

集值非线性互补问题解的存在性^{*}

范江华¹, 黎培兴²

(1. 广西师范大学数学学院, 广西 桂林 541004

2. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究集值非线性互补问题, 构造一个新的辅助函数, 将集值非线性互补问题转化为不动点问题, 利用 LeraY-Schauder 不动点定理给出集值非线性互补问题存在解的一个充分条件, 推广了一些著名的结果. 给出求解非线性互补问题 LeraY-Schauder 不动点算法.

关键词: 集值非线性互补问题; 不动点; 向量标号算法; 零调映射

中图分类号: O224.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 06-0022-04

本文考虑如下形式的集值非线性互补问题:

SNLCP 问题 给定取紧凸值的上半连续集值映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$, 要找 $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^n$ 使得存在 $\bar{y} \in f(\bar{x}) \cap \mathbb{R}_+^n$, 满足

$$\bar{x} \circ \bar{y} = 0$$

为单值函数时, 上述问题被称为非线性互补问题.

非线性互补问题在非线形规划, 对策论, 经济学, 力学等学科中有较为重要的应用^[1-2]. 研究非线性互补问题解的存在性的文献颇多^[3-4]. 利用单纯不动点算法, 在 n 维方体上给出存在解的一个充分条件, 并给出存在解的构造性证明^[5]. 利用变维数算法求解非线性互补问题^[6].

本文将求解集值非线性互补问题转化成求解集值映射的不动点问题, 并给出存在解的一个充分条件, 该条件非常弱. 由该条件可导出几个存在性条件, 我们的结果包含一些已知的解的存在性结果, 如著名的 Karamardian 条件; 再如文 [4] 中给出非线性互补问题存在解的一个充分条件, 由定理 4 及其证明可知, 我们的定理 1 包含文 [4] 的部分结果.

最后利用文 [7] 中给出的 LeraY-Schauder 不动点算法, 给出求解非线性互补问题的一个单纯同伦算法. 该算法要求的条件非常弱, 利用本文给出的算法, 可求出非线性互补问题的解.

本文记 $\text{co}A$ 为集合 A 的凸包, $P(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧凸子集族, $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$. 记 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, 设 x 为 $\mathbb{R}^n$ 中的

点, $i \in N$ 时, 记 x_i 为的第 i 个分量.

本文用到的 D_3 剖分^[8], 完备单纯形以及完备单纯形的转轴运算规则都与文 [9-11] 一致.

1 存在解的充分条件

本节给出集值非线性互补问题存在解的充分条件.

定义 1 设 X, Y 为拓扑空间, 集值映射 $F: X \rightarrow 2^Y$ 称为上半连续, 若对任一 $x_0 \in X$ 中任一包含 $F(x_0)$ 的开集 V , 存在 X 中的开集 U , 使得 $x_0 \in U$ 且 $F(U) \subset V$.

定义 2^[12] 设 X, Y 为拓扑空间, 集合 $A \subset X$ 称为零调的, 若其有理数域上的所有约化同调群为平凡群. 映射 $F: X \rightarrow 2^Y$ 称为零调的, 若 F 为上半连续, 且对任意 $x \in X$, $F(x)$ 为 Y 中紧集, $F(x)$ 为零调的. 记 $V(X, Y)$ 为所有的从 X 到 Y 的零调映射的集合. $V_c(X, Y)$ 为所有的有限个零调映射复合的集合.

P_0 函数是一类重要函数, 多篇文献研究 P_0 函数的非线性互补问题的存在性, 见 [3-4]. 常见的单调函数, 一致 P -函数, P -函数等函数均是 P_0 函数的特例. 下面将函数 P_0 推广到集值 P_0 映射.

定义 3 设 $K \subset \mathbb{R}^n$, 称 $f: K \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ 为集值 P_0 映射, 若对任意 $x, y \in K$, $x \neq y$ 则存在 $i \in N$, 满足 $x_i \neq y_i$ 且对于任意 $u \in f(x)$, $v \in f(y)$, 有 $(u_i - v_i)(x_i - y_i) \geq 0$.

引理 1 可从 [12] 中推论 3.1 直接得到.

* 收稿日期: 2007-01-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10561002); 广西青年科学基金资助项目 (0007002)

作者简介: 范江华 (1967 年生) 男, 博士, 副教授, E-mail: jhfan@gsnu.edu.cn

引理 1 设 $F \in V_c(R^n, R^n)$, U 为 R^n 中开集, 且 $F(\bar{U})$ 有界, $a \in U$ 且满足下列 Leray-Schauder 条件:

$$x \notin \lambda F(x) + (1-\lambda)a \quad \forall x \in \partial U \cap R^n, \\ \lambda \in (0, 1)$$

则 F 在 $\bar{U}$ 中有不动点。

以下我们定义映射 $P: R^n \rightarrow R_+^n$, 使得

$$P(x) = (\max\{0, x_1\}, \max\{0, x_2\}, \dots, \max\{0, x_n\})$$

其中 $\max\{0, x_i\}$ 表示取 0 和 x_i 的最大值。显然 $P: R^n \rightarrow R_+^n$ 连续。

定义 $h: R^n \rightarrow P(R^n)$ 使得 $h = P \circ (I - f)$ 。

引理 2 $\bar{x}$ 为集值非线性互补问题 SNLCP 的解当且仅当 $\bar{x}$ 为 h 的不动点。

证明 若 $\bar{x}$ 为 h 的不动点, 即 $\bar{x} \in h(\bar{x})$, 由 h 的定义可知, 存在 $y \in f(\bar{x})$, 使得 $\bar{x} = P(\bar{x} - y)$ 。由 P 的定义可知, 对于任意给定的 $i \in N$, 显然有 $\bar{x}_i \geq 0$ 。

若 $\bar{x}_i > 0$, 因 $\bar{x} = P(\bar{x} - y)$, 即 $\bar{x}_i = \max\{0, \bar{x}_i - y_i\}$, 故有 $\bar{x}_i = \bar{x}_i - y_i$, 因此 $y_i = 0$ 。

若 $\bar{x}_i = 0$ 因 $0 = \bar{x}_i = \max\{0, \bar{x}_i - y_i\}$, 此时有 $\bar{x}_i - y_i \leq 0$, 从而 $y_i \geq 0$ 。

因此, 存在 $y \in f(\bar{x})$, 使得对于任意 $i \in N$, $y_i \cdot \bar{x}_i = 0$, 因此 $\bar{x} \cdot y = 0$ 。即当 $\bar{x}$ 为 h 的不动点时, $\bar{x}$ 为集值非线性互补问题的解。

反之, 若 $\bar{x}$ 为集值非线性互补问题的解, 则存在 $y \in f(\bar{x}) \cap R_+^n$, 使得 $\bar{x} \cdot y = 0$ 。

若 $\bar{x}_i > 0$ 此时 $y_i = 0$ 有 $\bar{x}_i = \max\{0, \bar{x}_i - y_i\}$ 。

若 $\bar{x}_i = 0$ 此时 $y_i > 0$ 因此 $\bar{x}_i - y_i \leq 0$ 故有 $0 = \bar{x}_i = \max\{0, \bar{x}_i - y_i\}$ 。

即存在 $y \in f(\bar{x})$, 使得 $\bar{x} = P(\bar{x} - y)$, 由 h 的定义知, $\bar{x}$ 为 h 的不动点。即当 $\bar{x}$ 为问题 SNLCP 的解时, $\bar{x}$ 为 h 的不动点。

由引理 1、2 我们可得到如下定理 1。

定理 1 设 U 为 R^n 中开集, $h(\bar{U})$ 有界, 若存在 $\omega \in U$ 使得对任意 $x \in \partial U \cap R_+^n$, 都有

$$x \notin \lambda h(x) + (1-\lambda)\omega, \quad \lambda \in (0, 1) \quad (1)$$

则集值非线性互补问题 SNLCP 有解。

证明 因为 f 是取紧凸值的上半连续映射, 故 $I - f$ 为取紧凸值的上半连续映射, P 为单值连续映射, 因此 $I - f, P$ 均为零调映射。因 $h = P \circ (I - f)$, 故 $h \in V_c(R^n, R^n)$, 由引理 1 知 h 在 $\bar{U}$ 中有不动点, 由引理 2 知 h 的不动点为集值非线性互补问题 SNLCP 的解。

注. 若 U 有界, 则 $\bar{U}$ 紧, 因为 h 是取紧值的

上半连续映射, 因此 $h(\bar{U})$ 紧, 从而 $h(\bar{U})$ 有界。

定理 2 设 U 为 R^n 中开集, $h(\bar{U})$ 有界, 若存在 $\omega \in R_+^n \cap U$, 使得对任一 $x \in \partial U \cap R_+^n$, 任一 $z \in f(x)$ 存在某一 $j \in N$, 满足

$$(x_j - \omega_j) z_j > 0 \quad (2)$$

则集值非线性互补问题 SNLCP 有解。

证明 设 x 为 $\partial U \cap R_+^n$ 中任意一点, 下证

$$x \notin \lambda h(x) + (1-\lambda)\omega, \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

假若不然, 则存在 $a \in \partial U \cap R_+^n, \lambda_0 \in (0, 1), y \in h(a)$, 使得

$$a = \lambda_0 \cdot y + (1-\lambda_0)\omega \quad (3)$$

由 h 的定义可知存在 $z \in f(a)$, 使得任一 $i \in N$ 都有 $y_i = \max\{0, a_i - z_i\}$ 。

由定理条件知存在某一 $j \in N$, 满足

$$(x_j - \omega_j) z_j > 0$$

若 $y_j > 0$ 则 $y_j = a_j - z_j$ 由 (3) 可知 $a_j = \lambda_0(a_j - z_j) + (1-\lambda_0)\omega_j$ 。从而 $\lambda_0 z_j + (1-\lambda_0)(a_j - \omega_j) = 0$, 因此 z_j 与 $a_j - \omega_j$ 或者为符号相反的两个数, 或者均为 0 这都与 $(x_j - \omega_j) z_j > 0$ 矛盾, 即与 (2) 矛盾。

若 $y_j = 0$ 由 (3) 可知

$$a_j = (1-\lambda_0)\omega_j$$

因 $\omega \in R_+^n$, 故 $0 \leq \omega_j$ 。由 (2) 可知 $a_j \neq \omega_j$ 故有 $0 \leq a_j < \omega_j$ 。由 (2) 可知, 任一 $i \in f(a)$ 都有 $z_i < 0$ 故 $a_i - z_i > 0$ 故由 h 的定义知 $y_i > 0$ 而 $0 = y_j$ 矛盾。

因此我们有

$$x \notin \lambda h(x) + (1-\lambda)\omega, \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

由定理 1 可知 h 在 $\bar{U}$ 中有不动点, 因而集值非线性互补问题在 $R_+^n \cap \bar{U}$ 中有解。

定理 3 设 U 为 R^n 中开集, $h(\bar{U})$ 有界。若存在 $\omega \in U$ 使得对任意 $x \in \partial U \cap R_+^n$, 任意 $z \in f(x)$, 满足

$$\langle x - \omega, z \rangle \geq 0 \quad (4)$$

则集值非线性互补问题 SNLCP 有解。

证明与定理 2 的证明类似, 不再赘述。

为保证非线性互补问题有解, 常用 Karmanian 条件如下:

存在 R_+^n 的非空有界子集 D 存在 $x \in D$ 使得对于任意 $x \in R_+^n$, 满足

$$\max_{y \in f(x)} \langle x - y, z \rangle \geq 0$$

显然, 定理 3 推广了 Karmanian 条件。

下面对于 f 为集值 P_0 映射时, 我们给出集值非线性互补问题存在解的充分条件。文 [4] 在 f 为单值连续映射时, 利用例外簇证明了如下定理。

定理 4 设 f 为取紧凸值上半连续集值 P_0 映射, 若存在 n 个数 $\lambda_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), 使得 $f(1) \cap R^n \neq \phi$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则集值非线性互补问题 SNICP 有解。

证明 由定理 1 及其注, 只需证明如下结论:

存在 U 为 R^n 中有界开集, 存在 $\omega \in R^n \cap U$ 设 x 为 $\partial U \cap R^n$ 中任意一点, 有

$$x \notin \lambda h(x) + (1-\lambda)\omega, \forall \lambda \in (0, 1)$$

假设上述结论不成立, 对任意 $\varepsilon > 0$ 取 $U = B(0, \varepsilon)$, $\omega = 0$ 则存在 $\bar{x} \in \partial B(0, \varepsilon)$ 使得存在 $\lambda^r \in (0, 1)$ 满足

$$\bar{x} \in \lambda^r h(\bar{x})$$

由 h 的定义知, 存在 $u^r \in f(\bar{x})$, 满足

$$\bar{x} = \lambda^r \max\{0, \bar{x} - u^r\} \quad (5)$$

易知若 $\bar{x} > 0$ 则有 $u^r = (\lambda^r - 1)\bar{x}$ 若 $\bar{x} = 0$ 则 $u^r \geq 0$.

令 $l = \max_{k \leq n} l_k$. 因 $\bar{x} \in \partial B(0, \varepsilon)$, 故 $\|\bar{x}\| = \varepsilon$, 从而有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \|\bar{x}\| = +\infty$. 故存在 δ 和 $j \in N$ 使得 $\bar{x}_j > l$.

下面令 $x = \bar{x}$, 取 $u \in f(x)$, 若 $x > 0$ 由 (5) 知有 $u = (\lambda^r - 1)x < 0$; 若 $x = 0$ 则 $u \geq 0$.

令 $y = \frac{1}{l} \varepsilon$, 由定理条件可知, 存在 $v \in f(y)$, 使得 $v \in R^n$, 即对任意 $i \in N$, 有 $v_i \geq 0$.

下面分两种情况证明 $x \neq y$ 时, $(u - v)(x - y) < 0$.

1) 若 $i = j$. 此时 $x_j > \lambda^r y_j$, 因此 $x_j > 0$ 故 $u_j < 0$ 因 $v_j \geq 0$ 因此 $u_j - v_j < 0$ 从而有 $(u - v)(x - y) < 0$.

2) 若 $i \neq j$ 且 $x_i \neq y_i$ 因此时 $y_i = 0$ 故 $x_i > 0$ 从而有 $u_i < 0$ 因 $v_i \geq 0$ 因此 $u_i - v_i < 0$ 有 $(u - v)(x - y) < 0$.

这与集值 P_0 映射定义矛盾. 因此集值非线性互补问题 SNICP 有解。

2 求解算法

当 f 为单值连续映射时, h 也为单值连续映射, 下面利用文 [5] 中给出的 Leray-Schauder 不动点算法, 来计算 h 的不动点, 从而求解非线性互补问题. 该算法要求的条件非常弱, 如文 [4] 中给出非线性互补问题存在解的一个充分条件, 由定理 4 及其证明可知, 利用本文给出的算法, 我们可求出非线性互补问题的解。

算法 先对 $(0, 1] \times R^n$ 作 D_3 剖分. 设 $y = (t, x)$ 为 $(0, 1] \times R^n$ 的 D_3 剖分的一个顶点.

若 $t = 1$, 则令 $\phi(y) = \omega$.

若 $t < 1$, 当 $x \notin U$ 时, 则令 $\phi(y) = \omega$; 当 $x \in U$ 时, 任意取定 $z \in x - f(x)$ 定义如下:

任给 $i \in N$, 若 $z_i \geq 0$ 则令 $z'_i = z_i$; 若 $z_i < 0$ 则令 $z'_i = 0$. 显然如上构造的 $z' = h(x)$. 现取定 $h(x)$ 作为 $\phi(y)$.

在剖分的每个单纯形上按重心坐标将顶点上已赋值的 ϕ 作仿射扩张, 得到单值的分片线性映射: $\phi: (0, 1] \times R^n \rightarrow R^n$. 最后按

$$\Psi(t, x) = x - \phi(t, x)$$

定义的 $\Psi: (0, 1] \times R^n \rightarrow R^n$ 为向量标号映射. 在 $\{1\} \times R^n$ 上, $\Psi(1, x) = x - \omega$, 故在 $\{1\} \times R^n$ 上有且只有一个完备界面, 记为 τ_0 .

利用完备单纯形的转轴运算 [10], 我们可得到一个完备界面组成的序列. 因此时所有完备界面都在 $(0, 1] \times R^n$ 的一个有界区域内 [7], 则无穷的完备界面序列必有一个形如 $(0, \delta)$ 的聚点, 事实上 δ 为 h 的不动点 [7], 从而 δ 为非线性互补问题的解。

参考文献:

- [1] ISAC G. Complementarity Problems [M]. Berlin: Springer-Verlag, Lecture notes in Math. 1990. 1528. 6—138.
- [2] FERRIS M C, PANG J S. Engineering and economic applications of complementarity problems [J]. SIAM Review, 1997, 39(4): 669—713.
- [3] HUANG Z H. Sufficient conditions on nonemptiness and boundedness of the solution set of the function nonlinear complementarity problem [J]. Operations Research Letters, 2002, 30(3): 202—210.
- [4] ZHANG L P, HAN J, XU D. Existence theorems of solution to variational inequality problems [J]. Science in China: Ser A, 2001, 44(2): 212—219.
- [5] ALLGOWER E L, GEORG K. Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions of systems of equations [J]. SIAM Review, 1980, 22(1): 28—85.
- [6] LAAN G V D, TALMAN A J J. Simplicial approximation of solutions to the nonlinear complementarity problem with lower and upper bounds [J]. Math. Prog., 1987, 38: 1—15.
- [7] 范江华, 黎培兴. Leray-Schauder 不动点的计算 [J]. 科学通报, 1998, 43(16): 1723—1726.
- [8] DANG C. Triangulations and simplicial methods [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995. 98—143.
- [9] 陈开周, 党创寅, 杨再福. 不动点理论和算法 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1990. 136—284.

(下转第 29 页)

Experimental Study on Superheat Phenomena of Two-phase Mechanically Pumped Cooling Loop

LU Jie¹, PEI Nian-qiang², LI Ting-xue², GUO Kai-hua², HE Zhen-hui²

- (1. Institute of Refrigeration and Cryogenics Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China;
2. Center of Space Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Mechanically pumped cooling loop is a kind of heat release equipment with two-phase work fluid circulating in the closed tube. From the tests results of the system startup, it is found that heat load will cause a superheat state and at the outlet of the evaporator with a pressure shake of the whole loop. In order to investigate the superheat phenomena of MPCL, tests have been carried out with different operation conditions such as set point evaporative temperature, mass flow and heat load. It concluded that the less evaporative temperature is, the higher superheat temperature is. Moreover, superheat will last a shorter time with the heat load increasing. Finally, it is also pointed out that a greater mass flow will cause a larger pressure shake.

Key words: mechanically pumped cooling loop; superheat; two-phase; loop heat pipe

(上接第 24 页)

[10] 王则柯. 单纯不动点算法基础[M]. 广州: 中山大学出版社, 1986: 132—203.

[11] TODD M J. The computation of fixed points and applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1976: 64—100.

[12] 范江华, 赵康生. 集值变分不等式问题的例外簇[J]. 数学学报, 2007, 50(1): 1—6.

The Existence of Solutions for Set-valued Nonlinear Complementarity Problems

FAN Jiang-hua¹, LI Pei-xing²

- (1. School of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China;
2. School of Mathematical and Computational Sciences, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The set-valued nonlinear complementarity problems are studied. First, a new auxiliary function is constructed to transform the set-valued nonlinear complementarity problems into fixed point problems. By utilizing the Leray-Schauder fixed point theorem, a sufficient condition is given for the existence of the solution to the set-valued nonlinear complementarity problems. The results generalize some well-known existence theorems. Then, Leray-Schauder fixed point algorithm is established to solve the nonlinear complementarity problems.

Key words: set-valued nonlinear complementarity problem; fixed point; vector label algorithm; acyclic mapping