=0$ 则它趋于某容许曲线，且最后趋于 $x=0$ 或 $y=0$ 。
- (2) 当 K_i 无限递增时，其时标动态方程 (4) 的解将使某种群突然死亡，即在有限时间使 $x=0$ 或 $y=0$ 特殊情况是趋于 $x=0$ 或 $y=0$ 或趋于平衡点 $(c/a, b)$ 。

4 应用实例

图 1 至图 4 是当参数为 $a=1, b=1/3, c=3, d=1/5$ 时的在不同时标下的 Volterra 竞争时标动态方程 (4) 的相图。其中图 1 的时标动态方程 (4) 为微分方程，其时标为实轴，没有离散点，即对任意 $t \in T$ ，均有 $\mu(t)=0$ 。图 2 和图 3 是其线段长均为 $l=0.1$ ，离散距离分别为 $h=0.03$ 和 $h=0.1$ 的等周期时标；而图 4 则是变周期时标，开始时周期和图 3 一样，线段长为 $l=0.1$ ，离散距离分别为 $h=0.1$ ，以后则每一周期其离散距离较前一周期乘以因子 $c=1.1$ 。图 1 至图 4 中的 10 条轨线的初始点均一样，为

$(0.5, 0.08), (1, 0.165), (1, 0.16), (1, 0.155), (1, 0.13), (29, 14), (29, 13.3), (29, 13), (29, 12.8), (29, 12)$

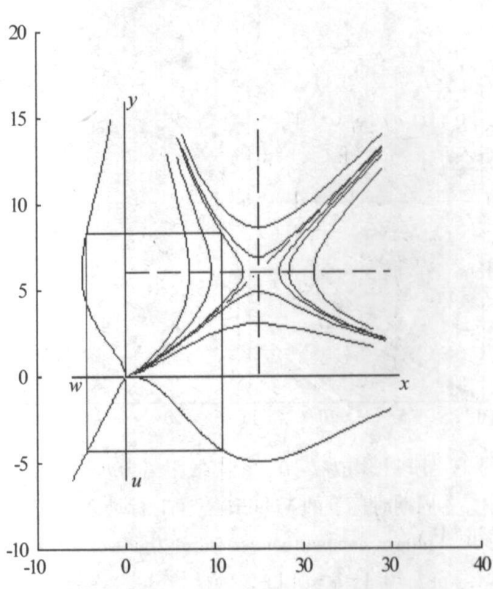


图 1 连续时标下的 Volterra 竞争时标动态方程
Fig 1 Volterra competitive system on continuous time scales

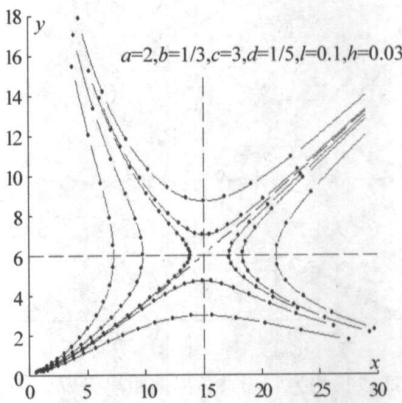


图 2 线段长均为 $l=0.1$ 离散距离为 $h=0.03$ 的等周期时标下的 Volterra 竞争时标动态方程
Fig.2 Volterra competitive system on time scales of $l=0.1, h=0.03$

从图中可看出，图 1 连续时标和图 2 小距离 $h=0.02$ 离散周期时标的轨线一样，第 1、2、3 条轨线趋于 $x=0$ ，第 4、5 条轨线趋于 $y=0$ ，第 6、7 条轨线又趋于 $x=0$ ，第 8、9、10 条轨线则趋于 $y=0$ 。

但对图 3 的大距离 $h=0.1$ 的离散周期时标的轨线，第 1、2、4、5、6、7、8、9、10 条轨线仍和图 1、图 2 一样趋于 $x=0$ 或 $y=0$ ，但第 3 条轨线则中途改变方向，由趋向 $x=0$ 改为趋向 $y=0$ 。

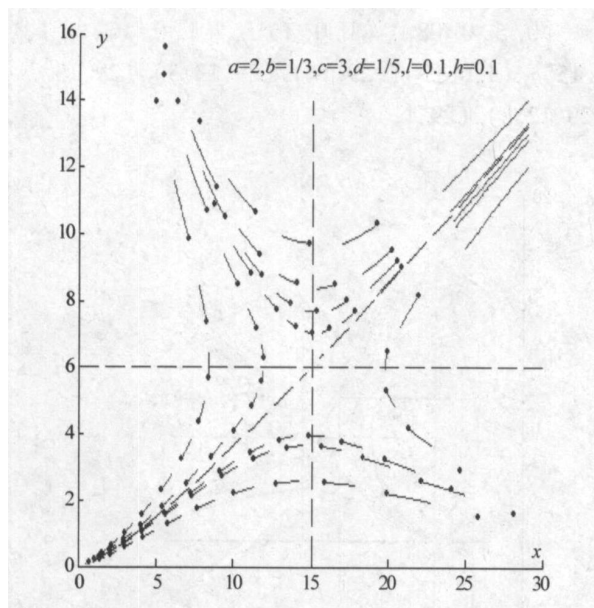


图 3 线段长均为 $l=0.1$ 离散距离为 $h=0.1$ 的等周期时标下的 Volterra 竞争时标动态方程

Fig 3 Volterra competitive system on time scales of $l=0.1$ $h=0.1$

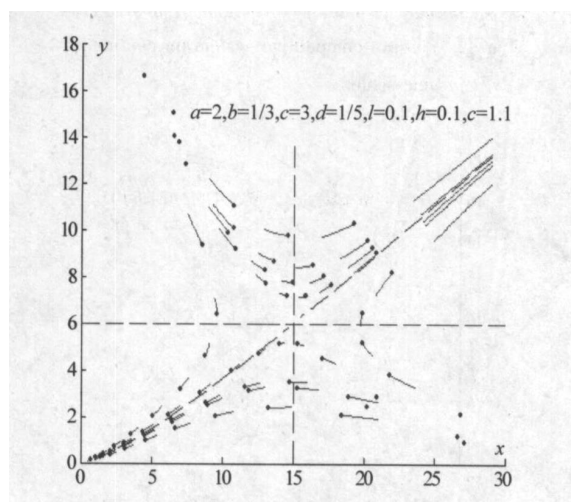


图 4 线段长均为 $l=0.1$ 离散距离为 $h=0.1$ 的变周期时标下的 Volterra 竞争时标动态方程

Fig 4 Volterra competitive system on time scales of $l=0.1$ $c=1.1$ $h=0.1$

而对图 4 的大距离 $h=0.1$ 的变周期时标, 其离散周期因子为 $c=1.1$ 时, 则第 1、4、5、6、7、8、9、10 条轨线仍和图 1、图 2 一样趋于 $x=0$ 或 $y=0$ 第 2、3 条轨线均中途改变方向, 由趋向 $x=0$ 改为趋向 $y=0$ 与图 3 又不同。

此外, 具离散周期时标的上述轨线均在有限时

间突然死亡。如图 2 的线段长为 $l=0.1$ 、离散距离为 $h=0.02$ 的小距离离散周期时标的轨线, 对应于上述初始点的 10 条轨线, 它们分别在下面所列的循环次数时突然死亡:

27、32、37、36、30、27、24、25、22、18

对一般的 Volterra 竞争时标动态方程

$$\begin{cases} x^\Delta = x(a - bx - cy) & x \geq 0 \\ y^\Delta = y(d - ex - fy) & y \geq 0 \end{cases}$$

亦可得到类似结论。

根据定理可以解释: 用时标动态方程进行模拟自然界中的两种群竞争, 当争夺环境资源时将在有限时间内其中一种群会突然死亡。而用常微分方程进行模拟, 则必需时间趋于无穷时才能逐渐趋于 $x=0$ 或 $y=0$ 。

参考文献:

- [1] HILGER S. Ein Markettenkalkul M it Anwendung auf Zentum an mannigfaltigkeiten[D]. PhD thesis University Wurzburg 1988.
- [2] HILGER S. Analysis on measure chains—— a united approach to continuous and discrete calculus[J]. Res Math 1990 18: 18–56.
- [3] BOHNER M, AGARWAL R. Quadratic functionals for second order matrix equations on time scales[J]. Non linear Analysis 1998 33: 675–692.
- [4] AGARWAL R, BOHNER M. Basic calculus on time scales and some of its applications[J]. Resultate der Mathematik 1999 35(1–2): 3–22.
- [5] BOHNER M, AGARWAL R. Inequalities on time scales: A survey[J]. Mathematical Inequalities and Applications 2001 4(4): 535–557.
- [6] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time scales[M]. Birkhäuser Boston Inc Boston MA 2001.
- [7] BOHNER M, PETERSON A. Advances in dynamic equations on time scales[M]. Birkhäuser Boston Inc Boston MA 2003.
- [8] LIU Ai-lian, ZHU Si-ming. Asymptotic behavior of dynamic equations on a periodic time scales[J]. Ann of Diff Eqs 2005 21(4): 569–579.
- [9] 塞蒙斯 G F. 微分方程[M]. 张理京, 译. 北京: 人民教育出版社, 1981: 289.

(下转第 25 页)

[6] BONEH D BOYEN X SHACHAM H. Short Group Signature[C] . CRYPTO 2004 LNCS 3152 Berlin Springer-Verlag 2004 41 – 55.

[7] BONEH D FRANKLIN M. Identity – based encryption from the weil pairing[C] . CRYPTO 2001 LNCS 2139 Berlin Springer-Verlag 2001 213 – 229

[8] BONEH D LYNN B SHACHAM H. Short signatures from the weil pairing[C] . ASIACRYPT 2001 LNCS 2248 Berlin Springer-Verlag 2001 514 – 532

[9] BONEH D BOYEN X. Short signatures without random oracles[C] . EUROCRYPT 2004 LNCS 3027 Berlin Springer-Verlag 1994 56 – 73

[10] PENG K BOYD G DAWSON E et al Efficient implementation of relative bid privacy in sealed – bid auction [C] . WISA 2003 LNCS 2908 Berlin Springer-Verlag 2004 244 – 256

Secure Electronic Auction Schemes Based on the Short Group Signature

HUANG Xi-jie¹, LIN Qun², WANG Yan-ming^{1,3}

(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

2. Institute of Mathematics and Information Technology, Hanshan Normal University, Chaozhou 521041, China

3. Lingnan College, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract A public electronic auction scheme based on short group signature is designed, which is the first scheme of the applications of the pairing based cryptography on electronic auctions. Comparing with former auction schemes based on group signatures, the new one satisfies all main properties of common secure public auction schemes, and its communication and storage are much lower. At last, a sealed-bid auction scheme is proposed, which is transformed from the public one and satisfies the property of relative bid privacy.

Key words electronic auction; group signature; pairing

(上接第 10 页)

Qualitative Analysis on a Type of Competitive Dynamic System on Time scales

LI Yan-hui¹, HUANG Wei-qiang², ZHU Siming¹

(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun yat sen University, Guangzhou 510275, China

2. China Airlines Company Limited, Guangzhou 510406, China)

Abstract Qualitative analysis of nonlinear dynamic system on time – scales is studied. Two properties are firstly discussed, and the concept “contain curve” is brought. Based on the graininess function $\mu(t)$, function $z(t)$ of dynamic system on time – scales can be divided into two cases: $z(t)$ jumps from one contain curve to another in discrete points. While $z(t)$ is along contain curve in continuous time t . Then the planar Volterra competitive system on time – scales is qualitatively analyzed. Applying the conclusion to the competition between two populations, the death of one population in finite time can be explained.

Key words dynamic system on time scales; qualitative analysis; Volterra competitive system