

强非线性颤振分析的一种改进的等效线性化法^{*}

陈衍茂, 刘济科

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘要: 分析了含三次强非线性俯仰刚度的二元机翼颤振系统。线性化俯仰方向的自由振动方程, 用谐波平衡法求解该线性化方程, 得到了改进的等效线性刚度。采用改进的等效刚度, 应用等效线性化法得到了非线性颤振系统的分岔方程。算例表明, 该方法提高了等效线性化法的精度。

关键词: 非线性颤振; 谐波平衡法; 等效线性化; 等效线性刚度

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 04-0005-04

谐波平衡法在非线性颤振系统中有广泛的应用^[1-2]。等效线性化法是谐波平衡法的另一种形式^[3]。该方法用等效线性刚度代替非线性刚度, 从而获得线性化颤振系统。采用不可压气流中二元机翼非线性颤振模型, Zhao等^[4]揭示了当弹性轴位于一定的位置时, 系统将出现混沌现象。Liu等^[5]研究了三次非线性颤振系统的分岔现象, 验证了等效线性化法结果具有较高精度。Shahrazad等^[6]用等效线性化法研究了二元机翼的 3 种非线性颤振模型, 应用中心流形定理和正规型方法研究了系统的分岔现象。Yang^[7]研究了带外荷载的二元机翼和三角翼的极限环颤振, 用二阶 KBM 解改进了等效线性化法。

Lin等^[8]结合线性化法和谐波平衡法提出了一种强非线性振动分析方法。该方法在谐波平衡过程之前先线性化所考虑的方程。本文将此方法推广至强非线性颤振分析中。首先求得了非线性刚度的等效线性刚度, 结合等效线性化法得到了系统的分岔方程。

1 等效线性刚度

含三次强非线性俯仰刚度的二元机翼在俯仰方向的自由振动方程可表示为

$$\ddot{x} + kx + k_3 \dot{x}^3 = 0 \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad (1)$$

其中“ $\cdot$ ”表示关于时间的导数, k_3 不要求为小参数。记方程(1)解的频率为 ω , 那么, 其等效线性刚度为 $k_1 = \omega^2$ 。因此, 等效刚度的求解就转化为求解振动频率 ω 。引入新变量 $\tau = \omega t$, 则方程(1)变为

$$\omega^2 \ddot{x} + kx + k_3 \dot{x}^3 = 0 \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad (2)$$

其中“ $\cdot$ ”表示关于 τ 的导数。令(1)的解为

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \Delta x(\tau) \quad (3)$$

其中, $\bar{x}(\tau)$ 是 $x(\tau)$ 初始近似解, Δx 表示近似解的小修正量, 都是关于 τ 以 2π 为周期的函数。根据初始条件, 令

$$\bar{x}(\tau) = A \cos \tau \quad (4)$$

将方程(3)代入(2), 展开为 Δx 的 Taylor 级数, 忽略高次项, 可得

$$\omega^2 \Delta \ddot{x} + k \Delta x + 3 k_3 A (\cos \tau)^2 \Delta x - \omega^2 A \cos \tau + k A \cos \tau + k_3 A (\cos \tau)^3 = 0 \quad (5)$$

方程(5)关于 Δx 是线性的, 下面根据该方程求解 ω 的近似值。

1.1 一阶近似

假设

$$\Delta x = 0 \quad (6)$$

记 ω_1 是 ω 的第一阶近似, 余类推。用 ω_1 代替 ω , 将方程(6)代入(5), 展开成为 τ 的 Fourier 级数, 令 $\cos \tau$ 的系数为零, 可解得

$$\omega_1^2 = k + 3 k_3 A^2 / 4 \quad (7)$$

1.2 二阶近似

假设

$$\Delta x = \zeta (\cos \tau - \cos 3\tau) \quad (8)$$

将方程(8)代入(5), 展开为 τ 的 Fourier 级数, 令 $\cos \tau$ 和 $\cos 3\tau$ 的系数为 0 可得关于 ω , ζ 的方程

$$\begin{aligned} \zeta \left(-\omega^2 + k + \frac{3 k_3 A^2}{2} \right) - \omega^2 A + k A + \frac{3 k_3 A^3}{4} &= 0 \\ \zeta \left(9\omega^2 - k - \frac{3 k_3 A^2}{4} \right) + \frac{3 k_3 A^3}{4} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

* 收稿日期: 2006-12-21

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20050558032); 广东省自然科学基金资助项目(05003295)

作者简介: 陈衍茂(1982年生)男, 博士生; 通讯联系人: 刘济科, E-mail: liujike@mail.sysu.edu.cn

消去 ξ 并用 ω_2 代替 ω 可得

$$\omega_2^4 + b\omega_2^2 + c = 0 \quad (10)$$

其中 $a=36$ $b=-33k_3A-40k$ $c=\frac{27k_3A}{4}+4k+9k_3A$ 。方程 (10) 关于 ω_2^2 有两个根, 选择更接近 ω_1^2 的解作为 ω^2 的二阶近似^[8], 可得

$$\omega_2^2 = \frac{1}{36} (4k + 3k_3A) - \frac{k_3A}{6\Gamma_1} (32k + 51k_3A) \quad (11)$$

其中, $\Gamma_1 = -27k_3A - 32k + \sqrt{117k_3A + 1344k_3A + 1024k}$ 。

1.3 三阶近似

假设

$$\Delta x = \xi(\cos\tau - \cos 3\tau) + \zeta(\cos 3\tau - \cos 5\tau) \quad (12)$$

将方程 (12) 代入 (5), 展开为 τ 的 Fourier 级数, 令 $\cos\tau$, $\cos 3\tau$ 及 $\cos 5\tau$ 的系数为零, 可得关于 ξ , ζ , ω 的方程

$$\begin{aligned} \xi(-\omega^2 + k + \frac{3k_3A}{2}) + \zeta\frac{3k_3A}{4} - \omega^2 A + kA + \frac{3k_3A}{4} &= 0 \\ (-\xi + \zeta)(-9\omega^2 + k + \frac{3k_3A}{4}) + \frac{k_3A}{4} &= 0 \\ \zeta(25\omega^2 - k - \frac{3k_3A}{4}) - \frac{3\xi k_3A}{4} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

消去 ξ , ζ 用 ω_3 代替 ω 可得

$$\gamma_3\omega_3^6 + \gamma_2\omega_3^4 + \gamma_1\omega_3^2 + \gamma_0 = 0 \quad (14)$$

其中, $\gamma_3 = 225$ $\gamma_2 = -475k - \frac{833}{3}P$ $\gamma_1 = 35P + 27P$ $-216k + 275k + \frac{1666kP}{3}$ $\gamma_0 = -19Pk - \frac{7P}{3} - 225k + (200 - \frac{833P}{3})k - (27P - 216k)kP = 3k_3A/4$ 。

方程 (14) 关于 ω_3^2 有 3 个根, 选择最接近 ω_2 的解为 ω 的三阶近似。依以上步骤类推, 可求解更高阶的近似频率。本文将前三阶刚度用于分析强非线性颤振。

2 非线性颤振及等效线性化法

不可压气流中机翼的颤振方程为^[4]

$$\begin{aligned} \mu \ddot{h} + \mu \ddot{\alpha} + \mu \left(\frac{\omega_h}{\omega_a}\right)^2 h &= -2Q\alpha \\ \mu \ddot{x} + \mu \ddot{\alpha} + \mu \ddot{\alpha} &= (1 + 2a)Q\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

引入阻尼和三次俯仰非线性刚度, 方程 (15) 可改写为

$$m_1 \ddot{h} + m_2 \ddot{\alpha} + \mu_1 \dot{h} + k_1 h + \rho_1 Q\alpha = 0$$

$$m_{21} \ddot{h} + m_{22} \ddot{\alpha} + \mu_2 \dot{\alpha} + k_2 \alpha + k_3 \alpha^3 + \rho_2 Q\alpha = 0 \quad (16)$$

其中参数的物理意义见文[4-5]。用等效刚度

$$k_{eq} = \omega_1^2(A) \quad (17)$$

代替俯仰刚度 $k + k_3 \alpha^2$ (其中 ω_1^2 即为文[4]所采用的等效刚度), 则方程 (16) 变为

$$\begin{aligned} m_{11} \ddot{h} + m_{12} \ddot{\alpha} + \mu_1 \dot{h} + k_1 h + \rho_1 Q\alpha &= 0 \\ m_{21} \ddot{h} + m_{22} \ddot{\alpha} + \mu_2 \dot{\alpha} + k_{eq} \alpha + \rho_2 Q\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

颤振临界情况下, 机翼作简谐振动

$$h = H e^{i\lambda t}, \alpha = A e^{i\lambda t} \quad (19)$$

其中 H , A 是颤振振幅, λ 是颤振频率。将方程 (19) 代入 (18), 可得颤振行列式

$$\begin{vmatrix} -m_{11}\lambda^2 + \mu_1\lambda + k_1 & -m_{12}\lambda^2 + \rho_1 Q \\ -m_{21}\lambda^2 & -m_{22}\lambda^2 + \mu_2\lambda + k_{eq} + \rho_2 Q \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

分离实部和虚部, 可得

$$\begin{aligned} \lambda(\mu_1 k_{eq} + \mu_1 \rho_2 Q + \mu_2 k_1) - \lambda^3(m_{22}\mu_1 + m_{11}\mu_2) &= 0 \\ (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})\lambda^4 - \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (m_{11}k_{eq} + m_{11}\rho_2 Q + m_{22}k_1 + m_{21}\rho_1 Q + \mu_1 Q + \mu_1 \mu_2)\lambda^2 \\ + k_1(k_{eq} + \rho_2 Q) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

由方程 (21) 可解得

$$\lambda^2 = \frac{\mu_1 k_{eq} + \mu_1 \rho_2 Q + \mu_2 k_1}{m_{22}\mu_1 + m_{11}\mu_2} \quad (23)$$

将方程 (23) 代入 (22), 可得

$$f_2 Q + (f_1 k_{eq} + f_0)Q + f_2 k_{eq} + f_1 k_1 + f_0 = 0 \quad (24)$$

其中, $f_2 = m_1^2 \rho_2^2 - m_1 m_2 \mu_1 \rho_2$, $f_1 = 2m_1^2 \rho_2 - m_1 m_2 \mu_1 - m_2 m_{11} \mu_1 \rho_2$,

$$f_0 = 2m_1 k_1 \mu_1 \mu_2 \rho_2 - (m_1 m_2 k_1 \mu_2 + m_2 m_{22} k_1 \mu_1 \rho_2 + m_1 \mu_1^2 \mu_2 \rho_2) + m_2^2 k_1 \rho_2$$

$$f_2 = m_1^2 - m_1 m_{11} \mu_1, \quad f_1 = 2m_1 \mu_1 \mu_2 k_1 - m_2 (m_{22} k_1 + \mu_1 \mu_2) \mu_1 - m_2 m_{11} k_1 \mu_2 + m_2^2 k_1$$

$$f_0 = m_2^2 \mu_2^2 - m_2 (m_{22} k_1 + \mu_1 \mu_2) k_1 \mu_2.$$

式中: $m = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$, $m_1 = m_{11}\mu_2 + m_{22}\mu_1$, $m_2 = m_{11}\rho_2 + m_{21}\rho_1$ 。

将方程 (17) 代入 (24), 可直接绘出 $Q \sim A$ 曲线, 即为系统的分岔图。也可以先根据方程 (17) 绘出 $A \sim k_{eq}$ 曲线, 然后由方程 (24) 绘出 $k_{eq} \sim Q$ 这样可以直观地判断解的稳定性。解方程 (24), 可得

$$Q_2 = \frac{-f_1 k_1 - f_0 \pm \sqrt{(f_1^2 - 4f_2 f_0)k_1 + (2f_1 f_0 - 4f_2 f_1)k_1 + f_0 - 4f_2 f_0}}{2f_2} \quad (25)$$

方程 (25) 就是系统的 $Q \sim A$ 分岔方程。

3 算 例

系统的参数分别取： $m_1=1$ $m_2=m_3=0.25$ $m_{22}=0.5$ $\mu_1=0.1$ $\mu_2=0.1$ $k=0.2$ $\rho_1=0.1$ $\rho_2=0.04$ $k_3=20$ $k=0.5$ 或 0.0816

机翼的静发散风速 $Q_0=-k_3/\rho_2$ ，当 $Q>Q_0$ 时，机翼发散，这在飞机工程中是绝不允许的。因此，本文只给出了系统在小于 Q_0 范围内的分岔图。

图 1 是方程 (1) 的等效刚度与精确解的对比，由图可知，高阶近似解精度更高。图 2 和图 3 分别是 $k=0.5$ 和 $k=0.0816$ 时颤振系统的分岔图。可以看出，高阶的等效刚度提高了颤振分岔的计算精度。当 $k=0.5$ 时，系统 (16) 有一个超临界 Hopf 分岔点，当 $k=0.5$ 时，系统同时存在超临界亚临界的 Hopf 分岔点^[9]。丁千等^[10]和陈衍茂等^[11]分别用规范形直接法和复数正规形法判别了分岔点的稳定性。而等效线性化法既给出了系统分岔的定量描述，同时也给出了系统的某些定性性质，可以直观地判别分岔属于超临界或亚临界。

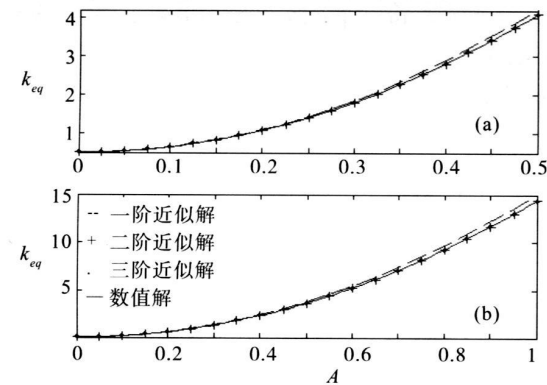


图 1 等效线性刚度

(a) $k=0.1$ $k_3=20$ (b) $k=0.5$ $k_3=20$
Fig 1 The equivalent linear stiffness with $k=0.1$ $k_3=20$ for figure (a) and $k=0.5$ $k_3=20$ for figure (b)

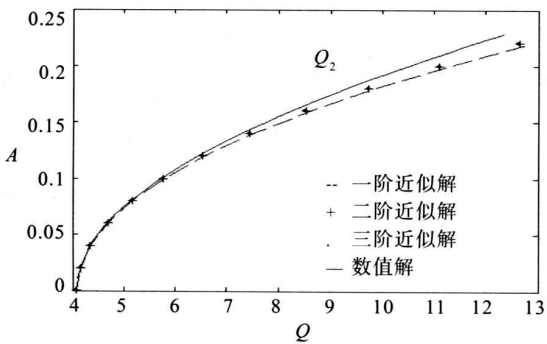


图 2 颤振系统 (16) 分岔图, $k=0.5$

Fig 2 Bifurcation chart for flutter system (16)

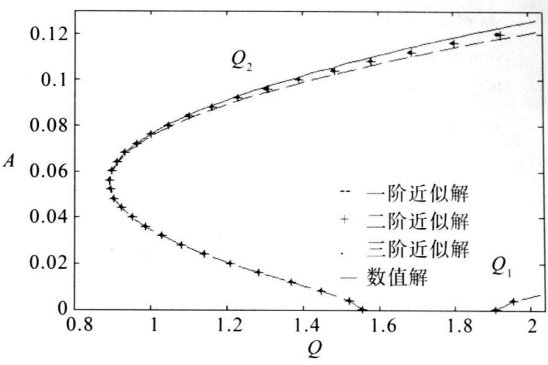


图 3 颤振系统 (16) 分岔图, $k=0.0816$
Fig 3 Bifurcation chart for flutter system (16) with $k=0.0816$

4 结 论

结合线性化法和谐波平衡法改进了三次强非线性系统的等效刚度。然后，采用改进的刚度和等效线性化法分析了强非线性颤振的分岔现象。算例表明，改进的等效刚度可以提高计算精度。

参考文献：

[1] LEE B H K PRICE S J WONG Y S Non linear aeroelastic analysis of airfoils bifurcation and chaos [J]. Prog Aerosp Sci 1999 35 205—344

[2] LIU L P DOWELL E H Harmonic balance approach for an airfoil with a freeplay control surface [J]. AIAA J 2005 43(4): 802—815

[3] LIU L P THOMAS J P DOWELL E H et al A comparison of classical and high dimensional harmonic balance approaches for a Duffing oscillator [J]. J Comput Phys 2006 215(1): 298—320

[4] ZHAO L C YANG Z C Chaotic motions of an airfoil with nonlinear stiffness in incompressible flow [J]. J Sound Vib 1989 138(2): 245—254

[5] LIU J K ZHAO L C Bifurcation analysis of airfoils in incompressible flow [J]. J Sound Vib 1991 154(1): 117—124

[6] SHAHRZAD P MAHZOON M Limit cycle flutter of airfoils in steady and unsteady flows [J]. J Sound Vib 2002 256(2): 213—225

[7] YANG Y R KBM method of analyzing limit cycle flutter of a wing with an external store and comparison with wind tunnel test [J]. J Sound Vib 1995 187(2): 271—280

[8] LM C W WU B S A new analytical approach to the Duffing—harmonic oscillator [J]. Phys Lett A 2003 311: 365—373

[9] LIU J K ZHAO L C FANG T Bifurcation point analysis

sis of airfoil flutter with structural nonlinearity [M]. Advances in Nonlinear Dynamics in China— Theory and Practice, Chapter 3. Lisse, The Netherlands, Swets & Zeitlinger Publishers, 2002

翼颤振 [J]. 飞行力学, 2005, 23(3): 85—88

[11] 陈衍茂, 刘济科. 非线性颤振极限环稳定性判别的复数正规形法 [J]. 航空动力学报, 2007, 22(4): 614—618

[10] 丁千, 王冬立. 用规范形直接法研究立方非线性机

An Improved Equivalent Linearization Method for Strongly Nonlinear Flutter Systems

CHEN Yanmao, LU Jike

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The limit cycle flutter of a two-dimensional airfoil with a strongly cubic pitching stiffness is studied. The linearization method is used to linearize the free oscillating equation of the airfoil in the uncoupled pitching mode. The linearized equation is addressed by the harmonic balance method and the equivalent linear stiffness of the nonlinear stiffness is obtained. The attained equivalent stiffness is implemented in the equivalent linearization method of nonlinear flutter analysis and the bifurcation chart of the flutter system is obtained. Two numerical examples are taken as illustrations to validate the proposed method. It shows that the attained equivalent stiffness is in excellent agreement with the numerical solutions and it can improve the accuracy of the equivalent linearization method. In addition, it is quite intuitive to judge whether the bifurcation is supercritical or subcritical by the proposed method.

Key words: nonlinear flutter; harmonic balance method; equivalent linearization method; equivalent linear stiffness

(上接第 4 页)

Haplotype Transmission Disequilibrium Test Based on Haplotype Reconstruction

LI Caixia², LI Peixing³, FANG Jiqian¹

(1. Department of Medicine Statistics and Epidemiology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510080, China;

2. Department of Radiology, University of California, San Francisco, CA 94107—1771, USA;

3. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Transmission disequilibrium test (TDT) is a classical family-based test to detect linkage and linkage disequilibrium. Haplotype transmission disequilibrium test is proposed for tightly linked loci. The method is applied to the gene mapping data for Immunoglobulin A (IgA) nephropathy. Based on haplotype frequency estimation with nuclear family data, the transmission/non-transmission cross table in TDT is reconstructed. And then symmetry test and homogeneity test for the reconstructed contingency table are given to detect haplotype transmission disequilibrium. In addition, Excel macro VBA program is developed to estimate haplotype frequencies and reconstruct transmission/non-transmission haplotypes. The proposed method available information from all families including families with missing value. The haplotype polymorphism of C2093 T-C2081 T is associated with IgA. The method generalizes the existed haplotype transmission disequilibrium test.

Key words: linkage; linkage disequilibrium; transmission disequilibrium test; nuclear family