分布时滞 KdV 方程的对称及群不变解*

赵志红，徐远通
（中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘　要：考虑如下具有分布时滞的 KdV 方程 $u_t = u_{xxx} + 6(f*u)u_x$，其中 f 为时滞核函数，利用经典的李群理论得到了当时滞核函数 f 为弱一般核时，时滞 KdV 方程的三个简单对称及其相应的群不变解。

关键词：KdV 方程；分布时滞；对称；群不变解
中图分类号：O175.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0529-6579（2008）01-0009-04

长期以来，对于普通的微分方程，有大量的研究工作是利用李群理论求出微分方程的不变性来解决定型或定解问题，特别是寻求微分方程的精确解[1-6]。近期也有部分工作是用李群理论研究某种类型的微分方程的群分类，例如反应扩散性微分方程的群分类[7]。对于含有时滞项的各种偏泛函微分方程，这种研究途径尚未有具体的进展，至今对含有时滞项的微分方程如何对称及相应的群的不变解的结果还很少，主要是由于一般的时滞微分方程利用经典李群作用处理很困难。文［8］通过定义容许李群（Admitted Lie group），利用群分析法可以构造时滞微分方程的不变解；文［9］在一阶微分方程中引入一类分布时滞，在限定一系列条件后求得特殊的对称周期解。

本文研究具有一类分布时滞的 KdV 方程。利用这类时滞的特殊性，可将时滞微分方程转化为偏微分方程组，再运用经典李群作用，从而得出具有分布时滞的 KdV 方程的对称及相应的群不变解。这里得到的结果，对偏泛函微分方程对称性的研究，提供一个新的途径。

具有分布时滞的 KdV 方程形式如下：

$$u_t = u_{xxx} + 6(f*u)u_x \tag{1}$$

其中卷积 $f*u$ 定义如下：

$$(f*u)(x,t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-s)u(x,s)\,\mathrm{d}s$$

核函数 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足

$$f(t) \geqslant 0 \text{ 当 } t \geqslant 0,\ \text{且} \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

本文采用 Gamma 分布时滞核（参见［10］）

$$f(t) = \frac{\alpha^n t^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha t}}{(n-1)!},\ n = 1,2,\cdots$$

其中 $\alpha > 0$ 为常数，n 为整数，平均时滞 $\tau = n/\alpha > 0$。最常见的有

$$f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}(n=1),\quad f(t) = \frac{1}{\tau^2} e^{-t/\tau}(n=2)$$

第一个核通常称为弱一般核（“weak” generic kernel），第二个核通常称为强一般核（“strong” generic kernel）。本文主要讨论 f 为弱一般核的情形。

设 M 是全体连续可微函数 $u(x,t)$ 的集合，即 $M = \{u(x,t) \in C^1(R^2)\}$。

定义 1　M 上的向量场 $\sigma(x,t,u,u_x,u_{xx})$ 称为演化方程 $u_t = K(x,t,u,u_x,\cdots)$ 的一个对称，如果

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = [K,\sigma] \tag{2}$$

对任意连续可微函数 $u(x,t)$ 都成立，其中 $[K,\sigma] = K'\sigma - \sigma' K$。

类似的，对于微分方程组

$$F_i(x,t,u,u_t,u_x,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots) = 0,\ i = 1,\cdots,n$$

对称 $\sigma(x,t,u)$ 应满足的条件为

$$F'_i(u)\sigma = 0,\quad i = 1,\cdots,n$$

定义 2　G 是作用于 M 上的一个单参数不变群，对于偏微分方程 $\Delta(x,t,u_x,u_t,\cdots) = 0$，在 G 的作用下不变的解称为群 G 不变解。

引理 1[1]　设 M 上的向量场 $\sigma(u)$ 是偏微分方程 $\Delta(x,t,u_x,u_t,\cdots) = 0$ 的一个对称，则 u 是方程的与 σ 相应的不变群的群不变解当且仅当它满足

$$\Delta(x,t,u_x,u_t,\cdots) = 0 \tag{3}$$

$$\sigma(u) = 0 \tag{4}$$

* 收稿日期：2007－09－10
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10471155）
作者简介：赵志红（1981年生），女，博士研究生；E-mail：zhaozhihong01@yahoo.com.cn

1 主要定理及证明

本文主要讨论时滞微分方程（1）中的时滞核函数为弱一般核，即$f(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$时，方程（1）的对称及其相应的群不变解。首先我们利用时滞核的特殊性，将时滞方程（1）转化为偏微分方程组。

定义w为

$$w(x,t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t-s}{\tau}}u(x,s)\mathrm{d}s,$$

对t求偏导，可得

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{\tau}(u-w),$$

因此具有弱一般核的方程（1）可以等价的表示为如下方程组形式:

$$\begin{cases}u_t=u_{xxx}+6wu_x\\ w_t=\frac{1}{\tau}(u-w)\end{cases}\tag{5}$$

定理1 偏微分方程组（5）具有如下形式的对称

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}u_x\\ w_x\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}u_t\\ w_t\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\ -\tau w_t+u-w\end{pmatrix},$$

其中$\alpha_i(i=1,2,3)$为任意常数。

证明 首先将偏微分方程组（5）表示为向量形式

$$v_t=K(x,t,u,w)$$

其中$v=(u,w)^T,K=(K_1,K_2)^T=(u_{xxx}+6wu_x,\frac{1}{\tau}(u-\omega))^T$，其中$T$表示转置。设$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)^T$为方程（5）的对称，由定义可知$(\sigma_1,\sigma_2)^T$应满足的条件为

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}K'_{1u} & K'_{1w}\\ K'_{2u} & K'_{2w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix},$$

即

$$\sigma_{1t}=K'_{1u}\sigma_1+K'_{1w}\sigma_2\tag{6}$$

$$\sigma_{2t}=K'_{2u}\sigma_1+K'_{2w}\sigma_2\tag{7}$$

其中K'_{iu}表示K_i对u的线性化算子，K'_{iw}表示K_i对w的线性化算子，$i=1$，2。K_1和K_2对u和w的线性化算子分别为

$$K'_{1u}=D_x^3+6wD_x,K'_{2u}=\frac{1}{\tau},$$

$$K'_{1w}=6u_x,\qquad K'_{2w}=\frac{1}{\tau}。$$

下面采用待定系数法求方程组（5）的具有简单形式的对称。设

$$\sigma_1=a_1u_x+a_2w_x+b_1u_t+b_2w_t+c_1u+c_2w+m,$$

$$\sigma_2=e_1u_x+e_2w_x+f_1u_t+f_2w_t+g_1u+g_2w+n,$$

其中a_i，b_i，c_i，e_i，f_i，$g_i(i=1,2)$和m，n都是关于x和t的待定函数。这时，

$$\sigma_{1t}=a_{1t}u_x+a_1u_{xt}+a_{2t}w_x+a_2w_{xt}+b_{1t}u_t+b_1u_{tt}+b_{2t}w_t+b_2w_{tt}+c_{1t}u+c_1u_t+c_{2t}w+c_2w_t+m_t,$$

$$\begin{aligned}K'_{1u}\sigma_1=&a_{1xxx}u_x+3a_{1xx}u_{xx}+3a_{1x}u_{xxx}+a_1u_{xxxx}+6w(a_{1x}u_x+a_1u_{xx})+a_{2xxx}w_x+3a_{2xx}w_{xx}+\\&3a_{2x}w_{xxx}+a_2w_{xxx}+6w(a_{2x}w_x+a_2w_{xx})+b_{1xxx}u_t+3b_{1xx}u_{xt}+3b_{1x}u_{xxt}+b_1u_{xxxt}+\\&6w(b_{1x}u_t+b_1u_{xt})+b_{2xxx}w_t+3b_{2xx}w_{xt}+3b_{2x}w_{xxt}+b_2w_{xxxt}+6w(b_{2x}w_t+b_2w_{xt})+c_{1xxx}u+\\&3c_{1xx}u_x+3c_{1x}u_{xx}+c_1u_{xxx}+6w(c_{1x}u+c_1u_x)+c_{2xxx}w+3c_{2xx}w_x+3c_{2x}w_{xx}+c_2w_{xxx}+\\&6w(c_{2x}w+c_2w_x)+m_{xxx}+6wm_x,\end{aligned}$$

$$K'_{1w}\sigma_2=6e_1u_x^2+6e_2u_xw_x+6f_1u_xu_t+6f_2u_xw_t+6g_1uu_x+6g_2wu_x+6nu_x$$

将（5）代入上面三个等式，则有

$$\begin{aligned}\sigma_{1t}=&a_{1t}u_x+a_1(u_{xxxx}+6w_xu_x+6wu_{xx})+a_{2t}w_x+\frac{1}{\tau}a_2(u_x-w_x)+b_{1t}((u_{xxx}+6wu_x)+b_1u_{xxxt}+\\&6\frac{1}{\tau}b_1u_x(u-w)+6b_1w(u_{xxxx}+6w_xu_x+6wu_{xx})+\\&\frac{1}{\tau}b_{2t}(u-w)+\frac{1}{\tau}b_2(u_{xxx}+6wu_x)-\frac{1}{\tau^2}b_2(u-w)+\\&c_{1t}u+c_1(u_{xxx}+6wu_x)+c_{2t}w+\frac{1}{\tau}c_2(u-w)+m_t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K'_{1u}\sigma_1=&a_{1xxx}u_x+3a_{1xx}u_{xx}+3a_{1x}u_{xxx}+a_1u_{xxxx}+6w(a_{1x}u_x+a_1u_{xx})+a_{2xxx}w_x+3a_{2xx}w_{xx}+\\&3a_{2x}w_{xxx}+a_2w_{xxxx}+6w(a_{2x}w_x+a_2w_{xx})+b_{1xxx}(u_{xxx}+6wu_x)+3b_{1xx}(u_{xxxx}+6w_xu_x+6wu_{xx})+\\&3b_{1x}(u_{xxxxx}+6w_{xx}u_x+12w_xu_{xx}+6wu_{xxx})+b_1u_{xxxt}+\\&6b_{1x}w(u_{xxx}+6wu_x)+6b_1w(u_{xxxx}+6w_xu_x+6wu_{xx})+\\&\frac{1}{\tau}b_{2xxx}(u-w)+3\frac{1}{\tau}b_{2xx}(u_x-w_x)+3\frac{1}{\tau}b_{2x}\cdot(u_{xx}-w_{xx})+\frac{1}{\tau}b_2(u_{xxx}-w_{xxx})+\\&6\frac{1}{\tau}b_{2x}w(u-w)+6\frac{1}{\tau}b_2w(u_x-w_x)+\\&c_{1xxx}u+3c_{1xx}u_x+3c_{1x}u_{xx}+c_1u_{xxx}+6w(c_{1x}+c_1u_x)\\&c_{2xxx}u+3c_{2xx}u_x+3c_{2x}w_{xx}+c_2w_{xxx}+6w(c_{2x}+c_2w_x)+m_{xxx}+6wm_x\end{aligned}$$

$$K'_{1w}\sigma_2=6e_1u_x^2+6e_2u_xw_x+6f_1u_x(u_{xxx}+6wu_x)+6\frac{1}{\tau}f_2u_x(u-w)+6g_1uu_x+6g_2wu_x+6nu_x$$

由(6)式，即$\sigma_{1t}=K'_{1u}\sigma_1+K'_{1w}\sigma_2$，并比较各项系数，就得到如下条件:

$$a_2=e_1=f_1=0,a_1=e_2,$$

$$a_{1x} = b_{1t} - \frac{1}{\tau}(b_1 - f_2) - g_2,$$

$$a_{1t} = 6n, a_{1xx} = 0, b_1 = f_2 + \tau g_2, b_{1x} = 0,$$

$$b_{1t} = 3a_{1x}, b_2 = \tau c_2, b_{2x} = -\tau c_{1x},$$

$$b_{2t} = \frac{1}{\tau}b_2 - \tau c_{1t} - c_2, b_{2t} = \frac{1}{\tau}b + \tau c_{2t} - 6\tau m_x$$

同样地，由（7）式，即 $\sigma_{2t} = K'_{2u}\sigma_1 + K'_{2w}\sigma_2$，还可以得到：

$$b_{1t} = \frac{1}{\tau}b_2 + c_1 - g_1 - g_2, e_{2t} = 0,$$

$$g_{2t} = \frac{1}{\tau}f_{2t}, n_t = m - n$$

因此，

$$a_1 = a_1, a_2 = 0, b_1 = 3a_2, b_2 = 0,$$

$$c_1 = 0, c_2 = 0, m = 0,$$

$$e_1 = 0, e_2 = \alpha_1, f_1 = 0, f_2 = \alpha_2 - \tau\alpha_3,$$

$$g_1 = \alpha_3, g_2 = -\alpha_3, n = 0$$

其中 $\alpha_i(i = 1,2,3)$ 是任意常数。

从而

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 u_x + \alpha_2 u_t\\ \alpha_1 w_x + (\alpha_2 - \tau\alpha_3)w_t + \alpha_3 u - \alpha_3 w\end{pmatrix} \tag{8}$$

是方程组（5）的对称，上述表达式即为

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}u_x\\ w_x\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}u_t\\ w_t\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\ -\tau w_t + u - w\end{pmatrix} \tag{9}$$

2 对称及群不变群

下面根据引理 1 并利用定理 1 得到的偏微分方程组的对称，解得时滞微分方程（1）的一些对称及相应的群不变解。

1）取 $\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_x\\ w_x\end{pmatrix}$，由 $u_x = 0, w_x = 0$ 解得 $u = f(t), w = g(t)$，于是，（5）可化为 $\begin{cases}f' = 0\\ g' = \frac{1}{\tau}(f - g)\end{cases}$，即 f 为常数。

因此，u = 常数是方程（1）的 x 平移不变解且与之对应的对称为 $\sigma = u_x$。

2）取 $\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_t\\ w_t\end{pmatrix}$，由 $u_t = 0, w_t = 0$ 解得 $u = f(x), w = g(x)$，于是，（5）可化为 $\begin{cases}f''' + 6gf' = 0\\ \frac{1}{\tau}(f - g) = 0\end{cases}$，即 $f''' + 6ff' = 0$。这个常微分方程的解就是（1）式的 t 平移不变解且与之对应的（1）式的对称为 $\sigma = u_t$。

3）取 $\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}cu_x - u_t\\ cw_x - w_t\end{pmatrix}$（$c$ 为任意常数），由 $cu_x - u_t = 0, cw_x - w_t = 0$ 解得 $u = f(\zeta), w = g(\zeta)$，$\zeta = x + ct$，于是，代入（5）式即得

$$\begin{cases}f''' + 6gf' - cf' = 0\\ \frac{1}{\tau}(f - g) - cg' = 0\end{cases} \tag{10}$$

由(10)式给出的解 $u = f(x + ct)$ 就是（1）式的行波解且其相应的对称为 $\sigma = cu_x - u_t$。当时滞 τ 充分小时，利用扰动原理，我们可以描述（10）式解的基本形式。

注： 1）若取 $\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\tau w_t + u - w\end{pmatrix}$，由 $\sigma_1 = 0$，$\sigma_2 = 0$ 并没有得到新的方程，所以不能对原方程（5）进行化简。

2）若将时滞微分方程（1）中的时滞核函数为强一般时滞核或更一般的 Gamma 分布时滞核，方程（1）同样可以转化为类似于（5）式的偏微分方程组的形式，只是方程组变得相对复杂。对方程组利用定理 1 的证明方法，可以求出时滞方程（1）相应的一些对称及群不变解，只是计算过程要变得更加繁琐。例如，时滞核为强一般核时，相应的偏微分方程组为：

$$\begin{cases}u_t = u_{xxx} + 6wu_x\\ w_t = \frac{1}{\tau}(y - w)\\ y_t = \frac{1}{\tau}(u - y)\end{cases}$$

其中 $w(x,t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{t-s}{\tau^2} e^{-\frac{t-s}{\tau}} u(x,s)\,ds$，

$y(x,t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-s}{\tau}} u(x,s)\,ds$。

参考文献：

[1] 田畴. 李群及其在微分方程中的应用[M]. 北京：科学出版社，2001.

[2] OLVER P J. Application of Lie groups to Differential Equations [M]. New York：Springer-Verlag，1986.

[3] AZAD H，MUSTAFA M T. Symmetry analysis of wave equation on sphere [J]. J Math Anal Appl，2007，333：1180－1188.

[4] MELESHKO S V，MOYO S. On the complete group classification of the reaction- diffusion equation with a delay [J]. J Math Anal Appl，2008，338：448－466.

[5] BLUMAN G，CHEVIAKOV A F. Nonlocally related systems，linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation [J]. J Math Anal Appl，2007，

333: 93 - 111.

[6] BOKHARI A H, KARA A H, ZAMAN F D. Invariant solutions of certain nonlinear evolution type equations with small parameters [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182:1075 - 1082.

[7] ANDRIOPOULOS K, LEACH P G L. Symmetry and singularities of second-order ordinary differential equations of Lie's type III [J]. J Math Anal Appl, 2007, 328: 860 - 875.

[8] TANTHANUCH J, MELESHKO S V. Application of group analysis to delay differential equations [C] // Proceedings of ISNA-16 (Moscow, 2002), Nonlinear Acoustics at the Beginning of the 21st Century, 2002:607 - 610.

[9] AZEVEDO K, GADOTTI M, LADEIRA L. Special symmetric periodic solutions of differential systems with distributed delay [J]. Nonlinear Analysis, 2007, 67: 1861 - 1869.

[10] GOURLEY S A. Travelling Fronts in the diffusive Nicholson's Blowflies Equation with distributed delays [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2000, 32: 843 - 853.

Symmetry and Group-invariant Solutions of KdV Equation with Distributed Delay

ZHAO Zhi-hong, XU Yuan-tong

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The Symmetry and Group-invariant solutions are discussed for the following KdV equation with distributed delay $u_t = u_{xxx} + 6(f * u)u_x$, where f is a delay kernel function. By using the classical Lie Group theory to the KdV equation with distributed delay, three symmetries and group-invariant solutions for this delay equation is obtained when the delay kernel is "weak" generic kernel.

Key words: KdV equation; Distributed delay; Symmetry; Group-invariant solution

（上接第8页）

On Solutions and Comparison Theorems of Infinite Horizon Forward-Backward Stochastic Differential Equations with Poisson Jumps

YIN Ju-liang[1], *SITU Rong*[2]

(1. Department of Statistics, Jinan University, Guangzhou 510630, China;

2. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Existence and uniqueness and comparison theorems of solutions to infinite horizon forward-backward stochastic differential equations with Poisson jumps (FBSDEs) are discussed. Firstly, the existence and uniqueness of adapted solutions to such FBSDEs is proved by applying smoothing technique under assumptions of non-Lipschitz conditions and weak monotonicity on the coefficients. Then two comparison theorems for such FBSDEs are derived by using stopping time method and the Tanaka formula.

Key words: forward-backward stochastic differential equations with Poisson jumps; adapted solution; comparison theorem; Tanaka formula