

时间尺度上二阶时滞动力方程的振动性^{*}

韩振来^{1,2}, 时宝², 孙书荣¹

(1. 济南大学理学院, 山东 济南 250022)

2. 海军航空工程学院应用数学研究所, 山东 烟台 264001)

摘要: 借助时间尺度的有关理论, 利用 Riccati 变换技巧, 研究了一类时间尺度上二阶非线性时滞动力方程解的振动性, 给出了该类方程振动的几个充分条件, 推广和改进了已有文献的有关结果。

关键词: 时间尺度; 时滞动力方程; 振动性

中图分类号: O175.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 06-0010-04

1 问题背景

1988 年, 德国学者 Stefan Hilge 在他的博士论文中首次提出了时间尺度上的分析理论^[1], 该理论统一了连续分析和离散分析理论。此文发表以后, 引起了学术界的广泛关注。Bohner 等^[2], Agarwal 等^[3] 研究了时间尺度上的几类典型的动力学方程问题, 给出一些非常好的结果。

最近几年, 对时间尺度上动力方程的振动性研究已有一些结果, 如文献 [2-7] 关于时间尺度上时滞动力方程振动性研究刚刚开始, 目前仅有几篇文章^[8-11]。最近, 韩振来等^[12] 研究了时间尺度上一类二阶 Emden-Fowler 时滞动力方程

$$\Delta^2(\vartheta) + Q(\vartheta)\tilde{x}(\tau(\vartheta)) = 0, \quad \vartheta \in T$$

的振动性。而关于下列形式的时间尺度上二阶非线性时滞动力方程

$$(P(\vartheta)(\tilde{x}(\vartheta))^{\gamma})^{\Delta} + Q(\vartheta)\tilde{x}(\tau(\vartheta)) = 0, \quad \vartheta \in T \quad (1)$$

振动性的研究尚未见到。

我们注意到, 当时间尺度 $T = \mathbb{R}$ 时, 有 $\tilde{x}(\vartheta) = x'(\vartheta)$, 这是通常的导数。方程 (1) 就变成二阶非线性时滞微分方程

$$(P(\vartheta)(x'(\vartheta))^{\gamma})' + Q(\vartheta)\tilde{x}(\tau(\vartheta)) = 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R} \quad (2)$$

当时间尺度 $T = \mathbb{Z}$ 时, 有 $\tilde{x}(\vartheta) = \Delta x(\vartheta) = x(\vartheta+1) - x(\vartheta)$, 这是通常的向前差分。方程 (1) 就变成二阶非线性时滞差分方程

$$\Delta(P(\vartheta)(\Delta x(\vartheta))^{\gamma}) + Q(\vartheta)\tilde{x}(\tau(\vartheta)) = 0, \quad \vartheta \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

关于方程 (2) 和 (3) 的特殊情况已有人研究过^[13-14]。本文将研究方程 (1) 的振动性, 给出方程 (1) 振动的几个充分条件, 改进了文献 [4-6, 8] 的有关结果。这里 $P(\vartheta)$ 和 $Q(\vartheta)$ 是定义在时间尺度区间 $[\alpha, \infty) = \{\vartheta \in T : \vartheta \geq \alpha, \alpha \in T\}$ 上的正的实数值 ϑ 连续函数。 $\tau(\vartheta)$ 是定义在 T 到 T 上的滞量函数, 且 $\tau(\vartheta) \leq \vartheta, \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \tau(\vartheta) = \infty$ 。 $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 存在正常数 L 使得 $\frac{f(x)}{x} \geq L, x \neq 0, \gamma \geq 1$ 是两个正奇数的商。

时间尺度 T 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的任意非空闭子集, 它具有由 $\mathbb{R}$ 诱导的拓扑以及 $\mathbb{R}$ 中的顺序关系。当时间尺度 T 是实数域 $\mathbb{R}$ 时, 该理论就是经典的牛顿-莱布尼兹微积分理论; 当时间尺度 T 是正整数集合 $\mathbb{N}$ 时, 该理论就是离散分析理论。时间尺度 T 上的开区间

$$(a, b) = \{\vartheta \in T : a < \vartheta < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

在时间尺度 T 上定义前跳算子

$$\sigma(\vartheta) = \inf\{\vartheta_1 \in T : \vartheta_1 > \vartheta\}$$

和

$$\rho(\vartheta) = \sup\{\vartheta_1 \in T : \vartheta_1 < \vartheta\}$$

后退算子。称 $\mu(\vartheta) = \sigma(\vartheta) - \vartheta$ 是前跳距离。如果 $\mu(\vartheta) > 0$, 则称点 ϑ 是右离散的; 如果 $\mu(\vartheta) = 0$ 则称点 ϑ 是右稠密的; 如果 $\rho(\vartheta) < \vartheta$ 则称点 ϑ 是左离散的; 如果 $\rho(\vartheta) = \vartheta$ 则称点 ϑ 是左稠密的。如果函数 $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ 在左稠密点存在有限左极限, 并且在右稠密点连续, 则称函数 f 是 ϑ 连续的, 记为 $f \in C_{rd}(T, \mathbb{R})$ 。称实数 $f(\vartheta)$ 是函数 f 在 $\vartheta \in T$ 处的

* 收稿日期: 2007-02-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471077); 山东省教育厅科技计划资助项目 (J04A60); 济南大学博士基金资助项目 (B0621)

作者简介: 韩振来 (1962 年生) 男, 在读博士研究生, 教授; E-mail: hanzhenlai@163.com

Δ 导数, 如果对任意的 $\epsilon > 0$ 存在的一个开邻域 $U = (t - \delta, t + \delta)$, 使得

$$|f(\sigma(t)) - f(t) - \dot{f}(t)[\sigma(t) - t]| \leq \epsilon | \sigma(t) - t |, \quad \forall t \in U$$

Δ 导数、前跳距离 μ 与前跳算子 σ 有下列关系:

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) \dot{f}(t)$$

如果 $F^{\Delta}(t) = f(t) \in [a, b]$

那么称 $\int_a^b f(t) \Delta s = F(b) - F(a)$ 为函数 f 在 $[a, b]$ 上的积分。同样可以定义广义积分

$$\int_a^{\infty} f(t) \Delta s = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \Delta s$$

由于研究的是方程解的振动性, 所以本文假设时间尺度 T 是无上界的, 即它是一个时间尺度上的无穷区间 $[a, \infty) = \{t \in T : t \geq a, a \in T\}$ 。

方程 (1) 的一个解是指定义在时间尺度 T 的区间 $[a, \infty)$ 上的一个实值函数 $x(t)$, 满足方程 (1)。称方程 (1) 的一个解 $x(t)$ 有一个广义零点 $t \in T$, 如果 $x(t)x(\sigma(t)) \leq 0$ 。称方程 (1) 的一个解 $x(t)$ 是一个最终正解, 如果存在 $\delta \in T, \delta \geq a$, 使得 $x(t)$ 在 $[\delta, \infty)$ 是正的。方程 (1) 的解 $x(t)$ 称为是振动的, 如果 $x(t)$ 既不最终为正, 也不最终为负。否则, 称为非振动的。方程 (1) 称为是振动的, 如果它的所有解都是振动的。

有关时间尺度上的微积分理论和时间尺度上动力方程的基本理论可以参考文献 [2]。

2 主要结果

为了证明下面的主要结论, 首先给出下面的引理。

引理 2.1 Kelle 连锁法则 [2 定理 1.90] 若 $f: R \rightarrow R$ 是连续可微的, $g: T \rightarrow R$ 是 Δ 可导的, 则 $f \circ g: T \rightarrow R$ 是 Δ 可导的, 且 $(f \circ g)^{\Delta}(t) = \int_0^1 f(g(t) + h(t)g^{\Delta}(t)) dh g^{\Delta}(t)$ 成立。

由引理 2.1 可得, 当 $x(t)$ 是 Δ 可导时, 则有下列等式成立:

$$((x(t))^{\gamma})^{\Delta} = \gamma \int_0^1 h x^{\gamma} + (1-h) x^{\gamma-1} x^{\Delta}(t) dh \quad (4)$$

引理 2.2 [4 引理 1] 设下面的条件成立:

(H₁) $u \in C_{cl}(I, R)$ 这里 $I = [t, \infty)$, $t > 0$

(H₂) $u(t) > 0, u^{\Delta}(t) > 0, u^{\Delta\Delta}(t) \leq 0, t \geq t_0$

则对每一个 $k \in (0, 1)$, 存在一个常数 $k \in T, k \geq t_0$, 有

$$u(\sigma(t)) \leq \frac{1}{k} \frac{\sigma(t)}{\tau(t)} u(\tau(t)), \quad t \geq k \quad (5)$$

引理 2.3 设 $\dot{p}(t) \geq 0$, 且

$$\int_a^{\infty} \left(\frac{1}{p(t)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta t = \infty \quad (6)$$

若 $x(t)$ 是方程 (1) 的一个最终正解, 则存在 $t \geq a$, 使得

$$x(t) \geq x(\tau(t)) > 0, \quad x^{\Delta}(t) > 0, \quad x^{\Delta\Delta}(t) < 0, \quad (p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma})^{\Delta} < 0, \quad t \geq t_0 \quad (7)$$

证明 因为是方程 (1) 的一个最终正解, 所以存在 $\delta \geq a$ 有 $x(t) > 0, x(\tau(t)) > 0, t \geq t_0$ 。由方程 (1) 得

$$(p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma})^{\Delta} = -q(t)f(x(\tau(t))) \leq -lq(t)x(\tau(t))^{\gamma} < 0, \quad t \geq \delta \quad (8)$$

因此, $p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma}$ 是最终递减函数。下面证明 $p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma}$ 最终为正。其实, 递减函数 $p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma}$ 或者最终为正, 或者最终为负。假设存在 $t \geq \delta$, 使得 $p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma} = c < 0$, 由 (8) 得

$$p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma} \leq p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma} = c < 0, \quad t \geq t_0$$

于是

$$x^{\Delta}(t) \leq \left(\frac{1}{p(t)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

由条件 (6) 得

$$x(t) \leq x(t_0) + \left(\frac{1}{p(t)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta t \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow \infty$$

这与 $x(t) > 0, t \geq \delta$ 矛盾。所以, $p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma}$ 最终为正。所以, $x^{\Delta}(t)$ 最终为正。因此, $x(t)$ 最终递增, 即最终有 $x(t) \geq x(\tau(t)) > 0$ 。由函数乘积的求导公式得

$$(p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma})^{\Delta} = \dot{p}(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma} + p(\sigma(t))[(x^{\Delta}(t))^{\gamma}]^{\Delta}$$

由 (4) 得

$$((x^{\Delta}(t))^{\gamma})^{\Delta} \geq \int_0^1 [h x^{\gamma} + (1-h) x^{\gamma-1}]^{\gamma-1} x^{\Delta\Delta}(t) dh = \gamma (x^{\Delta}(t))^{\gamma-1} x^{\Delta\Delta}(t)$$

所以

$$[(x^{\Delta}(t))^{\gamma}]^{\Delta} \geq \gamma (x^{\Delta}(t))^{\gamma-1} x^{\Delta\Delta}(t)$$

由于 $\dot{p}(t) \geq 0$, 得 $x^{\Delta\Delta}(t)$ 最终为负。因此, 存在 $t \geq \delta$, 使 (7) 成立。

定理 2.1 设 (6) 式成立, 且 $\dot{p}(t) \geq 0$ 。若存在正的 Δ 可导函数 $\delta(t)$, 对常数 $k \in (0, 1)$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_a^t q(s) \delta(\sigma(s)) \left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \right)^{\gamma} - \frac{(\delta(s)^2 p(s))}{4 l k^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \delta(\sigma(s))} \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\gamma} \left(\frac{2}{s} \right)^{\gamma-1} \Delta s = \infty \quad (9)$$

那么方程 (1) 在 $[a, \infty)$ 上是振动的。

证明 假设方程 (1) 在 $[a, \infty)$ 上有一个非振动解 $x(t)$ 。不失一般性, 不妨设 $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) \geq t \geq a$ 。由引理 2.2 和引理 2.3 对常数 $k \in (0, 1)$, 存在 $t = \max\{t, t\}$, 使得

$$x(t) \leq x(\sigma(s)) \leq \frac{\sigma(s)}{k(s)} x(\tau(t)) \leq \frac{\sigma(s)}{k(s)} x(t) \geq t \quad (10)$$

并且 (7)、(8) 成立。定义函数 $\omega(t)$ 如下:

$$\omega(t) = \alpha(t) \leq \frac{P(t)(\dot{x}(t))^{\gamma}}{(x(t))^{\gamma}}, \geq t$$

于是 $\omega(t) > 0$ 且

$$\omega^{\Delta}(t) = \frac{\dot{\omega}(t)}{\alpha(t)} \omega(t) + \alpha(\sigma(t)) \cdot \frac{(x(t))^{\gamma} (P(t)(\dot{x}(t))^{\gamma} ((x(t))^{\gamma})^{\Delta} P(t)(\dot{x}(t))^{\gamma} ((x(t))^{\gamma})^{\Delta})}{(x(t))^{\gamma} (x(\sigma(t)))^{\gamma}}$$

由 (8) 式得

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \frac{\dot{\omega}(t)}{\alpha(t)} \omega(t) - L \alpha(t) \alpha(\sigma(t)) \frac{(x(\tau(t)))^{\gamma}}{(x(\sigma(t)))^{\gamma}} - \frac{(\alpha(\sigma(t))) P(t)(\dot{x}(t))^{\gamma} ((x(t))^{\gamma})^{\Delta}}{(x(t))^{\gamma} (x(\sigma(t)))^{\gamma}}$$

由 (10) 式, 所以,

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \frac{\dot{\omega}(t)}{\alpha(t)} \omega(t) - L k \alpha(t) \alpha(\sigma(t)) \left(\frac{\tau(t)}{\sigma(t)} \right)^{\gamma} - \frac{\gamma k \alpha(\sigma(t)) \tau(t)^{\gamma} (x(t))^{\gamma-1} \omega^2(t)}{P(t) \alpha(\sigma(t))^2 \sigma(t)} \quad (11)$$

由 (7), 得 $\dot{x}(t)$ 是正的且是递减的。于是, 对固定的 $t \geq 2t$ 当 $t \in [t, \infty)$ 时, 有

$$x(t) = x(t) + \int_t^t \dot{x}(s) \Delta s \geq \int_t^t \dot{x}(s) \Delta s \geq (t-t) \dot{x}(t) \geq \frac{t}{2} \dot{x}(t) \quad (12)$$

由 (11) 和 (12), 得

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \frac{\dot{\omega}(t)}{\alpha(t)} \omega(t) - L k \alpha(t) \alpha(\sigma(t)) \left(\frac{\tau(t)}{\sigma(t)} \right)^{\gamma} - \frac{\gamma k \alpha(\sigma(t)) \left(\frac{\tau(t)}{\sigma(t)} \right)^{\gamma} \left(\frac{t}{2} \right)^{\gamma-1} \omega^2(t)}{P(t) \alpha(\sigma(t))^2 \sigma(t)}$$

因此,

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \frac{\dot{\omega}(t)}{\alpha(t)} \omega(t) - L k \alpha(t) \alpha(\sigma(t)) \left(\frac{\tau(t)}{\sigma(t)} \right)^{\gamma} - \frac{Q(t) \omega^2(t)}{(\alpha(t))^2} \quad (13)$$

这里 $Q(t) = \frac{\gamma k \alpha(\sigma(t)) \left(\frac{\tau(t)}{\sigma(t)} \right)^{\gamma} \left(\frac{t}{2} \right)^{\gamma-1}}{P(t)}$

于是, 由 (13) 得

$$\omega^{\Delta}(t) \leq -L k \alpha(t) \alpha(\sigma(t)) \left(\frac{\tau(t)}{\sigma(t)} \right)^{\gamma} + \frac{(\dot{\omega}(t))^2}{4Q(t)} - \left[\frac{\sqrt{Q(t)}}{\alpha(t)} \omega(t) - \frac{\dot{\omega}(t)}{2\sqrt{Q(t)}} \right]^2$$

因此,

$$L k \alpha(t) \alpha(\sigma(t)) \left(\frac{\tau(t)}{\sigma(t)} \right)^{\gamma} - \frac{(\dot{\omega}(t))^2}{4Q(t)} \leq -\omega^{\Delta}(t)$$

所以,

$$\int_a^{\infty} L k \alpha(s) \alpha(\sigma(s)) \left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \right)^{\gamma} - \frac{(\dot{\omega}(s))^2}{4Q(s)} \Delta s \leq \omega\left(\frac{t}{2}\right)$$

这与条件 (9) 矛盾。因此结论成立。

由定理 2.1 可知, 通过选择不同的正的 Δ 可微函数 $\alpha(t)$, 可以得到不同的振动条件。例如, 设 $\alpha(t) = t \geq a$, 定理 2.1 变为下面的结论。

推论 2.1 设 (6) 式成立。若 $\dot{P}(t) \geq 0$, 对常数 $k \in (0, 1)$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_a^t L k \alpha(s) \left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \right)^{\gamma-1} - \frac{P(s) (\sigma(s))^{\gamma-1}}{4\gamma k (\tau(s))^{\gamma}} \left(\frac{2}{s} \right)^{\gamma-1} \Delta s = \infty$$

那么方程 (1) 在 $[a, \infty)$ 上是振动的。

如果设 $\alpha(t) = 1, t \geq a$, 则定理 2.1 可以看作是二阶微分方程 Leighton-Winter 定理的推广, 即

推论 2.2 设 (6) 式成立。若 $\dot{P}(t) \geq 0$, 使得

得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \alpha(s) \left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \right)^{\gamma} \Delta s = \infty$ 。那么方程 (1) 在 $[a, \infty)$ 上是振动的。

当 $r=1, P(t) \equiv 1, t \geq a$ 时, 定理 2.1 就是文献 [8] 中的定理 1, 即

推论 2.3 设存在正的 Δ 可微函数 $\alpha(t)$, 对常数 $k \in (0, 1)$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \alpha(s) \alpha(\sigma(s)) \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - \frac{\sigma(s)}{4L k \tau(s)} \frac{(\dot{\omega}(s))^2}{\alpha(\sigma(s))} \Delta s = \infty$$

那么方程 (1) 在 $[a, \infty)$ 上是振动的。

由以上定理证明可以看出, 条件 (6) 式成立是不可缺少的。当条件 (6) 式不成立时, 则有下面的结果。

定理 2.2 设 $\dot{P}(t) > 0$, 存在正的 Δ 可导函数 $\alpha(t)$, 对常数 $k \in (0, 1)$, 使得 (9) 式成立, 若

$$\int_a^{\infty} \left[\frac{1}{P(t)} \int_a^t \alpha(s) \Delta s \right]^{\frac{1}{\gamma}} \Delta t = \infty \quad (14)$$

那么方程 (1) 的每一个解在 $[a, \infty)$ 上或是振动或是收敛于 0

证明 假设方程 (1) 在 $[a, \infty)$ 上有一个非振动解 $x(t)$ 。不失一般性, 不妨设 $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0, t \geq a$ 。由引理 2.3 的证明过程看出, $\dot{x}(t)$ 的符号只有正、负两种可能。当 $\dot{x}(t)$

> 0 时，类似定理 2.1 的证明，方程 (1) 的每一个解在 $[a, \infty)$ 上是振动的。当 $x(t) < 0$ 时， $x(t)$ 是递减的，不妨设 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = b \geq 0$ 。下面证明 $b = 0$ 。由于 $f(x(\tau(t))) \leq (x(\tau(t)))^\gamma$ ，假如 $b > 0$ 则存在 $\varepsilon > 0$ 当 $t \geq t_1$ 时，有 $x(\tau(t)) > b > 0$ ， $f(x(\tau(t))) \geq Lb^\gamma$ 。令 $y(t) = p(t)(x'(t))^\gamma$ ，则 $y(t) < 0$ 。由方程 (1) 得

$$y'(t) = -q(t)f(x(\tau(t))) \leq -Lb^\gamma q(t)$$

因此

$$y(t) \leq y(t_1) - Lb^\gamma \int_{t_1}^t q(s) \Delta s \leq -Lb^\gamma \int_{t_1}^t q(s) \Delta s$$

所以

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^t x'(\tau) \Delta s \leq -L^{\frac{1}{\gamma}} b \int_{t_1}^t \frac{1}{p(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} q(\tau) \Delta \tau^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s$$

由条件 (14) 可推出 $x(t) \rightarrow -\infty (t \rightarrow \infty)$ ，与 $x(t) > 0$ 相矛盾。故 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ，结论成立。

当 $\gamma = 1$ 时，定理 2.2 可以看作 [4] 中的定理 3.3 和 [6] 中的定理 5.2 在时滞动力方程中的推广，即

推论 2.4 设 $\delta(t) \geq 0$ ，存在正的 Δ 可微函数 $\delta(t)$ ，对常数 $k \in (0, 1)$ ，使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^t q(s) \delta(\sigma(s)) \frac{\tau(\sigma(s))}{\sigma(s)} - \frac{(\delta(\sigma(s)))^2 R(\sigma(s))}{4Lk\delta(\sigma(s))\tau(\sigma(s))} \right\} \Delta s = \infty$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{p(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} q(s) \Delta s \Delta \tau = \infty$$

成立，那么方程 (1) 的每一个解在 $[a, \infty)$ 上或是振动或是收敛于 0。

注 文献 [8—11] 的结果不能应用到方程 (1)。

参考文献:

[1] HILGER S. Analysis on measure chains— a unified approach to continuous and discrete calculus [J]. Results

Math 1990 18: 18— 56

[2] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications [M]. Boston: Birkhauser, 2001.

[3] AGARWAL R P, BOHNER M, O'REGAN D, et al. Dynamic equations on time scales: a survey [J]. J Comput Appl Math 2002 141(1—2): 1—26

[4] SAKER S H. Oscillation of nonlinear dynamic equations on time scales [J]. Appl Math Comput 2004 148(1): 81—91

[5] AGARWAL R P, O'REGAN D, SAKER S H. Oscillation criteria for second order nonlinear neutral delay dynamic equations [J]. J Math Anal Appl 2004 300: 203—217.

[6] BOHNER M, SAKER S H. Oscillation of second order nonlinear dynamic equations on time scales [J]. Rocky Mountain J Math 2004 34(4): 1239—1254

[7] MEDKO A, KNOG Q. New Kamenev type oscillation criteria for second order differential equations on a measure chain [J]. Computers Math Applic 2005 50: 1211—1230

[8] SAHNER Y. Oscillation of second order delay differential equations on time scales [J]. Nonlinear Analysis TMA 2005 63: 91073—91080

[9] ZHANG B G, DENG X H. Oscillation of delay differential equations on time scales [J]. Math Comput Model ling 2002 36(11): 1307—1318

[10] AGARWAL R P, BOHNER M, Saker S H. Oscillation of second order delay dynamic equations [J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly 2005 13(1): 1—18

[11] ZHANG B G, Zhu Shan liang. Oscillation of second order nonlinear delay dynamic equations on time scales [J]. Computers Math Appl 2005 49: 599—609

[12] HAN Z L, SUN S R, SHI B. Oscillation criteria for a class of second order Emden-Fowler delay dynamic equations on time scales [J]. J Math Anal Appl 2007 334(2): 847—858

[13] KONG Q. Interval criteria for oscillation of second order linear ordinary differential equations [J]. J Math Anal Appl 1999 229: 258—270

[14] CHEN S, ERBE L H. Riccati techniques and discrete oscillations [J]. J Math Anal Appl 1989 142: 468—487

O scillation of Second-Order Delay Dynamic Equations on Time Scales

HAN Zhen hui^{1,2}, SHI Baod, SUN Shu rong

(1. School of Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, China;

2. Institute of Applied Mathematics, Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai 264001, China)

Abstract: BY the theory of time scales and Riccati transformation, some sufficient conditions for oscillation of the second-order nonlinear delay dynamic equation on time scales are established. The results in this paper improve some known results.

Key words: time scales; delay dynamic equations; oscillation