

Hecke 群的同余子群^{*}

陈 波, 袁平之

(中山大学 数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: Hecke 群为 $PSL(2, \mathbb{R})$ 的一类重要的离散子群, 它们在研究 Dirichle 级数起了重要的作用. Hecke 群的有限指数的子群 (称这些子群为 Hecke 群的同余子群) 同样在研究 Dirichle 级数发挥了重要作用, 调查这些子群的结构是非常必要的. 这些子群中, 人们特别关注那些正规的同余子群. 对于 Hecke 群 $H(\sqrt{q})$, 级为 2 的幂的主同余正规子群的结构将会被调查.

关键词: Hecke 群; 主同余子群; 同余子群

中图分类号: O152.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 06-0001-04

1 主要结论

令 $R, T, R(z) = -1/z, T(z) = z + \lambda, \lambda \in \mathbb{C}$ 设 $H(\lambda) = \langle R, T \rangle$. 当 $H(\lambda)$ 为离散群时 (此时 $H(\lambda)$ 被称为 Hecke 群), 它对研究 Dirichle 级数有重要意义. Hecke^[1] 证明 $H(\lambda)$ 离散当且仅当 $\lambda = \lambda_q = 2 \cos(\pi/q), q \in \mathbb{Z}, q \geq 3$ 或 $\lambda \geq 2$. Hecke 群在很多文献中有研究^[2-7]. 在文献 [3-7] 中, $H(\lambda_q) \cong C_2 * C_q, H(\lambda) \cong C_2 * C_q$.

$PSL(2, \mathbb{R})$ 中的变换 $g: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ 用矩阵可表为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. 当 $\lambda = \sqrt{q} \notin \mathbb{Z}$ (q 为正整数), 令 G 为

$PSL(2, \mathbb{Z}[\sqrt{q}])$ 中形如 (i) $\begin{pmatrix} a & b\sqrt{q} \\ c\sqrt{q} & d \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b \\ c & d\sqrt{q} \end{pmatrix}$,

$a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ 的元素组成的群, 则 $H(\sqrt{q}) < G < PSL(2, \mathbb{Z}[\sqrt{q}])$. 记 H_c 为 (i) 的元素组成的子群, 则 $|H(\sqrt{q}) : H_c| = 2$ 据 [8], $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in H(\sqrt{q})$

当且仅当

$$\frac{A}{C} = \left[\frac{X_0\sqrt{q}}{C} \in \frac{X_1\sqrt{q}}{C}, \dots, \frac{X_n\sqrt{q}}{C} \right],$$

$$X_0 \in \mathbb{Z}, X_i > 0, C \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

设 m 为正整数, $A = \mathbb{Z}[\sqrt{q}]/m\mathbb{Z}[\sqrt{q}]$. 则 A 的元素可唯一的表为 $a + b\sqrt{q}$, a, b 为整数, a, b 在模 m 剩余类. 令 φ_m 为同态 $\varphi_m: H(\sqrt{q}) \rightarrow PSL(2, A)$,

$$\varphi_m: \begin{pmatrix} a & b\sqrt{q} \\ c\sqrt{q} & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b}\sqrt{q} \\ \bar{c}\sqrt{q} & \bar{d} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b \\ c & d\sqrt{q} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a}\sqrt{q} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}\sqrt{q} \end{pmatrix} \quad (2)$$

记 $\ker \varphi_m = H_m(\sqrt{q})$, 则

$$H_m(\sqrt{q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\sqrt{q} \\ c\sqrt{q} & d \end{pmatrix} \in H(\sqrt{q}) \mid a \equiv b \equiv \pm 1, b \equiv c \equiv 0 \pmod{m} \right\}$$

设 p 为素数, n 为满足 $n > 1$ 的两个正整数, Γ_1^n 为 $\varphi_{pn}(H(\sqrt{q}))$ 到 $\varphi_{pn}(H(\sqrt{q}))$ 的映射

$$\Gamma_1^n: \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b}\sqrt{q} \\ \bar{c}\sqrt{q} & \bar{d} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b}\sqrt{q} \\ \bar{c}\sqrt{q} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b \\ c & d\sqrt{q} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a}\sqrt{q} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}\sqrt{q} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ 分别为 a, b, c, d 在模 p 的同余类. 则 Γ_1^n 为满同态且 $\varphi_{pn} = \Gamma_1^n \varphi_{pn}$.

设 u 为 $x^2 - q$ 在 $\mathbb{Z}_m$ 中的根. 同态 $\psi: \mathbb{Z}[\sqrt{q}] \rightarrow \mathbb{Z}_m, \zeta = a + b\sqrt{q} \mapsto \bar{\zeta} = \bar{a} + \bar{b}u$ ($\bar{a}, \bar{b}$ 为模 m 的剩余系) 可诱导出从 $H(\sqrt{q})$ 到 $PSL(2, \mathbb{Z}_m)$ 的群同态 $\psi_{p,u}$. 则 $\ker \psi_{p,u}$ 为 $H(\sqrt{q})$ 的正规子群且 $H_m(\sqrt{q}) \leq \ker \psi_{p,u}$. 类似于 (3) 式, 有从 $\psi_{p,u}(H(\sqrt{q}))$ 到 $\psi_{p,u}(H(\sqrt{q}))$ 的同态映射 Δ^n , 使得 $\psi_{p,u} = \Delta^n \psi_{p,u}$.

当 $q = 2$ 或 3 , 利用 Maceath^[9] 的结果, $H(\sqrt{q})/H_p(\sqrt{q})$ 的 $H(\sqrt{q})/\ker \psi_u$ 的结构 Theorem

* 收稿日期: 2006-12-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571180); 广东省自然科学基金资助项目 (04009801)

作者简介: 陈波 (1971 年生) 男, 博士研究生; E-mail: bchen@uic.edu.cn

5. 1^{10} , Theorem 2. 3^{10} , Theorem 2. 2^{11} 中已经给出。本文讨论 $p=2$ 且 q 为偶数时, 这两个群的结构。如果有限群 G 有正规循环子群 H 满足 $|H| = m$, $H \leq Z(G)$ (G 的中心) 且 $G/H \cong D_{2m}$ (D_{2m} 为阶为 $2m$ 的二面体群) 则称 G 为 $ED(m)$ -群。设 n 为正整数, q 为偶数。当 $x - q$ 在 Z_n 中有根 u 则 $u = 2^e \epsilon$ 其中 ϵ 为 Z_n 中的单位, e 为满足 $0 < e \leq n$ 的正整数 (当 $e = n$ 时, $u = 0$)。记 $ord_2(q) = a$ 为满足 $2^{ord_2(q)} \parallel q$ 的整数。下面是我们的主要的结论。

定理 1 令 u 为 $x - q$ 在 Z_n 中的根,

$$H(\sqrt{q}) / \ker \psi_{2^n u} = H$$

设 $ord_2(q) = 2^e$ 若 $2^n \nmid q$ 则

(1) 当 $n \leq e$ 时, 有 $H(\sqrt{q}) / \ker \psi_{2^n u} \cong C_2$;

(2) 当 $e < n \leq 2^e$ 时, $H(\sqrt{q}) / \ker \psi_{2^n u}$ 为 $ED(2^{n-e})$ -群。

定理 2 令 u 为 $x - q$ 在 Z_n 中的根, $H(\sqrt{q}) / \ker \psi_{2^n u}$ 设 $ord_2(q) = 2^e$ 若 $2 \mid q$ 但 2^n 不整除 q 则存在 H 的正规子群 H_1 使得 H/H_1 为 $ED(2^e)$ -群, $|H_1| = 2^{3(n-2^e)}$ 且 $d(H_1) \leq n - 2^e$ 。

在下面定理中, 我们不要求 $x - q$ 在 Z_n 中一定有根。

定理 3 设 $F = H(\sqrt{q}) / H_{2^n}(\sqrt{q})$ 且 $ord_2(q) = e > 0$ 则下列命题成立

(1) 若 $n \leq e$ 则 F 为 $ED(2^n)$ -群;

(2) 若 $n > e$ 则有 F 的 $2^{3(n-e)}$ 阶正规子群 N 使得 F/N 为 $ED(2^n)$ -群且 $d(N) \leq n - e$ 。

2 定理的证明

首先我们引入一些记号。设 $f^n = \psi_{2^n u}(R)$, $s_n = \psi_{2^n u}(S)$ 且 $t_n = \psi_{2^n u}(T)$ 则 $s_n = -I + 2^e \epsilon s_{n_0}$ 如果 $2^n \nmid q$ 那么 $s_n = -I + 2^e \epsilon f_{2^n}$ 分别用 S_{2^n} , T_{2^n} , R_{2^n} 表示 $\varphi_{2^n}(S)$, $\varphi_{2^n}(T)$ 和 $\varphi_{2^n}(R)$ 。

定理 1 的证明:

(1) 若 $n \leq e$ 则 $u = 0$ 因此 $f_n = 1$ 且 $s_n = f_n$, 于是 $\psi_{2^n u}(H(\sqrt{q})) = \langle f_n, s_n, t_n \rangle = \langle f_n \rangle \cong C_2$ 。

(2) 若 $e < n \leq 2^e$ 令 $Q = \psi_{2^n u}(H(\sqrt{q})) = \langle f_n, s_n \rangle$, $K = \langle s_n \rangle$ 。我们断言: $K \leq Z(Q)$ 且 $\alpha(f_n) = \alpha(s_n) = 2^{n-e}$ 。不难计算 $f_n^{-1} s_n f_n = s_n$, 从而 $s_n f_n = f_n s_n$, $K \leq Z(Q)$ 。易见 $\alpha(f_n) = 2^{n-e}$ 。由 $s_n^k = (-I + 2^e \epsilon f_n)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^k \binom{k}{i} (2^e \epsilon)^i f_n^i = (-I)^k + (-1)^{k-1} 2^e k \epsilon f_n$ (4)

得 $\alpha(s_n) = 2^{n-e}$, 故断言为真。通过计算可知 $f_n^{-1} s_n f_n = s_n$, 故

$$s_n^{-1} f_n s_n K = f_n^{-1} s_n K = f_n K$$

而 $\langle f_n \rangle$ 中的每个矩阵可表为 $\begin{pmatrix} 1 & 2^e m \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $0 \leq m <$

2^{n-e} 。若 $(s_n)^k = f_n$, 由 (4), $2^e k \equiv 0 \pmod{2^n}$, 于是 $2^{n-e} \mid k$ 从而 $\langle f_n \rangle \cap \langle s_n \rangle = 1$ 。于是

$$\alpha(f_n K) = |\langle f_n \rangle K / K| =$$

$$|\langle f_n \rangle| / |\langle f_n \rangle \cap K| = |\langle f_n \rangle| = 2^{n-e}$$

容易看出: $\alpha(f_n K) = 2$ 因此 $Q/K \cong D_{2^{n-e-1}}$ 故 Q 为 $ED(2^{n-e})$ -群, 这完成了证明。

引理 1 $\alpha(f_{2^{k+e}}) = 2^{k+e}$; 且若 $e > 1$ 则 $\alpha(s_{2^{k+e}}) = 2^{k+e}$ 。

证明 由于

$$(s_{2^{k+e}})^{2^{k+e}} = (-I + 2^e \epsilon s_{2^{k+e}})^{2^{k+e}} = \sum_{i=0}^{2^{k+e}} (-1)^{2^{k+e}-i} \binom{2^{k+e}}{i} (2^e \epsilon)^i s_{2^{k+e}}^i$$

对满足 $0 < i < 2^{k+e}$ 的 i , 记 $i = 2^\beta m$ ($m \geq 1, \beta \geq 0$) 则

$$ord_2 \left(\binom{2^{k+e}}{i} (2^e \epsilon)^i \right) \geq k + e + 2^\beta e - \beta$$

若 $\beta = 0$ 则

$$ord_2 \left(\binom{2^{k+e}}{i} (2^e \epsilon)^i \right) \geq k + e$$

若 $\beta > 0$ 则

$$ord_2 \left(\binom{2^{k+e}}{i} (2^e \epsilon)^i \right) \geq k + e + 2^\beta e - \beta \geq k + 2$$

于是

$$(s_{2^{k+e}})^{2^{k+e}} = I$$

由于

$$(s_{2^{k+e}})^{2^{k+e-1}} = (-I + 2^e \epsilon s_{2^{k+e}})^{2^{k+e-1}} = \sum_{i=0}^{2^{k+e-1}} (-1)^{2^{k+e-1}-i} \binom{2^{k+e-1}}{i} (2^e \epsilon)^i s_{2^{k+e}}^i$$

记 $i = 2^\beta m$ ($m \geq 1$) 则

$$ord_2 \left(\binom{2^{k+e-1}}{i} (2^e \epsilon)^i \right) = k + e - 1 + 2^\beta e - \beta$$

若 $ord_2 \left(\binom{2^{k+e-1}}{i} (2^e \epsilon)^i \right) < k + 2^e$ 则 $2^\beta e - \beta < e + 1$

则 $\beta = 0$ 否则由 $2^\beta e - \beta \geq 2^\beta e - \beta \geq 2^\beta + e - \beta$ 若 $\beta > 1$ 则 $2^\beta - \beta > 1$ 故 $1 + e < 2^\beta - \beta + e \leq e + 1$ 矛盾。若 $\beta = 1$ 那么 $2^{e-1} \leq e + 1$ 于是 $e(2^{e-1} - 1) < 2$ 这说明 $e = 2$ 矛盾。故 $\beta = 0$ 则 $e < e + 1$ 从而 $m = 1$ 故 $(s_{2^n})^{2^{k+e-1}} = -I + 2^{k+2^e-1} \epsilon s_{2^{k+e}} \neq \pm I$ 。

引理 2 设 k 为正整数, Δ 为上一节这义的同态映射。则 $|\ker \Delta_{k+2^e-1}^{k+2^e}| = 8$ 且 $\ker \Delta_{k+2^e-1}^{k+2^e}$ 为初等 Abel 2-群。

证明 当 $e > 1$ 令 $M = \langle s_{2^{k+e}}^{2^{k+e-1}}, s_{2^{k+e}}^{2^{k+e-2}} \rangle$ 。我们

断言: $M \cong C_2 \times C_2$ 且

$$M = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 2^{k+2e-1} \\ 2^{k+2e-1}m & 1 \end{pmatrix} t \mid t, m \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

由引理 1

$$\alpha(\frac{1}{2^{k+2e-1}}) = \alpha(\frac{2}{2^{k+2e-1}}) = 2^{k+e-1}$$

于是

$$\frac{2^{k+e-1}}{2^{k+2e}}, \frac{2^{k+e-1}2}{2^{k+2e}} \in \ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}$$

$$1 \neq \langle \frac{2^{k+e-1}}{2^{k+2e}} \rangle \cap \langle \frac{2^{k+e-1}}{2^{k+2e}} \rangle$$

$$< \frac{2^{k+e-1}2}{2^{k+2e}} \rangle = < \frac{2^{k+e-1}}{2^{k+2e}} \rangle$$

$$\text{由 } \begin{pmatrix} 1 & 2^{k+2e-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon = \frac{2^{k+e-1}}{2^{k+2e}} = \frac{2^{k+e-1}2}{2^{k+2e}} =$$

$$(-1) \begin{pmatrix} 1 & 2^{k+2e-1} \\ -2^{k+2e-1} \epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

故 $2^{k+2e-1} \equiv 0 \pmod{2^{k+2e}}$, 矛盾, 故

$$< \frac{2^{k+e-1}}{2^{k+2e}} \rangle \cap < \frac{2^{k+e-1}2}{2^{k+2e}} \rangle = 1$$

易证 $\ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}$ 是 Abe 的, 因此 $M \cong C_2 \times C_2$. 设

$$M = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 2^{k+2e-1} \\ 2^{k+2e-1}m & 1 \end{pmatrix} t \mid t, m \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

很明显 M_1 为 4 阶群且 $M \leq M_1$, 于是 $M = M_1$, 从而断言为真.

现在证明 $M \neq \ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}$, 设

$$g = T_1^X R T_1^X, R T_2^X R T_2^X R =$$

$$\begin{pmatrix} X_1 X_1' q - 1 & (X_1 X_2' q - 1) - & -X_2 (X_1 X_1' q - 1) \sqrt{q} + \\ X_1 X_2' q & & X_1' \sqrt{q} \\ X_1' \sqrt{q} (X_2 X_2' q - 1) - & & -X_1' X_2 q + 1 \\ X_2' \sqrt{q} & & \end{pmatrix}$$

$$X_1 = 2^{k+e-1} - 1, X_1' = 2^{k+1},$$

$$X_2 = 1, X_2' = 2^{k+e-1} - 2^{k+1} \quad (5)$$

于是 $\psi_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}(g) \in \ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}$. 由于 2^{k+2e} 不整除 $\epsilon^2 2^{k+2e-1} (2^e - 1) (2^{k+e-1} - 1)$, 于是 $g \notin M$. 令

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2^{k+2e-1}a & 2^{k+2e-1}b \\ 2^{k+2e-1}c & 1 + 2^{k+2e-1}d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\} \quad (6)$$

则 $K \leq \text{PSL}(2, \mathbb{Z}_2)$ 且 $|K| = 8$. 由于 $M < \ker$

$\Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}} \leq K$ 于是 $\ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}} = K$. 容易看出 K 是 Abe 群且 $g = \pm$ 对任意的 $g \in K$ 从而 K 为初等 Abe 2-群. 于是 $e \geq 1$ 时, 命题为真.

当 $e = 1$, 令 $h = \frac{1}{2^{k+2e}} \frac{2^{k+e-1}}{2^{k+2e}} \frac{1}{2^{k+2e}}$, 易证 $h =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2^{k+2e-1} \epsilon & 1 \end{pmatrix}. \text{ 于是 } h \in \ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}. \text{ 注意到 } h \in$$

$$\left(\frac{2^{k+e-1}}{2^{k+2e}} \right) \text{ 且 } h \in \ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}. \text{ 设 } M = \left(\frac{1}{2^{k+2e}} \right). \text{ 易知}$$

$$M = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 2^{k+2e-1} \\ 2^{k+2e-1}m & 1 \end{pmatrix} t \mid t, m \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

像 (5) 取 g 可以证明 M 为 $\ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}$ 的 4 阶真子

群, 而且有 $M < \ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}} \leq K$ 其中 K 为在式 (6)

中定义的 8 阶初等 Abe 2-群, 从而 $\ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}} = K$ 于是命题为真.

定理 2 的证明 令 $k = n - 2^e$, 由于 2^n 除不尽 q 则 $k > 0$. 我们对 k 用归纳法证明我们的结论. 如果 $k = 1$, 那么 $\psi_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}(H/\sqrt{q})$. 据定理 1, $\psi_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}(H/\sqrt{q})$

为 $\text{ED}(2^e)$ -群, 设 $H = \ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}$, 则由引理 2 $|H| = 2^3$ 且 $d(H) = 1$, 因此当 $k = 1$, 命题为真.

如果 $k > 1$, 由引理 2 可知: $\Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}$ 的核是阶为 2^3 的初等 Abe 2-群. 设 $F = \psi_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}(H/\sqrt{q})$ 由归

纳法, 存在 F 的阶为 $2^{3(k-1)}$ 的正规子群 F_1 , 使得 F/F_1 为 $\text{ED}(2^e)$ -群并且 $d(F_1) \leq k-1$. 令 $H =$

$$(\Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}})^{-1}(F_1). \text{ 由于 } H/\Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}} \cong \psi_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}(H/\sqrt{q}),$$

则 $H/H_1 \cong F/F_1$ 且 $H/\ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}} \cong F_1$. 于是

$$|H| = |F_1| |\Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}| = 2^{3(n-2^e)}$$

并且

$$d(H) \leq d(F_1) + d(\ker \Delta_{\frac{k+2e}{k+2e-1}}) \leq k-1+1 = k = n-2^e$$

定理 2 的证明结束.

引理 3 令 $e = \text{ord}_2(q) > 0$, φ, Γ 分别由 (2) 式和 (3) 式定义, 则有

(1) 如果 $k = n - e \leq 0$ 那么 $\varphi_{2^n}(H/\sqrt{q})$ 为 $\text{ED}(2^n)$ -群;

(2) 如果 $k = n - e > 0$ 那么 $\ker \Gamma_{\frac{k+e}{k+e-1}}^{k+e}$ 为 2^3 阶初等 Abe 2-群.

证明 (1) 设

$$Q = \varphi_{2^n}(H/\sqrt{q}), K = \langle \mathbb{S}_n \rangle \leq \varphi_{2^n}(H/\sqrt{q})$$

$$\text{由 } T_2^{-1} \mathbb{S}_n T_2 = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{q} \\ \sqrt{q} & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{S}_2, \text{ 知 } K \leq Z(Q). \text{ 通}$$

过计算可得 $T_2^{-1} \mathbb{S}_n = \mathbb{S}_2^{-1} T_2 \mathbb{S}_2$, 因此

$$\mathbb{S}_2^{-1} T_2 \mathbb{S}_n K = T_2^{-1} \mathbb{S}_2 K = T_2^{-1} K \quad (7)$$

计算 $\mathbb{S}_2^k$ 可知, $\mathbb{S}_2^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & k\sqrt{q} \\ -k\sqrt{q} & 1 \end{pmatrix}$. 很明显

$$T_2^n = \begin{pmatrix} 1 & m\sqrt{q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 于是}$$

$$\alpha(\mathbb{S}_2) = \alpha(T_2) = 2^n,$$

$$< \mathbb{S}_2 \rangle \cap < T_2 \rangle = 1 \quad (8)$$

利用式 (7) 和式 (8), 用与定理 1 (2) 的证明类似的方法可得 $H(\sqrt{q})/H_2(\sqrt{q})$ 为 $\text{ED}(2^n)$ -群.

(2) 令 $N = \langle T_2^{\frac{k+e-1}{2}}, R_{\frac{k+e-1}{2}} T_2^{\frac{k+e-1}{2}} R_{\frac{k+e-1}{2}} \rangle$, 类似于引理 2 的证明, 可证 N 是 $\ker \Gamma_{\frac{k+e}{k+e-1}}^{k+e}$ 的真子群, 从而 $\ker \Gamma_{\frac{k+e}{k+e-1}}^{k+e}$ 为 8 阶的, 容易验证 $\ker \Gamma_{\frac{k+e}{k+e-1}}^{k+e}$ 初等 Abe 2-群.

定理 3 的证明 据引理 3 只需证明第二个命

题。用证明定理 2 的方法, 即可证明定理 3。

参考文献:

- [1] HECKE E. Über die bestimmung dirichletscher reihen durch ihre funktionalgleichungen[J]. Math Ann 1936 12: 664—699
- [2] SCHMIDT T A, SHENGORN M. Length spectra of the hecke triangle groups[J]. Math Z 1995 220(2): 369—197.
- [3] CANGUL I N, SINGERMAN D. Normal subgroup of hecke groups and regular maps[J]. Math Proc Phil Soc 1998 123: 59—74
- [4] LANG M L, LM C H, TAN S P. Principal congruence subgroups of the groups[J]. J Number Theory 2000 85(2): 220—230
- [5] PARSON L A. Generalized kposterman sum and the fourier coefficients of cusp forms[J]. Trans AMS 1976 217: 329—350
- [6] PARSON L A. Normal congruence subgroups of the hecke groups $G(\sqrt{2})$ and $G(\sqrt{2})$ [J]. Pacific J Math 1977 70: 481—487.
- [7] OZGUR N Y, CANGUL I N. On the group Structure and parabolic points of hecke groups $H(\lambda)$ [J]. Proc Estonian Acad Sci Phys Math 2002 51(1): 35—46
- [8] ROSEN D. A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous group[J]. Duke Math J 1954 21: 549—564
- [9] MACBEATH A M. Generators of the linear fractional groups[J]. Proc Symp Pure Math AMS 1969 12: 14—32
- [10] OZGUR N Y, IZMOB. Congruence subgroup of some hecke groups[J]. Bulletin of Mathematics Academia Sinica 2002 30(2): 115—131.
- [11] OZGUR N Y. Principal congruence subgroups hecke groups $H(\sqrt{q})$. Acta Mathematica Sinica 2006 22(2): 383—392

Congruence Subgroups of Hecke Groups

CHEN Bo, YUAN Ping-zhi

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Hecke groups are an important class of discrete subgroups of $PSL(2, \mathbb{R})$, which play an important role in studying Dirichlet series. Subgroups with finite index of a Hecke group, which are called congruence subgroup, are often used in researching Dirichlet series, so it is necessary to investigate their structure. Especially, people pay much attention to those normal subgroup. For the Hecke group $H(\sqrt{q})$, the principal subgroups of level a power of 2 are discussed.

Key words: Hecke group, principal congruence subgroup, congruence subgroup