

失调耦合梁的模式局部化和频率轨迹转向现象^{*}

徐伟华, 吕中荣, 刘济科
(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘要: 用有限元分析方法研究了由横向和扭转弹簧耦合的两条欧拉—伯努利梁在引入了物理参数 (如杨氏模量) 的不对称小失调后产生的模式局部化和频率轨迹转向现象, 同时也研究了由于弹性支承的失调而产生的振动模式局部化现象。研究表明弱耦合系统的不对称失调会导致模式局部化和频率轨迹转向现象的出现。

关键词: 有限元; 耦合梁; 失调; 模式局部化

中图分类号: TB115 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 04-0009-05

在结构分析中, 通常假定结构是对称的。然而, 由于结构存在微小的失调, 例如物理参数的失调、几何不规则和制造误差, 动力学模型会与设计的模型相差很远。众所周知, 对于周期性的结构, 若某些自由度是弱耦合的, 当结构有一些小失调, 那么结构的自由振动模式会在空间上局部化, 导致结构的振动能量集中在某限制的区域里面, 这就是所谓的振动模式局部化现象。除此以外, 两条频率轨迹曲线会相互接近, 但不会相交, 而是以很高的曲率远离对方, 这就是众所周知的频率轨迹转向现象^[1-9]。过去 30 年间, 这两种现象吸引了力学和航空领域工程师们的注意。

1958 年, Anderson^[1] 在固体物理领域首次研究了模式局部化现象。1982 年, Hodges^[7] 是最早在结构动力学领域研究局部化现象的学者。1987 年, Pierre 和 Dowell^[8] 研究了耦合摆系统的局部化现象。Pierre^[9] 在 1988 年通过对失调的两跨欧拉—伯努利梁进行实验, 运用改进的摄动方法研究了模式局部化现象, 并证实了局部化模式确实存在。Chen 和 Gbureck^[10] (1992)、Chan 和 Liu^[11] (2000) 等人运用摄动方法研究了模式局部化和频率轨迹转向现象。本文目的是应用有限元分析方法研究振动模式局部化和频率轨迹转向现象。

1 耦合梁的运动方程

图 1 表示所研究的两跨耦合梁。两条欧拉—伯努利梁在跨中利用横向和扭转弹簧相耦合, 其两端固定。原始系统自由振动的运动方程和相应的边界

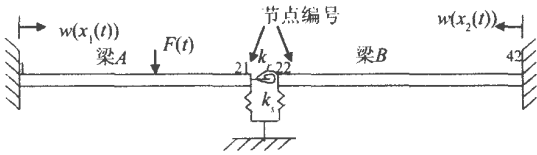


图 1 双跨耦合梁系统
Fig 1 The dual span coupled beam system

条件表示如下:

对于梁 A 有

$$\rho A_1(\bar{x}) \frac{\partial^2 w(\bar{x}, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[E I_1(\bar{x}) \frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \right] = 0 \quad (1)$$

其相应的边界条件是:

$$\begin{cases} w(\bar{x})|_{\bar{x}=0} = 0, \quad \frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0} = 0 \\ E I_1(\bar{x}) \frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=b_1} + k_b \frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=b_1} + \frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=b_2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[E I_1(\bar{x}) \frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \right] \Big|_{\bar{x}=b_1} - k_b [w(\bar{x}, t)|_{\bar{x}=b_1} - w(\bar{x}, t)|_{\bar{x}=b_2}] = 0 \\ w(\bar{x}, t)|_{\bar{x}=b_2} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

对于梁 B 有

$$\rho A_2(\bar{x}) \frac{\partial^2 w(\bar{x}, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial t} +$$

^{*} 收稿日期: 2006-12-18

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (20050558032); 中山大学青年教师科研启动基金资助项目 (20061131061)

作者简介: 徐伟华 (1973 年生), 女, 博士生; 通讯联系人: 刘济科, E-mail: jikelu@hotmail.com

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[E I_2 (x_2) \frac{\partial^3 w(x_2, t)}{\partial x_2^3} \right] = 0 \tag{3}$$

相应的边界条件为:

$$\left\{ \begin{aligned} w(x_2, t) \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad \frac{\partial w(x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0 \\ E I_2 (x_2) \frac{\partial^3 w(x_2, t)}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=l_2} + k_0 \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} + \\ &\frac{\partial w(x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[E I_2 (x_2) \frac{\partial^3 w(x_2, t)}{\partial x_2^3} \right] \Big|_{x_2=l_2} - k_0 w(x_1, t) \Big|_{x_1=l_1} - \\ w(x_2, t) \Big|_{x_2=l_2} &= 0 \end{aligned} \right. \tag{4}$$

这里 ρA_1 和 ρA_2 分别表示原始系统左梁和右梁单位长度的质量, $E I_1$ 和 $E I_2$ 分别表示原始系统左梁和右梁的弯曲刚度, l_1 和 l_2 分别是左梁和右梁的长度, k_0 和 k_0 分别是原始梁的耦合横向和转动弹簧系数, c 是梁的粘性阻尼. 假设小的摄动后, 这些系统参数变化为:

$$\begin{cases} E I_1 (x_1) = E I_{11} (1 + \epsilon) \\ E I_2 (x_2) = E I_{21} (1 + \epsilon) \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \rho A_1 (x_1) = \rho A_{11} (1 + \epsilon) \\ \rho A_2 (x_2) = \rho A_{22} (1 + \epsilon) \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} k = k_0 (1 + \epsilon) \\ k = k_0 (1 + \epsilon) \end{cases} \tag{7}$$

这里 $\epsilon (|\epsilon| \ll 1)$ 是系统参数的摄动参数. 摄动系统的固有频率和模态形式可以通过传统的矩阵摄动方法获得, 本文运用有限元的方法计算原始系统和摄动系统的固有频率和模态.

2 系统的有限元模型

在系统的有限元模型中, 每条梁被离散成 $n+1$ 个节点和 n 个欧拉梁有限单元. 每个节点有 2 个自由度. 两耦合的弹簧看作是 2 个弹簧单元. 作为横向弹簧, 弹簧单元的单元刚度矩阵是

$$[k_s^e] = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

类似的, 作为扭转弹簧, 单元的刚度矩阵为:

$$[k_r^e] = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里不考虑弹簧单元的质量.

忽略系统的阻尼, 系统的自由振动运动方程的有限单元模型表示为

$$[M] \{\ddot{d}\} + [K] \{d\} = \{0\} \tag{9}$$

这里, $[K]$ 和 $[M]$ 分别表示系统的刚度矩阵和质量矩阵. 对应于式 (9) 的特征值问题是

$$[K] \{u_i\} = \lambda_i [M] \{u_i\} \tag{10}$$

这里 $\lambda_i = \omega_i^2$, ω_i 是第 i 个模态的特征频率, $\{u_i\}$ 是相应的第 i 阶模态.

3 数值算例

3.1 双跨耦合固支梁系统

如图 1 所示双跨耦合固支梁系统. 假定初始系统物理参数为: $E I_1 = E I_2 = 150 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, $m_{01} = m_{02} = 0.78 \text{ kg/m}$, $l_1 = l_2 = 5.0 \text{ m}$, $k_0 = 0.001 E I_1 \text{ N/m}$, $k_0 = 0.0001 E I_1 \text{ Nm/rad}$

在系统的有限单元模型中, 每条梁被离散为 20 个单元, 系统共 40 个单元. 表 1 列出了系统的前 8 阶固有频率, 图 2 表示系统的前 8 阶模态曲线. 从图 2 可看出, 如果没有失调, 模态局部化现象不会出现在耦合系统. 下面研究该系统的局部模态化和频率轨迹转向现象.

表 1 双跨梁的头 8 阶固有频率

Tab 1 The first 8 natural frequencies of the dual span beam

模态号	初始系统		失调系统 ($\epsilon = -0.04$)	
	固支	弹性支承	EI 失调	弹性支承失调
1	1.9513	0.5241	1.9287	0.5238
2	2.0722	0.7083	2.0565	0.7080
3	12.2244	4.1978	11.9874	4.1862
4	12.2427	4.2117	12.2339	4.2074
5	34.2258	13.5750	33.5517	13.3526
6	34.2312	13.5842	34.2285	13.5797
7	67.0703	34.8670	65.7875	34.2055
8	67.0721	34.8703	67.0712	34.8687

考虑右梁杨氏模量存在失调. 假设右梁的杨氏模量减少 4%, 系统其他参数保持不变, 表 1 列出了该失调系统头 8 阶固有频率. 从这个表可以看出, 失调系统固有频率与原系统的固有频率相比, 变化是很小的. 图 3 表示失调系统前 8 阶固有模态. 很明显, 从第一阶模态到更高阶模态, 模态局部化现象越来越明显. 图 4 表示失调系统的头 8 条频率轨迹曲线, 从这个图形可以看出, 在子图 (a) — 子图 (b) 中, 当摄动 ϵ 从 -0.1 增加到 0 两条轨迹相互接近, 可以看到这两条曲线好像在 $\epsilon = 0$ 处相交, 然而, 将该图放大来看, 就会发现它们并没有相交, 并且当 ϵ

进一步从 0 增加到 0.1 时它们越来越远离对方。这表明模态局部化和频率轨迹转向现象是同时出现的。

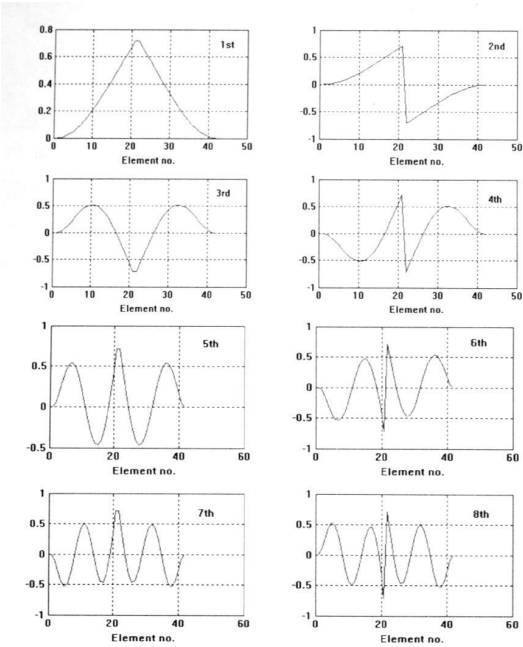


图 2 初始系统的头 8 阶振型
Fig 2 The first 8 mode shapes of the original system

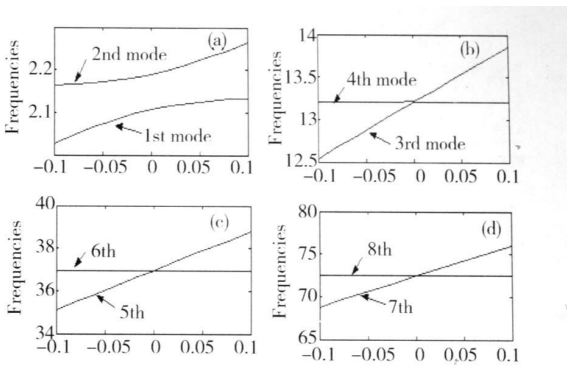


图 4 E 存在摄动的失调系统的头 8 阶轨迹转向
Fig 4 The first 8 frequency pei veering of the disordered system with perturbation in EI

3.2 具有弹性支承的双跨耦合梁系统

如图 5 所示，上述研究系统变为一般带弹性支承边界的耦合梁。原始系统的物理参数分别是： $EI_1 = EI_2 = 150 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, $m_{01} = m_{02} = 0.78 \text{ kg/m}$, $I_1 = I_2 = 5.0 \text{ m}$, $k_0 = 0.001 EI_1 \text{ N/m}$, $k_0 = 0.0001 EI_1 \text{ Nm/rad}$, $k_0 = k_0 = 20 \text{ N/m}$, $k_0 = k_0 = 10 \text{ Nm/rad}$ 。系统的有限元模型中，每条梁离散为 20 个单元，表 1 给出了该系统的前 8 阶固有频率。本算例研究由边界弹簧的失调所引起的模态局部化现象。假设左边界的横向弹簧刚度系数减少 4%，系统其他参数保持不变。系统前 8 阶固有频率列在表 1 中。图 6 和图 7 给出失调系统的头 8 阶振型和频率轨迹曲线。系统从第 3 阶模态才开始出现模态局部化现象。

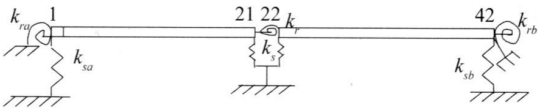


图 5 弹性支承下双跨耦合梁系统
Fig 5 The dual span coupled beam system with elastic support

4 结 论

基于欧拉—伯努利梁单元模型，本文运用有限元分析方法分析了模态局部化和频率轨迹转向现象。通过分析，可以得出以下结论：

(1) 当对称弱耦合系统的物理参数（如杨氏模量等）有小失调，结构会出现振动模态局部化和频率轨迹转向现象。

图 3 EI 存在摄动的失调系统的头 8 阶振型
Fig 3 The first 8 mode shapes of the disordered system with perturbation in EI

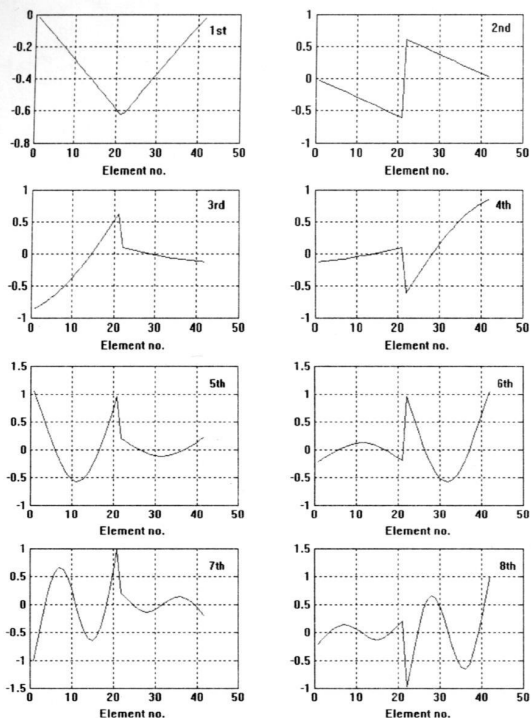


图 6 弹性支承失调的系统头 8 阶振型
Fig. 6 The first 8 mode shapes of the system with disorder in elastic support

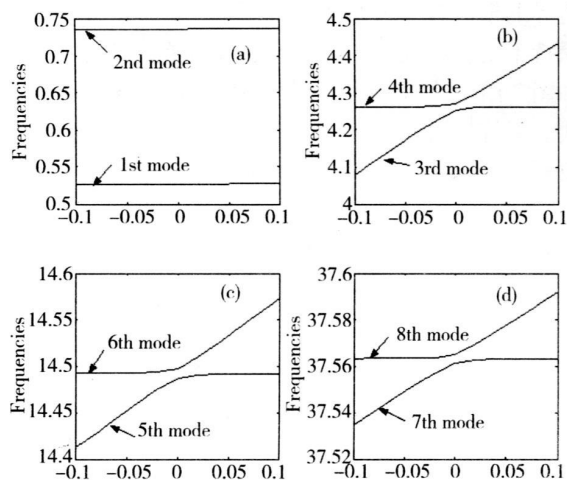


图 7 弹性支承失调的系统头 8 阶频率轨迹转向
Fig. 7 The first 8 frequency veering of the system with disorder in elastic support

(2) 模态局部化和频率轨迹转向现象的出现, 表明了动力系统对失调参数是非常敏感的。人们必须注意其灵敏度对动力模态的显著作用的重要意义。

(3) 对于弱耦合系统, 局部结构损伤也会导致模态局部化现象的产生。

(4) 还应该注意弱耦合结构的弹性支承的失调。本文研究表明, 这些因素的失调也会导致模态局部化和频率轨迹转向现象的产生。

参考文献:

- [1] ANDERSON P W. Absence of diffusion in certain random lattices [J]. *Physical Review* 1958, 109: 1492—1505
- [2] HUANG B W, KUANG K H. Mode localization in a rotating mistuned turbo disk with Coriolis effect [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, 43: 1643—1660
- [3] CAI C W, CHEUNG Y K, CHAN H C. Mode localization phenomena in nearly periodic systems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, *Transaction ASME* 1995, 2(1): 141—149
- [4] VAKAKIS A F, NAYFEH T K, KING M. A multiple scales analysis of nonlinear localized modes in a cyclic periodic system [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, 60(2): 388—397
- [5] KING M E, LAYNE P A. Dynamics of nonlinear cyclic systems with structural irregularity [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 15: 225—244
- [6] XIE W C, CHEN R Z H. Vibration mode localization in rib-stiffened plates with misplaced stiffeners in one direction [J]. *Chaos, Solitons and Fractals* 2002, 14: 311—333
- [7] HODGES C H. Confinement of vibration by structural irregularity [J]. *Journal of Sound and Vibration* 1982, 82: 411—424
- [8] PIERRE C, DOWELL E H. Localization of vibrations by structural irregularity [J]. *Journal of Sound and Vibration* 1987, 114: 549—554
- [9] PIERRE C. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures [J]. *Journal of Sound and Vibration* 1988, 126(3): 485—502
- [10] CHEN P T, GINSBERG J H. On the relationship between veering of eigenvalue loci and parameter sensitivity of eigenfunctions [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, *Trans ASME* 1992, 114: 141—148
- [11] CHAN H C, LIU J K. Mode localization and frequency veering in disordered engineering structures [J]. *Chaos, Solitons and Fractals* 2000, 11: 1493—1504

(下转第 20 页)

Transform of Quantum States Via Adiabatic Quantum Evolution

WEN Jia-yah², LIANG Shi-dong³

(1. School of Information Science and Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Naval Arms Commanding Academy, Guangzhou 510431, China;

3. State Key Laboratory of Optoelectronic Material and Technology//

School of Physics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The success of quantum algorithms is to implement correctly quantum states transform, which is mainly achieved by suitable quantum operators. It is shown that the finding of a suitable quantum operator is a great challenge. Most of previous studies solve this problem by machine learning methods. However, these algorithms are different from the standard circuit model of quantum computation which characterizes as unitary quantum operations, thus they are difficult to be realized on quantum computers. It is shown that the transform of quantum states can be implemented by adiabatic quantum evolution, which is a kind of pure quantum effect and suitable well for physical implementation. The adiabatic theorem guarantees that the final state of the system would be the desired output. It is therefore a remarkable approach for quantum states transform in quantum computation and quantum communication.

Key words: Quantum state transform; Quantum operators; Adiabatic quantum evolution

(上接第 12 页)

Mode Localization and Frequency Lociveering in a Disordered Coupled Beam System

XU Wei-hua, LIU Zhong-rong, LIU Ji-ke

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Vibration mode localization and frequency lociveering in disordered coupled beam system, such as two beams coupled with transverse and rotational springs, are studied using finite element analysis. Small disorders in the physical parameters such as Young's modulus are introduced in the investigation of the mode localization and frequency lociveering phenomena. The effect of disorder in the elastic support on the mode localization phenomenon is also discussed. It is found that an asymmetric disorder in the weakly coupled system will lead to the occurrence of mode localization and frequency loci phenomena.

Key words: finite element; coupled beam; disorder; mode localization