

Bergman 空间上的 Toeplitz 算子与 Berezin 变换^{*}

钟巧红

(嘉应学院数学系, 广东 梅州 514015)

摘要: 利用 Berezin 变换^[1]给出了单位球上 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子有界及紧的充要条件, 即: 设 $f \in BMO^p(B)$, 则 T_f 在 $L_a^p(B)$ 上有界当且仅当 f 有界; T_f 在 $L_a^p(B)$ 上是紧的当且仅当 $\|f\| \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \partial B$).

关键词: Bergman 空间; Berezin 变换; Toeplitz 算子

中图分类号: O177.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 02-0008-04

1 相关记号

记 n 维复空间 C^n 的单位球为 B , $H(B)$ 为单位球 B 上全体解析函数所构成的空间, 用 $\langle z, w \rangle$ 表示 C^n 的内积, 其定义为 $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$. B 上规范化的 Lebesgue 测度记为 dV . 当 $1 \leq p < \infty$ 时, B 上 p 方可积的可测函数全体构成的空间记为 $L^p(B)$. 称 $L_a^p(B) = L^p(B) \cap H(B)$ 为 Bergman 空间, 在范数 $\|f\|_p = \left(\int_B |f(z)|^p dV(z) \right)^{1/p} < \infty$ 下, $L_a^p(B)$ 是一个 Banach 空间. 当 $p=2$ 时, $L_a^2(B)$ 是一个 Hilbert 空间, 其内积为 $\langle f, g \rangle = \int_B f \bar{g} dV$. 记 $L_a^2(B)$ 的再生核为 K_z , 其中 $K_z(w) = \frac{1}{(1 - \langle w, z \rangle)^{n+1}}$. 由于 $\|K_z\|_2^2 = \langle K_z, K_z \rangle = K_z(z) = 1/(1 - |z|^2)^{n+1}$, 其规范化的再生核为 $k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\|K_z\|_2} = \frac{(1 - |z|^2)^{\frac{n+1}{2}}}{(1 - \langle w, z \rangle)^{n+1}}$. 易验证 $k_z \in L_a^2$ 并且 $\langle k_z, k_z \rangle = \int_B |k_z|^2 dV = 1$. 令 $\varphi_z(w) = \frac{z - P_z w - S_z Q_z w}{1 - \langle w, z \rangle}$, 其中 $z, w \in B$, $P_z(w)$ 表示 w 在 z 张成的线性空间上的投影, 即 $P_0(z) = 0$ 当 $z \neq 0$ 时, $P_z(w) = \frac{\langle w, z \rangle z}{|z|^2}$, 而 $Q_z = 1 - P_z$, $S_z = \sqrt{1 - |z|^2}$, 则 φ_z 为 B 上的解析自同构. 对于 $p \geq 1$, 如果 $f \in L^p(B)$ 且 $\sup_{z \in B} \int_B |f(w) - f(z)|^p |k_z(w)|^2 dV(w) < +\infty$, 则称 $f \in BMO^p(B)$. 定义

$$\|f\|_{BMO^p} = \sup_{z \in B} \left[\int_B |f(w) - f(z)|^p |k_z(w)|^2 dV(w) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_p = \|f\|_{BMO^p} + |f(0)|.$$

记 $\beta(\cdot, \cdot)$ 为 B 上的 Bergman 度量 (参见文 [1] 与 [2]). 又记 $E(z, \eta) = \{w \in B : \beta(z, w) < \eta\}$. 对 $E \subseteq B$ 及 B 上的可测函数 f , 置 $|E| = \int_E dV$, $f_E = \frac{1}{|E|} \int_E f(w) dV(w)$. 给定 $r > 0$, 记 $f(z) = f_{E(z, r)} = \frac{1}{|E(z, r)|} \int_{E(z, r)} f(w) dV(w)$. 由文 [2] 中定理 1 可知 $f \in BMO^p(B)$ 的充要条件是 $\|f\| = \sup_{z \in B} \left\{ \frac{1}{|E(z, r)|} \int_{E(z, r)} |f(w) - f(z)|^p dV(w) \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$ 对任一 (或某一) $r > 0$ 成立, 此时 $\|f\|_{BMO^p} \sim \|f\|$. 又由文 [2] 中定理 5 可知, 当 $q > p \geq 1$ 时有 $L^q(B) \subset BMO^p(B) \subset L^p(B)$, $BMO^q(B) \subset BMO^p(B) \subset BMO^q(B)$.

定义 B 上的 Bloch 空间 β 为

$$\beta(B) = \{h \in H(B) \text{ 并且 } \|h\| = \sup_{z \in B} (1 - |z|^2) |\nabla h(z)| < \infty\}$$

$\|\cdot\|$ 只是 β 上的一个半范, 其范数由 $\|h\|_\beta = |h(0)| + \sup_{z \in B} (1 - |z|^2) |\nabla h(z)|$ 给出. 在此范数下, Bloch 空间 β 是一个 Banach 空间.

设 P 是 $L^2(B) \rightarrow L_a^2(B)$ 的正交投影, 则

$$P(h)(z) = \int_B \frac{h(w)}{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+1}} dV(w).$$

设 $f \in L(B)$, $u \in H$. Toeplitz 算子 T_f 定义为

$$T_f u(z) = P(fu)(z) = \int_B \frac{f(w) u(w)}{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+1}} dV(w)$$

* 收稿日期: 2006-09-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371136)

作者简介: 钟巧红 (1967 年生), 女, 讲师, E-mail: zhongqh@163.com

设 S 是 $L^2_\star(B)$ 上的有界算子, 则 S 的 Berezin 变换 S 定义为^[3] $S(z) = \langle S_k, k \rangle$. 由定义可知如果 S 是有界算子, 则 S 是 B 上的有界函数. 另外, 由于当 z 趋近于球的边界 ∂B 时, k 弱趋近于 0 从而当 S 是紧算子时, 则 $S \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$. 对 $f \in L^1(B)$ 的 Berezin 变换定义为 (参见 [3])

$$\tilde{f}(z) = T_f(z) = \int_B |f(w)|^2 dV(w)$$

当 $f \in BMO(B)$ 时, 本文得到了 Toeplitz 算子在 Bergman 空间上为有界算子及紧算子的充要条件. 推广了文献 [4] 的结论. 整篇文章都用 C 表示常数, 并且在不同的地方表示的值可以不一样.

2 几个引理

引理 1^[5] 给定 $\varepsilon > 0$ 则存在仅与 ε 有关的常数 C 对任意 $z \in B, w \in E(z, \varepsilon)$ 成立 $\frac{1}{|E(z, \varepsilon)|} \leq C |k(w)|^2$.

引理 2 设 $f \in BMO(B)$, 则 $\tilde{f}$ 有界当且仅当 f 有界.

证明 设 $z \in B, w \in E(z, \varepsilon)$, 则由引理 1 可得

$$|f - \tilde{f}| \leq \frac{1}{|E(z, \varepsilon)|} \int_{E(z, \varepsilon)} |f(w) - \tilde{f}(z)| dV(w) \leq C \int_{E(z, \varepsilon)} |f(w) - \tilde{f}(z)| \cdot |k(w)|^2 dV(w) \leq C \|f - \tilde{f}\|_1$$

从而 $\tilde{f}$ 有界当且仅当 f 有界.

引理 3^[6] 设 $t > -1, z \in B, c$ 是实数. 令 $I_t(z) = \int_B \frac{(1 - |w|^2)^t dV(w)}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+1+c}}$. 则当 $c < 0$ 时, $I_t(z)$ 在 B 中有界; 当 $c = 0$ 时, $I_t(z) \sim \log \frac{1}{1 - |z|}$; 当 $c > 0$ 时, $I_t(z) \sim (1 - |z|)^{-c}$.

应用引理 3 还有如下引理:

引理 4 假设 ε 是正数并且满足 $\varepsilon > n+2$ 以及 $\frac{1}{p} < \varepsilon < \frac{1}{n+1} \frac{p-1}{p}$. 则有 $\int_B \frac{(1 - |\lambda|^2)^{-(n+1)\varepsilon \frac{p-1}{p}}}{|1 - \langle z, \lambda \rangle|^{\frac{n+1}{2}(n+1)\varepsilon \frac{p-1}{p}}} dV(\lambda)$ 在 B 中有界.

证明 设 ε 是正数, 令 $t = -(n+1)\varepsilon \frac{p}{p-1}$ 及 $c = \frac{1}{p-1}[(n+1) - 2(n+1)\varepsilon] - 2(n+1)\varepsilon + (n+1)\varepsilon \frac{p}{p-1}$. 则 $2[\frac{n+1}{2} - (n+1)\varepsilon] \frac{p}{p-1} = n+1 + t + c$. 由于 $-t = (n+1)\varepsilon \frac{p}{p-1} < (n+1)\frac{p}{p-1}$

$\times \frac{1}{n+1} \frac{p-1}{p} = 1$ 从而 $t > -1$. 又由于

$$c = \frac{1}{p-1}[(n+1) - 2(n+1)\varepsilon] - 2(n+1)\varepsilon + (n+1)\varepsilon \frac{p}{p-1} = (n+1) \left(\frac{1-2\varepsilon + \varepsilon - 2\varepsilon + 2\varepsilon}{p-1} \right) = (n+1) \frac{1-\varepsilon}{p-1} < 0. \text{ 由引理 3 可得引理 4 的证明.}$$

引理 5 设 $f \in BMO(B)$, 如果 $\tilde{f}$ 是有界的, 则对任意的 $p \geq 1$, 有 $\|T_{f\varphi_z} 1\|_p < \infty$.

证明 对于解析函数 g 其 L^p 范数等价于 $\|g(0)\| + \|(1 - |z|^2) \nabla g(z)\|_p$. 从而

$$\begin{aligned} \|g\|_p &\leq C(\|g(0)\| + \|(1 - |z|^2) \nabla g(z)\|_p) \\ &\leq C(\|g(0)\| + \sup_{z \in B} \|(1 - |z|^2) \nabla g(z)\|) \\ &\leq C\|g\|_p \end{aligned}$$

由于 $f \in BMO(B)$, 故对所有的 $z \in B$ 有 $f\varphi_z \in BMO$. 由文 [7] 可知 Bergman 投射 P 是从 BMO 到 Bloch 空间 β 中的有界算子. 从而 $P(f\varphi_z) \in \beta$. 因此

$$\begin{aligned} \|P(f\varphi_z)\|_p &\leq C\|P(f\varphi_z)\|_\beta \leq \\ C\|P(f\varphi_z)\|_1 &= C(\|f\varphi_z(0)\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sup_{z \in B} \|f\varphi_z - f\varphi_z(w)\|_1) = \\ C(\|\tilde{f}(z)\| + \sup_{\varphi_z(w) \in B} \|f\varphi_z(w) - \tilde{f}(\varphi_z(w))\|_1) &= \\ C(\|\tilde{f}(z)\| + \sup_{u \in B} \|f\varphi_u - \tilde{f}(u)\|_1) \end{aligned}$$

故由 $f \in BMO(B)$ 及 $\tilde{f}$ 是有界的可知对任意的 $p \geq 1, \sup_{z \in B} \|T_{f\varphi_z} 1\|_p < \infty$.

引理 6 设 T 在 $L^2_\star(B)$ 上的有界算子并且 $\tilde{f}(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$, 则 $T_{f\varphi_z} 1$ 弱收敛于 $0 (z \rightarrow \partial B)$.

证明 对 $z \in B$ 定义 $U_z: L^2_\star(B) \rightarrow L^2_\star(B)$ 如下: $U_z f = (f\varphi_z)k \quad \forall f \in L^2_\star(B)$. 由于 $(k\varphi_z) = |k(w)|^2$ (文献 [6] 中定理 2.26). 作变量代换 $\rho = \varphi_z(w)$, (参见文 [8]) 有

$$\begin{aligned} \langle U_z f, U_z g \rangle &= \int_B (f\varphi_z)(w) \overline{k(w)} \cdot \overline{(g\varphi_z)(w) k(w)} dV(w) = \\ \int_B f(\rho) \overline{g(\rho)} dV(\rho) &= \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

其中, $g \in L^2_\star(B)$. 再利用 $k\varphi_z(w) = \frac{1}{k(w)}$

(参见文 [8]) 可知

$$\begin{aligned} \langle f, U_z g \rangle &= \int_B f(w) \overline{(g\varphi_z)(w) k(w)} dV(w) = \\ \int_B (f\varphi_z)(\rho) \overline{k(\rho)} \overline{g(\rho)} dV(\rho) &= \langle U_z f, g \rangle \end{aligned}$$

从而 U_z 为自伴的西算子. 由 $\tilde{f}(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$ 可知 $U_z T_{f\varphi_z} 1$ 弱收敛于 $0 (z \rightarrow \partial B)$, 即 $T_{f\varphi_z} 1$ 弱收敛于 $0 (z \rightarrow \partial B)$.

引理 7 设 $f \in BMO(B)$. 如果 $\tilde{f}(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$, 则 $\|T_{f,z}1\|_2 \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$.

证明 对于 $0 \leq \tau \leq 1$, 由于

$$\|T_{f,z}1\|_2^2 = \int_{B \setminus B_z} |T_{f,z}1(w)|^2 dV(w) + \int_{B_z} |T_{f,z}1(w)|^2 dV(w) = I(\tau) + J(\tau)$$

由引理 5 及 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$I(\tau) \leq \left(\int_{B \setminus B_z} |T_{f,z}1(w)|^4 dV(w) \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{B \setminus B_z} 1 dV(w) \right)^{1/2} \leq \|T_{f,z}1\|_4^2 (1-\tau)^{1/2} \leq C(1-\tau)^{1/2}$$

让 τ 充分接近于 1, 则可以使 $I(\tau)$ 任意小. 对同样的 τ , 由引理 6 可知 $T_{f,z}1$ 在 B 的紧子集上一致收敛于 0. 让 $z \rightarrow \partial B$ 可以使 $J(\tau)$ 充分小. 综合上述讨论, 可知当 $z \rightarrow \partial B$ 时有 $\|T_{f,z}1\|_2 \rightarrow 0$.

引理 8 设 $f \in BMO(B)$, 如果 $\tilde{f}(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$, 则对所有的 $p \geq 1$, $\|T_{f,z}1\|_p \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$.

证明 对于 $p < 2$ 我们有 $\|T_{f,z}1\|_p \leq \|T_{f,z}1\|_2$. 由引理 7 可知 $\|T_{f,z}1\|_p \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$. 对于 $p \geq 2$ 则由 Hölder 不等式可得 $\|T_{f,z}1\|_p^p \leq \|T_{f,z}1\|_2 \|T_{f,z}1\|_{2^{p-2}}^{p-1}$. 由于 $2^{p-2} \geq 2 \geq 1$, 从而由引理 7 与引理 5 可得引理 8 的证明.

应用文 [4] 中引理 3.2 的证明方法, 可得如下引理 9.

引理 9 如果 $f \in BMO(B)$, 则下列成立:

- (a) $(T_f K_w)(u) = K_w(u) P(f \varphi_z)(\varphi_z(u))$;
- (b) $\|T_f K_w\|_2 = \|T_{f,z}1\|_2$;
- (c) $T_{f,z}$ 是 $L^2(B)$ 上的有界算子.

3 主要结果及其证明

定理 1 设 $f \in BMO(B)$. 则 $\tilde{f}$ 有界当且仅当 T_f 在 $L^2(B)$ 上是有界算子.

证明 若 T_f 在 $L^2(B)$ 上是有界算子, 则显然 $\tilde{f}$ 有界. 相反, 假设 $\tilde{f}$ 有界, 由于 $f \in BMO(B)$, 故 $\|f \varphi_z(\eta) - \tilde{f}(z)\|_1 < \infty$. 对 $\eta \in B$ 应用变量代换 $w = \varphi_z(\eta)$ 有

$$\begin{aligned} \left| \tilde{f}(z) - \tilde{f}(z) \right| &= \int_B |f(w) - \tilde{f}(z)| |K(w)|^2 dV(w) \leq \int_B |f(w) - \tilde{f}(z)| |K(w)|^2 dV(w) = \int_B |f \varphi_z(\eta) - \tilde{f}(z)| dV(\eta) = \|f \varphi_z(\eta) - \tilde{f}(z)\|_1 < \infty \end{aligned}$$

即 $\sup_{\eta \in B} \int_B |f(w) - \tilde{f}(z)| dV(w) < \infty$. 又由于 $\tilde{f}$ 有界

及

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(z)| &= \left| \int_B |f(w)| |K(w)|^2 dV(w) \right| \leq \int_B |f(w)| |K(w)|^2 dV(w) = |\tilde{f}|(z), \end{aligned}$$

从而 $|f|$ 是有界函数. 又由于 $|f| \geq 0$ 从而由文 [9] 可知 T_f 是有界算子, 故易知 T_f 在 $L^2(B)$ 上也是有界算子.

由定理 1 及引理 1 即得如下推论:

推论 1 设 $f \in BMO(B)$, 则 $\tilde{f}$ 有界当且仅当 T_f 在 $L^2(B)$ 上是有界算子.

下面用 Berezin 变换来刻画 Toeplitz 算子在 $L^2(B)$ 上为紧算子的充要条件.

定理 2 设 $f \in BMO(B)$, $\tilde{f}(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$ 当且仅当 T_f 是 $L^2(B)$ 上的紧算子.

证明 若 T_f 是 $L^2(B)$ 上的紧算子, 则显然 $\tilde{f}(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$. 反之, 假设 $\tilde{f}(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow \partial B)$, 对于 $0 < \tau \leq 1$, 设 T_τ 是如下所定义的从 $L^2(B)$ 到 $L^2(B)$ 上的算子: $T_\tau = M_{\chi_{B \setminus B_z}} T_f$ 其中 $M_{\chi_{B \setminus B_z}}$ 是 $L^2(B)$ 上乘法算子, $\chi_{B \setminus B_z}$ 为 B 上的特征函数. 当 $|z| \geq \tau$ 时有 $\chi_{B \setminus B_z}(z) = 0$ 故 $M_{\chi_{B \setminus B_z}}$ 是 $L^2(B)$ 上的紧算子. 因此 T_τ 也是紧算子.

设 $g \in L^2(B)$, 有 $(T_f - T_\tau)g(z) = ((1 - \chi_{B \setminus B_z})T_f g)(z) = \chi_{B \setminus B_z}(z) \langle T_f K_w \rangle = \chi_{B \setminus B_z}(z) \langle T_f K_w \rangle \int_B g(w) \chi_{B \setminus B_z}(z) \overline{T_f K_w(w)} dV(w)$. 故 $T_f - T_\tau$ 可看作是以 $K_\tau(z, w) = \chi_{B \setminus B_z}(z) \overline{T_f K_w(w)}$ 为核的积分算子. 由 Schur 估计, 若有一个正的可测函数 $h(z)$ 及常数 C_1 及 C_2 满足对几乎所有的 $w \in B$ 成立

$$\begin{aligned} \int_B |K_\tau(z, w)| h(z) dV(z) &\leq C_1 h(w); \\ \int_B |K_\tau(z, w)| h(w) dV(w) &\leq C_2 h(z) \end{aligned}$$

则有 $\|T_f - T_\tau\| \leq C_1 C_2$.

让 $p > n+2$, $\frac{1}{p} < \epsilon < \frac{1}{n+1} \frac{p-1}{p}$, 并令 $h(z) = (K_w(z))^\epsilon = \frac{1}{(1-|z|^2)^{(n+1)\epsilon}}$, 则由引理 9 可得

$$\begin{aligned} \int_B |K_\tau(z, w)| h(w) dV(w) &= \chi_{B \setminus B_z}(z) \int_B |T_f K_w(w)| (K_w(w))^\epsilon dV(w) = \chi_{B \setminus B_z}(z) \int_B |K_w(w)| |P(f \varphi_z)(\varphi_z(w))|^\epsilon (K_w(w))^\epsilon dV(w) \end{aligned}$$

应用变量代换 $\varphi_z(w) = \eta$, Hölder 不等式及引理 4 我们有

$$\begin{aligned} \int_B |K_\tau(z, w)| h(w) dV(w) &= \chi_{B \setminus B_z}(z) \int_B |P(f \varphi_z(\eta))| |K_w(\varphi_z(\eta))|^\epsilon dV(\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (K_{\varphi_z}(\varphi_z(\psi)))^\varepsilon \int_B |k(\psi)|^2 dV(\psi) = \\
& \chi_{B \setminus B}(\varphi) \int_B |P(-f\varphi_z)(\psi)| \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
& \frac{1}{(1-|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1-|\varphi_z(\psi)|)^{(n+1)\varepsilon-\frac{n+1}{2}}} dV(\psi) \\
& \leq \frac{\chi_{B \setminus B}(\varphi)}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \left(\int_B |P(-f\varphi_z)(\psi)|^p dV(\psi) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \left(\int_B \frac{(1-|t|^2)^{\frac{n+1}{2}-\frac{p}{p-1}}}{(1-|\varphi_z(\psi)|^2)^{[(n+1)\varepsilon-\frac{n+1}{2}]\frac{p}{p-1}}} dV(\psi) \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \\
& \frac{\chi_{B \setminus B}(\varphi)}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \|T_{\varphi_z}1\|_{p^\circ} \left(\int_B \frac{1}{(1-|t|^2)^{(n+1)\varepsilon-\frac{p}{p-1}}} \right. \\
& \left. \frac{|1-\langle z, \psi \rangle|^{2[(n+1)\varepsilon-\frac{n+1}{2}]\frac{p}{p-1}}}{(1-|z|^2)^{[(n+1)\varepsilon-\frac{n+1}{2}]\frac{p}{p-1}}} dV(\psi) \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \\
& \chi_{B \setminus B}(\varphi) \frac{1}{(1-|z|^2)^{(n+1)\varepsilon}} \|T_{\varphi_z}1\|_{p^\circ} \\
& \left(\int_B \frac{(1-|t|^2)^{-(n+1)\varepsilon-\frac{p}{p-1}}}{(1-|\langle z, \psi \rangle|^2)^{[(n+1)\varepsilon-\frac{n+1}{2}]\frac{p}{p-1}}} dV(\psi) \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \\
& C \sup_{|z| \geq r} \|T_{\varphi_z}1\|_{p^\circ} h(\varphi)
\end{aligned}$$

类似地, 我们有

$$\begin{aligned}
& \int_B |K_\varphi(z, w)| h(\varphi) dV(\varphi) = \\
& \chi_{B \setminus B}(w) \int_B |T_\varphi K_w(\varphi)| (K_\varphi(\varphi))^\varepsilon dV(\varphi) \leq \\
& C \sup_{|w| \geq r} \|T_{\varphi_w}1\|_{p^\circ} h(w) \leq C \sup_{w \in B} \|T_{\varphi_w}1\|_{p^\circ} h(w) \\
& \text{再令 } C_1 = C \sup_{w \in B} \|T_{\varphi_w}1\|_{p^\circ}, \text{ 以及 } C_2 = \\
& C \sup_{|z| \geq r} \|T_{\varphi_z}1\|_{p^\circ}, \text{ 由 Schur估计有 } \|T_f - T_r\| \leq \\
& C_1 C_2. \text{ 然而当 } r \rightarrow 1 \text{ 时, 由引理 8 可知 } C_2 \rightarrow 0, C_1
\end{aligned}$$

是一个与 r 无关的常数, 从而有 $\lim_{r \rightarrow 1} \|T_f - T_r\| = 0$. 因此 T_f 是 $L^2_\star(B)$ 上的紧算子.

参考文献:

- [1] BECELLE D, BERGER C A, COBURN L A et al. BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains [J]. J Funct Anal, 1990, 93: 310—350.
- [2] 胡璋剑. 关于 BMO_b 和 Bloch 函数 [J]. 数学学报, 1993, 36(3): 423—430.
- [3] AXLER S, ZHENG Dehao. Compact operators via the Berezin transform [J]. Indiana Univ Math J, 1998, 47: 1—50.
- [4] ZORBOŠKA N. Toeplitz operators with BMO symbols and the Berezin transform [J]. Int J Math Math Sci, 2003, 46: 2929—2945.
- [5] BERGER C A, COBURN L A, ZHU Keh. Function theory on Caran domains and the Berezin—Toeplitz symbol calculus [J]. Amer J Math, 1988, 110: 921—953.
- [6] RUDN W. Function Theory in the Unit Ball of C^n [M]. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [7] LI H, LUECKING D H. BMO on strongly pseudoconvex domains: Hankel operators, duality and $\bar{\partial}$ -estimates [J]. Trans Amer Math Soc, 1994, 346: 661—691.
- [8] 于涛, 孙善利. 紧算子与 Berezin 变换 [J]. 吉林大学学报: 自然科学版, 1999, 3: 25—29.
- [9] ZHU Keh. Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains [J]. J Operator Theory, 1988, 20(2): 329—357.

Toeplitz Operators on the Bergman Space and Berezin Transform

ZHONG Qiao-hong

(Department of Mathematics, Jia-Ying University, Meizhou 514015, China)

Abstract: The sufficiency and necessary conditions are given for the boundedness or compactness for the Toeplitz operator T_f on the Bergman space of the unit ball by using the Berezin transform of f , i.e.: Assume $f \in BMO(B)$, then T_f is bounded on $L^2_\star(B)$ if and only if f is bounded, T_f is compact on $L^2_\star(B)$ if and only if $f \rightarrow 0(z \rightarrow \partial B)$.

Key words: Bergman space, Berezin transform, Toeplitz operator