

# 基于绝热量子演化的量子状态转换方法<sup>\*</sup>

文家焱<sup>1,2</sup>, 梁世东<sup>3</sup>

(1. 中山大学信息科学与技术学院, 广东 广州 510275;

2. 海军兵种指挥学院, 广东 广州 510431;

3. 中山大学光电材料与技术国家重点实验室 // 物理科学与工程技术学院, 广东 广州 510275)

**摘 要:** 量子算法成功的标志体现为实现了正确的量子状态转换, 这一过程主要通过适当的量子算符来实现。然而, 事实证明寻找合适的量子算符是非常困难的。之前大多数研究主要采用机器学习的方法解决这一问题, 这些算法与以西量子操作为特征的量子电路模型有较大差距, 也难以分析其在量子计算机上的实现。提出利用绝热量子演化实现量子状态的转换, 与标准量子计算模型相比, 量子状态的转换更加直接, 也不用考虑算符的酉性, 因此是在量子计算及量子通信中值得借鉴的量子状态转化方法。

**关键词:** 量子计算; 量子算符; 绝热量子演化

**中图分类号:** TP301.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 04-0017-04

量子计算是一个目前比较活跃的研究领域, 已有的研究表明量子算法在解一些用经典计算机不可解或难解的问题方面具有很大的优势<sup>[1-2]</sup>。但是, 近些年来对量子算法的研究也表明, 寻找新的量子算法并不是一件很容易的事<sup>[3]</sup>。其主要原因之一就在于量子状态的难操控性, 即难于使量子状态按预定的方式演化。在算法设计上, 这一困难体现为难以找到将体系状态转变成目标量子状态的算符。在这之前, 一些文献对如何寻找进行了初步讨论。如 Dan Ventura<sup>[4]</sup>采用经典算法中的 Delta 学习规则讨论了量子算符的学习问题: 给定一组量子状态 ( $|\psi(0)\rangle, |\psi(T)\rangle$ ), 先随机地选取一个酉算符  $\hat{G}$ , 将该算符作用于  $|\psi(0)\rangle$ , 计算得到新的状态  $|\psi(1)\rangle$ ; 再计算这两个状态之间的误差, 并按 Delta 法则修正算符  $\hat{G}$  为  $\hat{G}'$ ; 重新开始之前的计算过程, 依次将算符修正为  $\hat{G}', \dots, \hat{G}^n$ , 直至  $\hat{G}^n$  作用于状态  $|\psi(0)\rangle$  后得到的状态  $|\psi(n)\rangle$  与目标状态  $|\psi(T)\rangle$  之间的误差小于规定的值为止; 此时得到的算符  $\hat{G}^n$  就是最终所需的算符。文献 [5] 则采用遗传算法讨论了算符的学习问题。这些算法的设计思路来源于经典计算学习理论, 从一定程度上它属于一种经典算法, 而不是量子版本的算法。对大量子系统而言, 这些算法所需的迭代

操作将产生巨大的计算量, 且在具体量子实现上存在不小困难。

另一方面, 找到正确算符的最终目的就是利用找到的算符将系统状态演化到所需要的目标状态。从这一个角度出发, 本文提出不需要进行通过算符学习的方法直接寻找所需的算符, 而是利用绝热量子演化直接将系统状态转变为目标状态<sup>[6-7]</sup>。绝热量子演化是利用量子力学中的绝热定理来完成量子计算的技术, 是一种与标准量子计算等价的方法<sup>[8]</sup>。其基本思路是: 将需要解决的问题表示成制备一个处于末态哈密顿量的基态  $H_T$  的量子系统  $|\psi(T)\rangle$ , 利用绝热定理, 将系统状态从某个容易制备的基态  $|\psi(0)\rangle$  开始, 绝热地将作用于系统的哈密顿量  $H_0$  变化到  $H_T$ 。如果  $H_0$  到  $H_T$  的变化足够缓慢, 量子绝热定理将保证系统最终会接近于  $H_T$  的基态上<sup>[9]</sup>, 此时对量子系统进行测量, 即可得到所需要的量子状态。

量子绝热演化涉及的物理过程是一种纯粹的量子效应, 其实验上的可行性已经得到不少验证<sup>[10-11]</sup>。文献 [8] 也证明任何标准量子电路都可以由绝热量子计算来实现。因此, 利用绝热量子演化设计的量子算法在实现上不存在困难, 也是一种更适合于在量子计算机上运行的算法。本文讨论利用量子绝热演化完成系统状态变化的过程。利用量子绝热演化, 起算符作用的系统哈密顿量较易构

\* 收稿日期: 2006-10-01

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (04009729)

作者简介: 文家焱 (1973年生), 男, 博士生, 讲师, E-mail: jiajwer@126.com

造, 相对于通过学习等方式寻找算符来说要容易得多。尽管这是一种与算符学习方式完全不同的过程, 但在完成系统状态转化方面所起的作用是相同的, 因而在考虑以何种方式完成量子计算时具有重要的参考价值。

## 1 量子绝热定理

设量子系统处于状态, 且该状态的演化遵循如下薛定谔方程:

$$\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

其中  $H(t)$  为哈密顿量 (为方便起见, 这里取  $\hbar = 1$ )。根据绝热定理, 如果系统哈密顿量以十分缓慢的方式随时间变化, 则在任何时刻, 系统的状态仍然会处于时刻  $H(t)$  的瞬时基态。

具体地, 设  $|\psi(t)\rangle$  为  $H(t)$  的本征态, 满足如下公式:

$$H(t) |\psi_k(t)\rangle = E_k(t) |\psi_k(t)\rangle \quad (2)$$

其中  $E_k(t)$  为对应于本征态  $|\psi_k(t)\rangle$  的本征值, 字母  $k$  用于区分不同的本征值 ( $k=0$  对应于系统基态)。

绝热条件与  $H(t)$  的最小能隙和到系统激发态的跃迁有关。其中最小能隙定义为系统第一激发态和基态的本征能量之差:

$$g_{\min} = \min_{0 \leq t \leq T} [E_1(t) - E_0(t)] \quad (3)$$

基态和第一激发态之间矩阵元的最大值为:

$$D_{\max} = \max_{0 \leq t \leq T} \left| \langle \psi_1(t) | \frac{dH}{dt} | \psi_0(t) \rangle \right| \quad (4)$$

根据绝热定理, 如果让系统状态在初始时刻 ( $t=0$ ) 处于其基态  $|\psi_0(t)\rangle$ , 并让该状态在  $H(t)$  下缓慢演化到  $T$  时刻, 则对给定的  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon \ll 1$ ), 只要下列条件满足:

$$D_{\max} g_{\min}^{-2} \leq \epsilon \quad (5)$$

则必有

$$|\langle \psi_0(T) | \psi(t) \rangle| \geq 1 - \epsilon^2 \quad (6)$$

(6) 式表明, 在满足绝热条件 (5) 的情况下, 系统末态将以非常高的概率处于哈密顿量  $H(T)$  的基态  $|\psi_0(T)\rangle$ 。

## 2 利用绝热演化实现量子状态转换

### 2.1 绝热量子算法

量子绝热定理可被用于设计一种新的基于含时哈密顿量的量子算法。在绝热演化过程中, 需要在初态哈密顿量  $H_0$  和末态哈密顿量  $H_T$  插入一系列随时间变化的哈密顿量, 以构成系统的绝热演化路径。适当的绝热演化路径对提高绝热量子算法的性

能有非常重要的作用。一般地, 插入到初态哈密顿量和末态哈密顿量之间的含时哈密顿量形式可以表示为如下形式:

$$H(t) = (1 - \gamma(t)) H_0 + \gamma(t) H_T \quad (7)$$

其中  $\gamma(t)$  一般为时间的单调函数, 并要满足

$$\gamma(0) = 0, \gamma(T) = 1 \quad (8)$$

以便使  $H(t)$  在  $t=0$  时及  $t=T$  时分别为初态哈密顿量  $H_0$  和末态哈密顿量  $H_T$ 。对线性插值的情况, 一般取  $\gamma = t/T$  的形式, 非线性插值情况下  $\gamma(t)$  的形式则要复杂得多, 在实际计算中往往需要根据具体情况仔细设计。

### 2.2 量子算法实现过程

问题陈述: 已知量子系统处于某一状态  $|\psi(0)\rangle$ , 现要求将该量子状态演变到  $|\psi_0(T)\rangle$ , 此为量子计算所需的目标状态。为完成上述状态演化, 设绝热量子状态转换算法为:

算法: 利用绝热量子演化转换系统状态。

输入: 系统初态  $|\psi(0)\rangle$  和初态哈密顿量  $H_0$ 。

输出: 目标状态  $|\psi_0(T)\rangle$ 。

算法步骤:

Step1 制备体系初始状态, 使之在  $t=0$  时刻处于已知状态  $|\psi(0)\rangle$ , 构造初态哈密顿量  $H_0$  为如下形式:

$$H_0 = I - |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)| \quad (9)$$

Step2 构造系统末态哈密顿量  $H_T$  为如下形式:

$$H_T = I - |\psi(T)\rangle \langle \psi(T)| \quad (10)$$

其中  $|\psi(T)\rangle$  为  $H_T$  对应的系统状态, 算法所需输出的目标状态编码为  $H_T$  的基态  $|\psi_0(T)\rangle$ 。

Step3 根据公式 (9), (10) 构造形如公式 (7) 所示的含时哈密顿量  $H(t)$ 。

Step4 使系统从状态  $|\psi_0(T)\rangle$  开始, 将  $H_t$  作用于系统, 按 (2) 式缓慢演化到  $H_0$  并保证哈密顿量的演变过程中绝热条件 (5) 一直成立。由绝热定理知, 末态系统状态  $|\psi(T)\rangle$  将以很高的概率处于其基态  $|\psi_0(T)\rangle$ 。

Step5 测量系统状态, 得到所需的状态  $|\psi_0(T)\rangle$ , 此即为所求的答案。否则回到 Step1, 重复执行步骤 Step1 到 Step5, 直到得到所需的状态为止。

绝热演化的时间  $T$  直接取决于最小能隙  $g_{\min}$  的大小。如何得到最小的能隙是绝热量子计算要解决的问题。在满足绝热条件的情况下, 最小能隙越大, 所需的绝热演化时间越短, 所设计的算法所需的运行时间也就越短。从公式 (7) 可看出, 末态哈密顿量, 含时哈密顿量和绝热演化路径的具体形式对  $g_{\min}$  的大小具有决定作用, 设计绝热量子算法时

必须仔细设计这三者，以便得到最佳的量子算法。

目前一些有关绝热量子算法的研究取得了比较好的结果<sup>[12-14]</sup>。为了得到有效的算法，计算中要仔细选择影响算法复杂度的相关项，如末态哈密顿量、绝热演化路径等。绝热定理是在  $t \rightarrow \infty$  时得到的结果，如果真要求绝热演化时间  $t \rightarrow \infty$  时算法才完成，则所设计的算法毫无意义。公式（5）中最小能隙的大小决定了绝热演化时间的长短。在实际操作中，只要系统的转化达到的一定的精度即可。最小能隙的值越大，则绝热演化时间越短，算法越有实际意义。将公式（5）变形，可以更清晰地看到，对给定的  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon \ll 1$ )，系统绝热演化如下时间后

$$T = D_{\max} / \epsilon \xi_{\min} \tag{11}$$

系统将以很高的概率  $(1 - \epsilon^2)$  达到指定的系统末态。

3 结 语

量子状态转换主要通过量子算符来实现，但相应的量子算符往往是未知的，一般需要通过机器学习等方法获取。目前提出的一些算符学习方法并非是完全量子版本的学习算法，在物理实现上存在一定的难题。文献 [15] 指出许多统计零知识 (Statistical Zero Knowledge, 简称 SZK) 问题都可归结为量子状态的产生问题。考虑到找到转变量子状态的酉量子算符非常困难，本文认为利用绝热量子演化实现量子状态转换更直接。当需要将已知量子状态演变到某一目标量子状态而相应的量子算符未知时，如果难于寻找到合适的酉算符，可以利用绝热量子演化方法将已知量子状态制备成某一量子系统的初态，而将目标量子状态编码到该量子系统末态哈密顿量的末态中。再按照设定的演化路径进行绝热演化，只要整个演化过程中绝热条件一直成立，则系统末态必为所需的目标状态。同样，本文提出的绝热量子状态转换算法是利用纯粹的绝热量子效应设计的算法，在物理实现上比较自然。目前有些绝热量子算法已经在实验上利用核磁共振技术实现。后续的研究将探讨如何用绝热量子演化方法寻找合适的酉算符，并进行简单模拟。

参考文献:

[ 1 ] SHOR P W. Polynomial time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer [ J ]. SIAM Journal on Computing 1997, 26(5): 1484 - 1509.

[ 2 ] GROVER L K. A fast quantum mechanical algorithm for

database search [ C ]. In Proc. of the 28th Annual Symposium on the Theory of Computing 1996: 212 - 219.

[ 3 ] SHOR P W. Progress in quantum algorithms [ J ]. Quantum Information Processing 2004, 3(1-5): 5 - 13.

[ 4 ] VENTURA D. Learning quantum operators [ C ]. In Proceedings of the International Conference on Computational Intelligence and Neuroscience 2000: 750 - 752.

[ 5 ] FABER J, THESS R N, GRAIDLIG A. Learning linear operators by genetic algorithms [ EB/OL ]. Technical report 2003 [ 2006-09-11 ]. [http://qubit.hccbr/files/faber\\_Learning-GA.Pdf](http://qubit.hccbr/files/faber_Learning-GA.Pdf)

[ 6 ] FARHIE, GOLDSTONE J, GUTMANN S et al. Quantum computation by adiabatic evolution [ EB/OL ]. arXiv: quant-Ph/0001106 v1, 2000 [ 2006-09-11 ]. <http://cn.arxiv.org/abs/quant-Ph/0001106>

[ 7 ] FARHIE, GOLDSTONE J, GUTMANN S et al. A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of an NP-complete problem [ J ]. Science 2001, 292: 472 - 476.

[ 8 ] AHARONOV D, DAM W V, KEMPE J et al. Adiabatic quantum computation is equivalent to standard quantum computation [ EB/OL ]. arXiv: quant-Ph/0405098 v2, 2004 [ 2006-09-11 ]. <http://cn.arxiv.org/abs/quant-Ph/0405098>

[ 9 ] 苏汝铿. 量子力学 [ M ]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2002: 213 - 216.

[ 10 ] STEFFEN M, DAM W V, HOGG T et al. Experimental implementation of an adiabatic quantum optimization algorithm [ J ]. Phys. Rev. Lett. 2003, 90(067903): 1 - 4.

[ 11 ] MIIRA A, GHOSH A, DAS R et al. Experimental implementation of local adiabatic evolution algorithms by an NMR quantum information processor [ EB/OL ]. arXiv: quant-Ph/0503060 v2, 2005 [ 2006-09-11 ]. <http://cn.arxiv.org/abs/quant-Ph/0503060>

[ 12 ] ANDRECUT M, ALIM K. Unstructured adiabatic quantum search [ J ]. International Journal of Theoretical Physics 2004, 43(4): 925 - 931.

[ 13 ] WEIZH, YING M S. A modified quantum adiabatic evolution for the Deutsch-Jozsa problem [ EB/OL ]. arXiv: quant-Ph/0512008, 2005 [ 2006-09-11 ]. <http://arxiv.org/abs/quant-Ph/0512008>

[ 14 ] FARHIE, GOLDSTONE J, GUTMANN S. Quantum adiabatic evolution algorithms with different paths [ EB/OL ]. arXiv: quant-Ph/0208135, 2002 [ 2006-09-11 ]. <http://arxiv.org/abs/quant-Ph/0208135>

[ 15 ] AHARONOV D, TA-SHMA A. Adiabatic quantum state generation and statistical zero knowledge [ C ]. Proceedings of the thirty-fifth ACM symposium on Theory of computing 2003.

# Transform of Quantum States Via Adiabatic Quantum Evolution

WEN Jia-yah<sup>2</sup>, LIANG Shi-dong<sup>3</sup>

(1. School of Information Science and Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Naval Arms Commanding Academy, Guangzhou 510431, China;

3. State Key Laboratory of Optoelectronic Material and Technology//

School of Physics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** The success of quantum algorithms is to implement correctly quantum states transform, which is mainly achieved by suitable quantum operators. It is shown that the finding of a suitable quantum operator is a great challenge. Most of previous studies solve this problem by machine learning methods. However, these algorithms are different from the standard circuit model of quantum computation which characterizes as unitary quantum operations, thus they are difficult to be realized on quantum computers. It is shown that the transform of quantum states can be implemented by adiabatic quantum evolution, which is a kind of pure quantum effect and suitable well for physical implementation. The adiabatic theorem guarantees that the final state of the system would be the desired output. It is therefore a remarkable approach for quantum states transform in quantum computation and quantum communication.

**Key words:** Quantum state transform; Quantum operators; Adiabatic quantum evolution

(上接第 12 页)

# Mode Localization and Frequency Lociveering in a Disordered Coupled Beam System

XU Wei-hua, LIU Zhong-rong, LIU Ji-ke

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** Vibration mode localization and frequency lociveering in disordered coupled beam system, such as two beams coupled with transverse and rotational springs, are studied using finite element analysis. Small disorders in the physical parameters such as Young's modulus are introduced in the investigation of the mode localization and frequency lociveering phenomena. The effect of disorder in the elastic support on the mode localization phenomenon is also discussed. It is found that an asymmetric disorder in the weakly coupled system will lead to the occurrence of mode localization and frequency loci phenomena.

**Key words:** finite element; coupled beam; disorder; mode localization