

基于频域法的非线性时滞映射的分岔及其应用^{*}

曾 丽^{1,2}, 赵 怡¹, 孙 伟¹, 宗西举¹

(1 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

2 广东外语外贸大学信息学院应用数学系, 广东 广州 510420)

摘 要: 基于谐波平衡法和反馈系统理论, 用频域法分析了在线性前馈部分具时滞的非线性映射的 Hopf 和倍周期分岔。利用该方法, 论文得到了分岔解及其稳定性的相关表达式。最后将得到的结果应用于一个具时滞的离散复合种群模型。

关键词: 离散系统; 频域法; 谐波平衡法; Hopf 分岔; 倍周期分岔; 复合种群

中图分类号: O231.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 06-0016-05

采用频域法来研究分岔及其控制是近年来比较热门的问题, 但大多数文章针对连续系统进行了讨论 (参见文献 [1-2]), 对离散系统 (映射) 的研究比较少。近来, 有作者提出用频域的方法研究映射的分岔问题^[3-5], 并用该方法统一地研究了 Hopf 分岔和倍周期分岔。但这些文献讨论的都是无时滞情形的, 本文则讨论在线性前馈部分具时滞映射的分岔问题, 使用频域法和谐波平衡逼近法得到了有时滞情形相关的公式。对于有时滞的离散系统, 时域中常常需要先通过变换化作较高维的系统来分析, 但是用频域法来分析不会增加维数, 甚至会降低维数从而达到简化的目的。在下文的讨论中, 我们将详细讨论频域法在分岔中的应用以及它的优缺点。

1 无时滞情形的频域法

本节先介绍无时滞情形的频域法^[3-4], 考虑如下差分方程:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\mu)x(k) + B(\mu)h(y(k); \mu), \\ y(k) &= C(\mu)x(k) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $k \in \mathbf{N}$, $x(k+1), x(k) \in \mathbf{R}^n$, $\mu \in \mathbf{R}^s$, $h(\cdot; \cdot): \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^l$, 矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 都是 μ 的光滑函数, 方程 (1) 可以分解为一个线性部分和一个无记忆的非线性部分。这个分解只需要在 (1) 的第一式中加上 $B(\mu)Dy(k)$ 和 $-B(\mu)Dy(k)$ (所选择的 $D \in \mathbf{R}^{l \times m}$ 可以依赖 μ), 并作 z 变换。从而, 系统 (1) 等价于

$$Z(e) = -G(z, \mu)Z(u) \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} e(k) &= -y(k) = -C(\mu)x(k), u(k) = \\ f(e(k); \mu) &= h(-e(k); \mu) + De(k), G(z, \mu) = \\ C(\mu)[zI - (A(\mu) + B(\mu)DC(\mu))]^{-1}B(\mu) \end{aligned}$$

基于控制理论, 频域中的不动点 (记为 $\hat{e}$) 可以解如下方程得到:

$$G(1; \mu)f(\hat{e}; \mu) = -\hat{e} \quad (3)$$

而且在 $\hat{e}$ 的小邻域内对系统动力性态的分析步骤和时域情形是类似的。首先线性化系统由开环矩阵 $G(z, \mu)J(\mu)$ 给出, 其中 $J(\mu) = \mathcal{J}(e(k); \mu)$, $\mathcal{J}(e(k); \mu)|_{e(k)=\hat{e}}$ 是 Jacobian 矩阵。那么, 分岔存在的必要条件是 $G(e^{i\omega}; \mu)J(\mu)$ 的一个特征值 (记为 $\lambda(e^{i\omega}; \mu)$) 当 $\mu = \mu_0$ 时以特定的频率 $\omega = \omega_0$ 穿过临界点 $-1 + i0$ 。其中鞍结分岔、跨临界分岔、叉型分岔由 $\omega_0 = 0$ 刻画; 而倍周期分岔对应于 $\omega_0 = \omega_D = \pi$; Hopf 分岔对应于 $\omega_0 = \omega_H$, 但不包含强共振情形 (即 $e^{i\omega_H} \neq 1, r=1, 2, 3, 4$)。

只要横截条件满足, 即可用谐波平衡法近似表示由不动点分岔出来的周期轨道并决定其稳定性。一般地, 如果取 μ 接近 μ_0 , 使得特征值 $\lambda(e^{i\omega}; \mu)$ 在接近 ω_0 的 ω 处接近 $-1 + i0$ 则分岔产生的周期轨 (如果存在) 可以写成:

$$e(k) = \hat{e} + \operatorname{Re}\left\{\sum_{r=0}^{2q} E^r e^{ir\omega k}\right\} \quad (4)$$

其中, $e(k) \in \mathbf{R}^m$, $E^r \in \mathbf{C}^m$, “Re” 表示实部。将 $f(\cdot; \cdot)$ 相对 $e(k)$ 进行 Taylor 展开到 $2q+1$ 阶, 并将 $e(k)$ 用 (4) 替换, 可得:

* 收稿日期: 2005-12-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371136)

作者简介: 曾丽 (1979 年生), 女, 博士; E-mail: zszuzengli@126.com

$$f(e(k); \mu) = f(\hat{e}(\mu)) + \operatorname{Re}\left\{\sum_{r=0}^{2q} E^r e^{i\omega k}\right\} \quad (5)$$

这里系数 F^r 依赖于 Jacobian 矩阵 $J(\mu)$ 、微商 $D_j f(e(k); \mu) = \partial f(e(k); \mu) / \partial e^j(k) |_{e(k)=\hat{e}}, j=2, \dots, 2q+1$ 及向量 E^r 。由谐波平衡原理可知:

$$E^r = -G(e^{i\omega}; \mu) F^r \quad (6)$$

因此, 在一定简化假设下, 可以计算出 E^r 逼近真实解。下一节将用二阶谐波平衡法 (即 $q=1$) 讨论具时滞非线性映射的 Hopf 和倍周期分岔。

2 时滞情形的分岔分析

考虑具时滞的差分方程:

$$x(k+1) = A_1(\mu)x(k) + A_2(\mu)x(k-\tau) + B(\mu)g(y(k); \mu), y(k) = C(\mu)x(k) \quad (7)$$

其中, $k \in \mathbb{N}$, $x(k+1), x(k), x(k-\tau) \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^s, g(\cdot; \cdot): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^l$, 矩阵 $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times l}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 都是 μ 的光滑函数, τ 是时间延迟常数。类似上节的做法, 选择适当的矩阵 D , 将方程 (7) 转化为如上节所述的闭环形式:

$$x(k+1) = (A_1(\mu) + B(\mu)DC(\mu))x(k) + A_2(\mu)x(k-\tau) + B(\mu)u(k), y(k) = C(\mu)x(k) \quad (8)$$

等价于:

$$Z(e) = -G(z, \mu)Z(u) \quad (9)$$

其中,

$e(k) = -y(k) = -C(\mu)x(k), u(k) = f(e(k); \mu) = g(-e(k); \mu) + D e(k), G(z, \mu) = C(\mu)[zI - (A_1(\mu) + B(\mu)DC(\mu)) - A_2(\mu)z^{-\tau}]^{-1}B(\mu)$ 不动点 e 可以通过解方程 (3) 得到, 那么在该点附近非线性块的线性化为:

$$J(\mu) = \frac{\partial f}{\partial e} \Big|_{e=\hat{e}} = \frac{\partial g(-\hat{e}; \mu)}{\partial e} \Big|_{e=\hat{e}} + D$$

而线性化系统的特征函数为:

$$h(\lambda, z, \mu) = \det[\lambda I - G(z, \mu)J(\mu)] = 0 \quad (10)$$

由 $h(-1, e^{i\omega}; \mu) = 0$ 可得临界点 (ω_0, μ_0) 。下面分两部分分别讨论 Hopf 分岔和倍周期分岔。

2.1 Hopf 分岔

取 $q=1$, 由 Hopf 分岔出来的周期轨的二阶谐波表示为:

$$e(k) = \hat{e} + \operatorname{Re}\{E^0 + E^1 e^{i\omega k} + E^2 e^{2i\omega k}\} \quad (11)$$

这里假设 $|E^0| = O(|E^1|^2), |E^2| = O(|E^1|^2)$ (即考虑小振幅轨道), $E^r (r=0, 1, 2)$ 是谐波级数展开的复系数。

固定参数 μ , 记 $J = J(\mu), G(e^{i\omega}; \mu) = G(z, \mu) |_{z=e^{i\omega}}$, 相应地谐波平衡公式 (6) 变为:

$$E^r = -G(e^{i\omega}; \mu) F^r, r=0, 1, 2 \quad (12)$$

其中, $F^r = F^r(E^0, E^1, E^2)$ 是非线性反馈 $f(e(k); \mu)$ 的 Fourier 系数, 并可以求得 E 和 F^r 的关系式为:

$$\begin{aligned} E^0 &= -G(1)F^0 = -G(1) \cdot \\ [JE^0 + 1/D_2 g(E^1 \otimes E^1)] &+ O(|E^1|^4), \\ E^1 &= -G(e^{i\omega})F^1 = -G(e^{i\omega}) \cdot \\ [JE^1 + 1/D_2 g(2E^0 \otimes E^1 + E^1 \otimes E^2) + \\ 1/D_3 g(3AE^1 \otimes E^1 \otimes E^1)] &+ O(|E^1|^4), \\ E^2 &= -G(e^{2i\omega})F^2 = -G(e^{2i\omega}) \cdot \\ [JE^2 + 1/4 D_2 g(E^1 \otimes E^1)] &+ O(|E^1|^4) \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\bar{\cdot}$ 表示复数的共轭, $\otimes$ 表示张量积算子, $O(|E^1|^4)$ 表示由高阶 HBA 得到的高次项, $D_j g = D_j g(\hat{e}; \mu) |_{e=\hat{e}}$ 表示在 e 处的 j 阶多线性导数算子。

类似文 [3-6] 的做法, 再令 (13) 中近似地有 $E^1 = 0$, 这里 v 是 $G(e^{i\omega})J$ 相应于特征值 $\lambda(e^{i\omega}; \mu)$ (λ 是特征方程 (10) 的根中最接近 $-1+i0$ 的特征值) 的右特征向量, θ 是振动周期解的近似振幅, 则可得

$$\begin{aligned} E^0 &= V_H \theta^2 = \\ &- [I + G(1)J]^{-1} G(1) \frac{1}{4} D_2 g(v \otimes \bar{v}) \theta^2 \\ E^2 &= V_H \bar{\theta}^2 = \\ &- [I + G(e^{2i\omega})J]^{-1} G(e^{2i\omega}) \frac{1}{4} D_2 g(v \otimes v) \theta^2 \\ p_{Hd}(\omega, v, \tau) &= [D_2 g(V_H \otimes v + \frac{1}{2} \bar{v} \otimes V_{2H}) + \\ &\frac{1}{8} D_3 g(v \otimes v \otimes \bar{v})] \end{aligned} \quad (14)$$

若令

$$H(z, \mu) = [I + G(z, \mu)J(\mu)]^{-1} G(z, \mu), \\ Q = D_2 g v, L = D_3 g v^2$$

则上述表达式简单地记为:

$$V_H = -1/AH(1; \mu)Q\bar{v}, V_{2H} = -1/AH(e^{2i\omega}; \mu)Qv \\ p_{Hd}(\omega, v, \tau) = QV_H + 1/2 QV_{2H} + 1/8 L\bar{v}$$

将上述表达式代入 (13) 的第二式, 并在两边左乘 s^T (s^T 是 $G(e^{i\omega})J$ 相应于特征值 λ 的正规范化左特征向量), 得到

$$[1 + \lambda(e^{i\omega}; \mu)] s^T v = -s^T G(e^{i\omega}; \mu) p_{Hd}(\omega, v, \tau) \theta^2 + O(\theta^3)$$

从而有近似表达式

$$\lambda(e^{i\omega}; \mu) = -1 + \xi_{Hd} \theta^2 \quad (15)$$

由此可估算出周期解的真实频率 ω 、振幅 θ 其中

$$\xi_{Hd} = -\frac{s^T G(e^{i\omega}) p_{Hd}}{s^T v}$$

至于分岔出来的周期解的稳定性由下面的表达式决定, 推导过程可参见文 [5-6]:

$$\sigma_{Hd} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{s^T G(e^{i\omega}) p_{Hd} e^{-i\omega}}{s^T \frac{G(z, \mu)}{\partial z} \big|_{z=e^{i\omega}} J(\mu) v} \right\} \quad (16)$$

当 $\sigma_{Hd} > 0$ ($\sigma_{Hd} < 0$) 时, 发生的是超临界 (次临界) 的 Hopf 分岔。特别当 $\sigma_{Hd} = 0$ 时, 文 [5-7] 已经讨论了无时滞时 ($\tau=0$) 的退化 Hopf 分岔。注意到 σ_{Hd} 虽然依赖于精确解的频率, 但是实际只需在临界值 $\mu = \mu_0$, $\omega_0 = \omega_H$ 处计算出结果即可。

2.2 倍周期分岔

这一节开始讨论倍周期分岔, 其相关公式的推导完全类似于对 Hopf 分岔的讨论, 不过此时频率 $\omega = \omega_D = \pi$, 周期二解可近似地表示如下:

$$e(k) = \hat{e} + E^0 + E^1 e^{ik}$$

其中, E^0 表示相对于不动点的移位, E^1 决定周期二轨道的振幅。

假定 $|E^0| = O(|E^1|^2)$, 非线性函数 $f(e(k); \mu)$ 的 Fourier 系数表示为:

$$\begin{aligned} F^0 &= JE^0 + 1/2 D_2 g E^1 \otimes E^1 + O(|E^1|^4) \\ F^1 &= JE^1 + D_2 g E^0 \otimes E^1 + \\ &1/6 D_3 g E^1 \otimes E^1 \otimes E^1 + O(|E^1|^4) \end{aligned} \quad (17)$$

谐波平衡方程为:

$$E^0 = -G(1; \mu) F^0, E^1 = -G(e^{i\pi}; \mu) F^1 \quad (18)$$

仍令 $E^1 = \theta v$, s^T, v 分别为 $G(-1; \mu)$ 对应特征根 $\lambda(-1; \mu)$ 的左、右特征向量。那么, 由 (17)、(18) 可解得 $E^0 = V_\omega \theta^2$, 其中 $V_\omega = -1/2 H(-1; \mu) Q v$, 这里 H, Q 的定义同上一节, 不过都是在 $\omega = \omega_D = \pi$ 取值。同时, 还可得到对应上节 (14) - (16) 的表达式:

$$\begin{aligned} p_{Dd}(v, \tau) &= Q V_\omega + 1/6 K v \\ \lambda(-1; \mu) &= -1 + \xi_{Dd} \theta^2 + O(\theta^3) \\ \sigma_{Dd} &= -\frac{s^T G(-1; \mu_0) p_{Dd}(v, \tau)}{s^T \frac{\partial G(z, \mu_0)}{\partial z} \big|_{z=-1} J(\mu_0) v} \end{aligned}$$

其中

$$\xi_{Dd} = -\frac{s^T G(-1; \mu) p_{Dd}(v, \tau)}{s^T v}$$

(π, μ_0) 是 $h(-1; e^{i\pi}; \mu) = 0$ 确定出的临界值。一旦确定了临界值, 计算出上述表达式, 则可确定出周期二解的近似表达式, 并由 σ_{Dd} 确定其稳定性, 即 $\sigma_{Dd} > 0$ ($\sigma_{Dd} < 0$) 时, 表现为超临界 (次临界) 分岔。对于 $\sigma_{Dd} = 0$, $\tau = 0$ 的情形, 即此时发生的是退化倍周期分岔, 文 [8] 中利用范式和奇异性理论做了详细分析。

注 1 上述 2.1 和 2.2 两节的结果都允许有多个时间延迟, 只需对上面的推导公式作简单的修正就行了, 具体可参见文 [9]。

3 应用

考虑如下具时滞的离散复合种群模型^[10]:

$$\begin{cases} x(k+1) = \mu x(k)(1-x(k)) + \\ \quad b(y(k-\tau) - x(k-\tau)) \\ y(k+1) = \mu y(k)(1-y(k)) + \\ \quad b(x(k-\tau) - y(k-\tau)) \end{cases}$$

其中, $\tau=1$ 是整数时滞量, 考虑系统在不动点 $\hat{x} = (1-\mu, 1-\mu)^T$ 的分岔。简单的计算表明该不动点稳定的参数区域为 $1 < \mu < 3$, $0 \leq b < 1/2$ 。按照第 2 节的做法, 选择

$$B = C = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2(1-\mu) \\ 2(1-\mu) & 0 \end{bmatrix}$$

可以计算得到:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -b & b \\ b & -b \end{bmatrix},$$

$$f(e(k)) = \begin{bmatrix} -\mu e_1(k)^2 + 2(1-\mu)e_2(k) \\ -\mu e_2(k)^2 + 2(1-\mu)e_1(k) \end{bmatrix}$$

$$G(z) = C(zI - A_1 - BDC - A_2 z^{-1})^{-1} B =$$

$$\begin{bmatrix} z - \mu + bz^{-1} & 2(1-\mu) + bz^{-1} \\ 2(1-\mu) + bz^{-1} & z - \mu + bz^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(z + 2 - 3\mu + 2bz^{-1})(z + \mu - 2)$$

其中, $e(k) = (e_1(k), e_2(k))^T = -(x(k), y(k))^T$, 频域中的不动点为 $\hat{e} = (1-\mu, 1-\mu)^T$ 。非线性块的线性化为 $J = \begin{bmatrix} -2(1-\mu) & 2(1-\mu) \\ 2(1-\mu) & -2(1-\mu) \end{bmatrix}$, $G(e^{i\omega})J = \frac{2(1-\mu)}{e^{i\omega} + 2 - 3\mu + 2be^{-i\omega}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的特征值为

$$\lambda_1(e^{i\omega}) = 0, \lambda_2(e^{i\omega}) = \frac{4\mu - 4}{e^{i\omega} + 2 - 3\mu + 2be^{-i\omega}}$$

故选 $\lambda(\omega) = \lambda_2(e^{i\omega})$, 其相应的左、右特征向量为 $s^T = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ 。首先分析 Hopf 分岔, 这时 b 为分岔参数, 通过计算得到:

$$V_H = \frac{\mu}{4(\mu-1)}(1, 1)^T, V_H = \frac{\mu}{4(e^{i2\omega} + \mu - 2)}(1, 1)^T,$$

$$p_{Hd} = \frac{\sqrt{2}\mu^2}{8} \left(\frac{2}{\mu-1} + \frac{1}{e^{i2\omega} + \mu - 2} \right) (-1, 1)^T,$$

$$\xi_{Hd} = \frac{\mu^2}{4(e^{i\omega} + 2 - 3\mu + 2be^{-i\omega})} \left(\frac{2}{\mu-1} + \frac{1}{e^{i2\omega} + \mu - 2} \right)$$

首先由

$$\lambda(\omega) = -1 + \xi_{Hd} \theta^2$$

可将上述等式看成 $\lambda(\omega)$ 的 Nyquist 图与起始于

-1 方向为 ξ_{Hd} 的射线的交点，利用图示法求出它们的交点 $q(\omega, b) = \lambda(\omega)$ ，从而计算得到交点对应的 ω 值，以及 θ 的值。因此由分岔得到的周期解近似为

$$x(k) = -e(k) = -\hat{e} - \operatorname{Re}\{\theta^2 V_{0H} + \theta v e^{ik\omega} + \theta^2 V_{2H} e^{i2k\omega}\},$$

其稳定性由

$$\sigma_{Hd} = \operatorname{Re}\left\{-\frac{\mu^2(e^{i\omega} + \mu - 2)(e^{i\omega} + 2 - 3\mu + 2be^{-i\omega})e^{-i\omega}}{16(1-\mu)(e^{i\omega} + \mu - 2 - 2be^{-i\omega} - 2b(\mu - 2)e^{-i2\omega})}\left(\frac{2}{\mu - 1} + \frac{1}{e^{i\omega} + \mu - 2}\right)\right\}$$

决定。从表达式 (10) 计算可得到临界值： $b=b_0=1/2 \cos(\omega_0)=1-\mu/2$ 所以 $b=b_0, \omega=\omega_0$ 时，若 $1<\mu<2$ 则 $\sigma_{Hd}>0$ 从而分岔周期解是稳定的，发生的是超临界 Hopf 分岔；若 $2<\mu<3$ 则 $\sigma_{Hd}<0$ 这时发生的是次临界 Hopf 分岔，分岔周期解是不稳定的。

如果取 $\mu=1.5, b=0.503$ 由本文方法近似得到的极限圈和迭代得到的数值模拟如图 1 所示。图 1 (a) 中得到交点近似为 $q=-1.044+0.00312i$

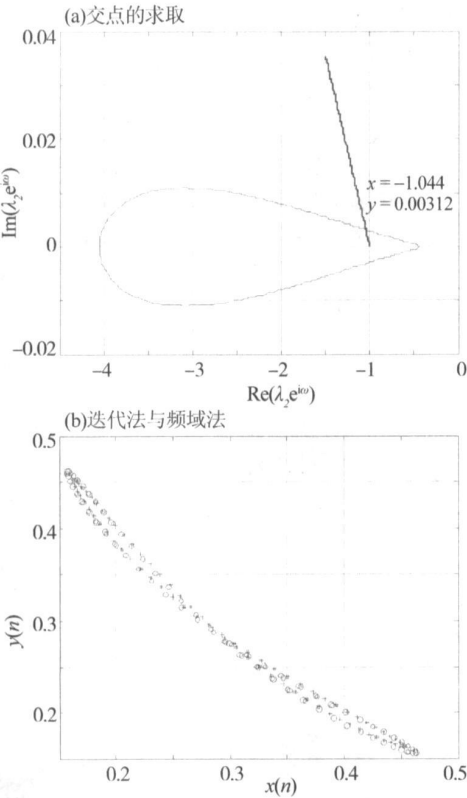


图 1 频域法得到的极限圈 (°) 与迭代模拟的 Hopf 极限圈 (+) 的比较
Fig.1 The stable invariant cycles predicted via the FDM (°) and via simulation (+)

从图 1 (b) 中可以看出，当 b 很接近分岔值 b_0 时，采用本文方法得到的和真实的极限圈是基本吻合的，定性的结果是一样的。

下面分析倍周期分岔，这时选择 μ 作分岔参数，限定 $0 \leq b < 1/2$ 计算得到：

$$V_{\omega} = \frac{\mu}{2(\mu - 1)} (1 \ 1)^T, P_{Dd} = \frac{\sqrt{2}\mu^2}{2(\mu - 1)} (-1 \ 1)^T,$$
$$\xi_{Dd} = \frac{\mu^2}{(\mu - 1)(1 - 3\mu - 2b)}$$

由

$$\lambda(\omega) = -1 + \xi_{Dd} \theta^2$$

利用图示法可求出交点 $q = \lambda(\omega)$ ，从而得到振幅 $\theta = [(1+q) \xi_{Dd}]^{1/2}$ 的值。因此由分岔得到的 2 周期解近似为

$$x(k) = -e(k) = -\hat{e} - \operatorname{Re}\{\theta^2 V_{\omega} + \theta v e^{ik\pi}\}$$

其稳定性由

$$\sigma_{Dd} = -\frac{\mu^2(1 - 3\mu - 2b)}{4(\mu - 1)^2(1 - 2b)}$$

决定。由于临界值为： $\mu=\mu_0=3, \omega_0=\omega_D=\pi$ ，故当 $\mu=\mu_0, \omega=\omega_0$ 时， $\sigma_{Dd} = \frac{q(b+4)}{8(1-2b)} > 0$ 从而分岔产生的 2 周期解是稳定的，发生的是超临界倍周期分岔。如果固定 $b=0.001$ ，以 μ 作主分岔参数的系统的分岔图如图 2 所示。从图中可以看出，当 μ 很接近分岔值 μ_0 时，采用频域法能够较好地预测系统的 2 周期解。

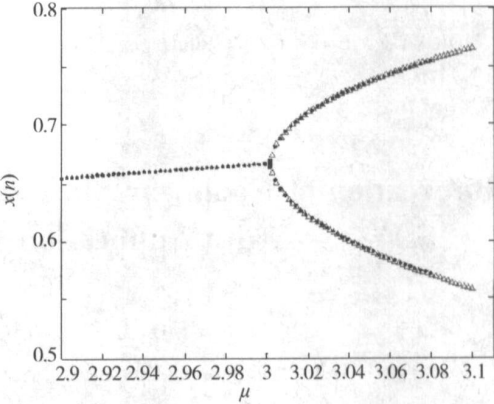


图 2 系统的分岔图：用频域法得到的 (Δ) 和迭代模拟得到的 (·) 稳定二周期轨道的比较
Fig.2 Bifurcation diagram: stable 2 period orbit via the FDM (Δ) and via simulation (·)

注 2 这里得到的结果与文 [10] 中用中心流形方法得到的结论是一致的，并且计算量相对小很多。

4 结 语

本文从控制论的角度出发, 利用频域法统一讨论了具时滞的非线性离散系统的倍周期和 Hopf 分岔。并给出了分岔产生的周期解的近似表达式, 以及它们的稳定性的判定。与采用文 [3-4] 中的结果来研究时滞映射比较, 这里提出的方法不会增加系统维数, 计算更加直接、简便。尽管该方法只能讨论局部解, 但与其它时域分析方法 (比如范式法、中心流形法等) 比较具有其独特的优点: ①在本文的方法中分析的是关于变量 $e(k)$ 的计算, 而它的维数 m , 一般不大于 $x(k)$ 的维数 n , 故该方法计算量相对较小; ②分析周期解分岔相对简便, 尤其在计算稳定性表达式时计算量较小; ③可以很方便地分析多变量多参数情形; ④便于工程应用上的实现。当然, 该方法也有一定的局限性, 主要表现在: ①对小振幅的周期解近似效果好, 而对大振幅的周期解近似效果较差, 不过定性分析的结果能够保持一致, 对于这类问题可以使用更高阶的谐波平衡法来解决; ②用于分岔分析仅适用于局域分析。今后我们将用该方法来讨论时滞非线性映射的分岔控制及退化情形 (稳定性指数为零) 的分岔。

参考文献:

- [1] MODIA J L, CHEN G. Frequency domain approach to computation and analysis of bifurcations and limit cycles a tutorial [J]. *Int J Bifurcation and Chaos* 1993 3(4): 843-867
- [2] MODIA J L, CHEN G. Hopf Bifurcation Analysis A Frequency Domain Approach [M]. Singapore: World Scientific Press, 1996
- [3] D'AMICO M B, MODIA J L, PAOLINIE E. Controlling bifurcations in maps via a frequency domain approach [J]. *Dyn Contin Discrete Impuls Syst Ser B Appl Algorithms* 2003 10: 781-798
- [4] D'AMICO M B, MODIA J L, PAOLINIE E. Hopf Bifurcation for maps A frequency domain approach [J]. *IEEE Trans Circuits Syst I* 2002 49(1): 281-287
- [5] D'AMICO M B, PAOLINIE E, MODIA J L. Stability analysis of degenerate Hopf bifurcations for discrete time systems [J]. *Latin American Applied Research* 2003 33: 413-418
- [6] MEES A I, CHUA L O. The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems [J]. *IEEE Trans Circuits Syst* 1979 26(4): 235-254
- [7] ARONSON D G, CHORY M A, HALL G R, MCGHEE R P. Bifurcations from an invariant circle for two parameter families of maps of the plane A computer assisted study [J]. *Comm Math Phys* 1982 83: 303-354
- [8] PECKHAM B B, KEVREKIDIS I G. Period doubling with higher order degeneracies [J]. *SIAM J Math Anal* 1991 22: 1552-1574
- [9] BERNSTEIN D W, MODIA J L, CHEN G. Predicting period doubling bifurcations and multiple oscillations in nonlinear time delayed feedback system [J]. *IEEE Trans Circuits Syst I* 1998 45(7): 759-763
- [10] ZENG L, ZHAO Y, HUANG Y. Hopf Bifurcation in a discrete metapopulation model with delay and dispersion [J]. *Acta Mathematica Applicata Sinica (Chinese)* 2006 29(4): 747-754

Bifurcation of Nonlinear Maps with Time Delay in the Frequency Domain with Application to a Metapopulation Model

ZENG Li^{1,2}, ZHAO Yi¹, SUN Wei¹, ZONG Xitai¹

(1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

2. Department of Mathematics, School of Informatics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou 510420, China)

Abstract A unified frequency-domain method to analyze Hopf and period doubling bifurcations in nonlinear maps having time delay in the linear feed forward path is presented. The technique relies on the HBA (harmonic balance approximation) and feedback systems theory. The expressions of the bifurcation solution and the stability are obtained. Finally the result obtained is applied to a discrete metapopulation model.

Key words discrete-time system; frequency domain method (FDM); harmonic balance approach; Hopf bifurcation; period doubling bifurcations; metapopulation model