

薄环形等离子体填充波导中的 T-G 模式研究^{*}

谢鸿全¹, 廖旭¹, 游佳²

(1. 西南科技大学理学院, 四川绵阳 621010)

2. 西南科技大学信息工程学院, 四川绵阳 621010)

摘要: 利用等离子体流体模型和线性场理论, 分别导出了无限薄环形等离子体填充圆柱波导和无限薄环形等离子体填充波纹波导中的色散关系。通过数值计算, 对以上两种情况下的 T-G 模的特性作了相应的比较和分析。研究表明, 在无限薄环形等离子体填充情况下, T-G 模的频率不再受到等离子体振荡频率的限制。

关键词: 等离子体; 圆柱波导; 波纹波导; T-G 模式

中图分类号: TN128 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) S2-0185-04

等离子体是处于一定温度下的电离气体, 它由大量带电粒子、原子和分子组成, 宏观上呈现出电中性。近年来, 由于等离子体填充的高功率微波源具有一系列的优点, 因此对等离子体波导的研究也受到各国学者的高度关注。研究表明, 由于等离子体的存在, 波导中存在着低频等离子体模式, 这些模式最早由 Trivelpiece 和 Gould 发现, 因此被称之为 T-G 模^[1-4]。在已有的研究文献中, 等离子体大多数都是均匀填充, 较少涉及环形填充情况^[5-8]。本文将着重讨论在无限薄环形等离子体填充圆柱波导和波纹波导这两种情况下 T-G 模的特性, 并将它们与等离子体均匀填充圆柱波导的情况进行比较与分析。

1 无限薄环形等离子体填充光滑圆柱波导

1.1 电子注与等离子体的扰动电荷密度

在小信号条件下, 电子注与等离子体中的物理量及电磁场分量可以写成一直流分量与一扰动分量之和, 即:

$$\left. \begin{aligned} J &= J_0 + J_1 \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1 \\ v &= v_0 + v_1 \\ E &= E_0 + E_1 \\ H &= H_0 + H_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ρ 和 v 分别为电荷密度与电子速度, 下标 “0” 和 “1” 分别代表直流分量和扰动分量, 且上式中各量的扰动部分远小于其本身的直流部分。由于无限

大引导磁场限制了电子的横向运动, 故以下分析均只考虑电子在纵向的一维运动情况。

在柱面坐标系中, 取电子注延伸方向为 z 轴, 将各物理量的扰动分量写成波动因子 $e^{j(\omega t - kz)}$ 的形式, 于是有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= -j\omega \\ \frac{\partial}{\partial z} &= jk \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

从电子注或等离子体流体模型出发, 利用连续性方程:

$$\frac{\partial J}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3)$$

在一维电子注假定条件下, 上式可写成

$$\frac{\partial J_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4)$$

取其扰动部分并利用 (2) 式, 得

$$\rho_1 = \frac{k}{\omega} J_z \quad (5)$$

根据电流密度的定义

$$J_z = \rho v_z \quad (6)$$

即:

$$J_z + J_z = (\rho_0 + \rho_1)(v_0 + v_1) \quad (7)$$

略去二级小量后得

$$J_z = \rho_0 v_z \quad (8)$$

$$J_z = \rho_0 v_z + \rho_1 v_z \quad (9)$$

将 (9) 式代入 (5) 式得

* 收稿日期: 2006-09-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10347009); 四川省教育厅自然科学基金资助项目 (2003B019)

作者简介: 谢鸿全 (1974年生), 男, 博士, 教授; E-mail: hongquanxie@263.net

$$\rho_1 = \frac{k_0 \gamma_z}{\omega - k_y v_z} \quad (10)$$

利用电磁流体运动方程,并考虑到相对论效应:

$$\gamma \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma (v \cdot \nabla) v = - \frac{e}{m} (E + v \times B) \quad (11)$$

式中 γ 为相对论因子,对电子注 $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 为真空中光速;对等离子体, $\gamma = 1$. 注意到直流聚焦磁场沿 z 轴方向,因此 $v \times B_0$, 由 (11) 式可得:

$$\gamma_z = \frac{ie}{m m_0 (k_y v_z - \omega) \gamma^3} E_z \quad (12)$$

将 (12) 式代入 (10) 式可得:

$$\rho_1 = \frac{-ik_0 e E_z}{m(\omega - k_y v_z)^2 \gamma^3} \quad (13)$$

上式即为电子注或等离子体的扰动电荷密度,对等离子体而言,由于 $v_z = 0$, $\gamma = 1$, 故 (13) 式可简化为:

$$\rho_1 = \frac{-ik_0 e E_z}{m\omega^2} \quad (14)$$

1.2 色散方程

在半径为 R_0 的光滑圆柱波导中充有无限薄环形等离子体,其半径为 R_p , 密度为 n_p . 整个系统的径向结构如图 1 所示.

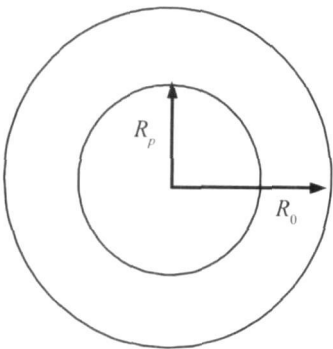


图 1 无限薄环形等离子体填充光滑圆柱波导的径向结构
Fig 1 Cross section of a smooth cylindrical waveguide filled with an infinitely thin annular plasma

解麦克斯韦方程组可得到系统中的场分布为:

$$E_z(r) = \begin{cases} A_0 J_0(kr) & 0 \leq r \leq R_p \\ B_0 J_0(kr) + C_0 Y_0(kr) & R_p \leq r \leq R_0 \end{cases} \quad (15)$$

$$E_r(r) = \frac{ik}{\omega^2 - k^2} \frac{d}{dr} E_z \quad (16)$$

式中, $T^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (17)$

A 、 B 和 C 为电场的幅值系数,利用电场的匹配条件可将 B 、 C 两个系数用 A 表示出来.

在 $r = R_p$ 处,切向电场 E_z 连续,即:

$$E_z(r = R_p^-) = E_z(r = R_p^+) \quad (18)$$

式中, $R_p^\pm = R_p \pm 0 \quad (19)$

在 $r = R_0$ 处,径向电场 E_r 不连续,扰动电场的泊松方程可写为:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_1}{\epsilon_0} \quad (20)$$

对 (20) 式两边从 $r = R_0$ 到 $r = R_p$ 积分并利用切向电场 E_z 在 $r = R_p$ 处的连续条件 (18) 式可得:

$$E_z|_{R_p}^{R_0} = \frac{1}{2\pi \epsilon_0 R_p} \int_{R_p}^{R_0} 2\pi r \rho_1 dr \quad (21)$$

将 (14) 式代入上式并利用

$$\rho_0 = -en_p \quad (22)$$

可得 $\left. \frac{dE_z}{dr} \right|_{R_p}^{R_0} = B_0 E_z(R_p) \quad (23)$

其中, $B_0 = \frac{en_p(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)}{2\pi \epsilon_0 m R_0 \omega^2} \quad (24)$

$$N_p = \int_{R_p}^{R_0} 2\pi n_p dr \quad (25)$$

上式中 N_p 为薄环形等离子体的线密度.

将 (15) 式分别代入 (18) 和 (23) 式可得:

$$A_0 J_0(kR_p) = B_0 J_0(kR_p) + C_0 Y_0(kR_p) \quad (26)$$

$$TB_0 J_0(kR_p) - TC_0 Y_0(kR_p) - TA_0 J_0(kR_p) = B_0 A_0 J_0(kR_p) \quad (27)$$

联立求解 (26) 和 (27) 两式并利用郎斯基关系式:

$$I_\nu(x) K_{\nu+1}(x) + I_{\nu+1}(x) K_\nu(x) = \frac{1}{x} \quad (28)$$

可得

$$B = [1 + R_p B_0 J_0(kR_p) K_0(kR_p)] A \quad (29)$$

$$C = -B_0 R_p J_0(kR_p) A \quad (30)$$

在圆柱波导的内表面 $r = R_0$ 处,切向电场为零,即:

$$E_z(r = R_0) = 0 \quad (31)$$

将 (15) 式代入边界条件 (31) 式,并结合 (29) 和 (30) 两式可得:

$$J_0(kR_0) - B_0 R_p J_0(kR_0) [J_0(kR_p) K_0(kR_p) - J_0(kR_p) K_0(kR_p)] = 0 \quad (32)$$

上式即为无限大引导磁场下无限薄环形等离子体填充光滑圆柱波导中电磁波传播的色散方程.

1.3 讨论与分析

在 k 较小时, (32) 式可简化为

$$\omega = -k \frac{e N_p}{2\pi \epsilon_0 m} \ln\left(\frac{R_0}{R_p}\right) \tag{33}$$

当相当大时，色散方程可近似地用下式来代替：

$$\omega = \left(\frac{e N_p k}{4\pi \epsilon_0 m R_p}\right)^{1/2} \tag{34}$$

数值求解色散方程（32）式，可以得到如图 2 所示的冷色散曲线。计算中所采用的等离子体的线密度为 $N_p=3.0\times10^{11}\text{ cm}^{-1}$ ，等离子体薄环半径 $R_p=1.0\text{ cm}$ ，圆柱波导半径 $R_0=1.60\text{ cm}$ 。图 2 中，在相速 $\omega/k\ll c$ 的低频范围内仅存在一条色散曲线。这是因为，在（17）式中， $T^2>0$ 因此（32）式中 T 的是一个实数，色散方程仅包含了没有零值的变态贝塞尔函数，这一点与在等离子体均匀填充的情形下所导得的色散方程不同^[1]。另一方面，在 ω/k 的高频范围内，由于 T^2 是一个负数，色散方程（32）式将包含无穷多条 TM_n 模式的色散曲线，这与未充等离子体的真空情形相类似。

值得注意的是，图 2 中的低频模式并没有象文献 [1] 中的 TC 模一样有一条渐进线 $\omega=\omega_{pe}$ 。当 k 很大时，其色散关系可近似由（34）式来描述，这时频率 ω 大致与波数 $k^{1/2}$ 成正比。当 k 很小时，色散曲线接近于过零点的一条直线，其斜率由（33）式所决定。

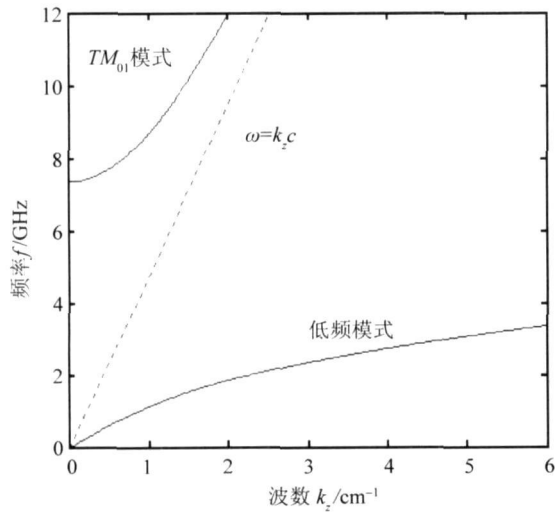


图 2 无限薄环形等离子体填充光滑圆柱波导色散曲线
Fig 2 Dispersion curves for smooth cylindrical waveguide filled with an infinitely thin annular plasma

2 无限薄环形等离子体填充波纹波导

如图 3 所示，波纹波导为圆柱对称，波导壁上的波纹呈周期性变化且满足数学关系： $R(\varphi) = R_0 + h\cos\varphi/k_z\varphi$ 。式中 R_0 为波导的平均半径， h 为波

纹深度， $k_z=2\pi/\varphi$ 是波纹波数， φ 为波纹的周期长度。一束无限薄环形等离子体穿过该慢波结构，其半径为 R_0 。等离子体的线密度为 N_p ，整个系统置于无限大纵向引导磁场中。

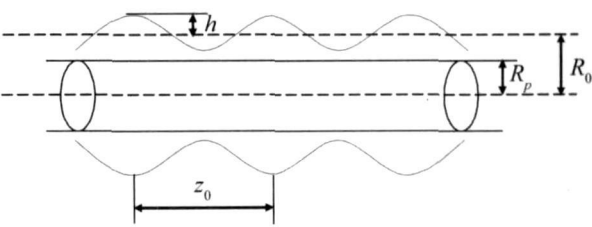


图 3 无限薄环形等离子体填充波纹波导结构示意图
Fig 3 Schematic of a corrugated wall waveguide filled with an infinitely thin annular plasma

由于波纹波导是周期性波导，可将场展开为空间谐波，并利用边界条件：

$$E_r(r=R(\varphi)) + E_r(r=R(\varphi)) \frac{dR(\varphi)}{dz} = 0 \tag{35}$$

可导出其色散方程。由于推导过程与圆柱波导类似，这里略去了色散方程的推导及其表达式，直接给出数值求解所得到的色散关系。

计算中采用的参数为：波导平均半径 $R_0=1.60\text{ cm}$ ，波纹深度 $h=0.40\text{ cm}$ ，波纹周期 $\varphi=1.05\text{ cm}$ ，等离子体薄环半径 $R_p=1.0\text{ cm}$ 。图 4 (a) 和 (b) 中等离子体线密度分别为 $N_p=4.0\times10^{11}\text{ cm}^{-1}$ 和 $1.1\times10^{12}\text{ cm}^{-1}$ 。图 4 中给出了低频等离子体模式和 TM_{01} 模式两个周期的色散曲线，它们均严格满足 Floquet 定理所要求的周期性。图 4 中的虚线为电子注线，电子速度 $v=0.92c$ 。由图 4 (a)、(b) 可知，对于低频等离子体模式而言，由于假定环形等离子体无限薄，因此它并没有受到等离子体频率的限制。当等离子体线密度增大时，虽然 TM_{01} 模的色散曲线向上仅有微小的移动，但低频模式的色散特性变化却十分明显。从图 4 (b) 可看出，低频模式的色散曲线向上大幅度移动，在频率较低处，色散曲线之间的频率间隔增大，在频率较高处，低频模式和 TM_{01} 模式相互之间发生了耦合。

3 结 语

本文分析了在无限大引导磁场下，充有无限薄环形等离子体的光滑圆柱波导和波纹波导中低频等离子体模式的色散特性。结果表明，在无限薄环形等离子体填充时，圆柱波导中的低频模式的色散曲

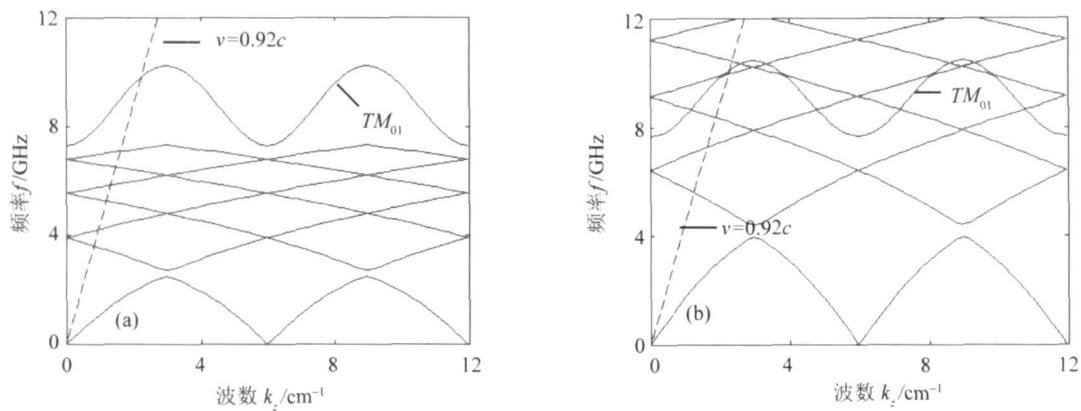


图 4 无限薄环形等离子体填充波纹波导色散曲线
Fig 4 Dispersion curves for corrugated wall waveguide filled with an infinitely thin annular plasma

线数目为有限，且它们的频率不再受到等离子体频率的限制。在周期性波导中，T—G模的色散曲线具有周期性，等离子体密度的变化对其影响很大，当等离子体密度较高时，T—G模式还可与模式发生耦合。

参考文献：

[1] TRIVELPIECE A W, GOULD R W. Space charge waves in cylindrical plasma columns[J]. J Appl Phys, 1959, 30 (11): 1784—1799

[2] LOU W R, CARMEL Y, ANTONSEN T M, et al New mode in a plasma with periodic boundaries: the origin of the dense spectrum[J]. Phys Rev Lett, 1991, 67 (8): 2481—2484

[3] IGNATOV A M, Trivelpiece, Gould modes in a corrugated plasma slab[J]. Phys Rev E, 1995, 51 (2): 1391—1399

[4] KOBAYASHI S, ANTONSEN T M, Jr, et al Linear theory of a plasma backed helix type slow wave amplifier[J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 1998, 26 (3): 669—679

[5] LIU Shenggang, ROBERT J Barker, ZHU Dajun, et al Basic theoretical formulations of plasma microwave electronics. Part I: A fluid model analysis of electron beam-wave interaction[J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 2000, 28 (6): 2135—2151

[6] LIU Shenggang, ROBERT J Barker, YAN Yang, et al Basic theoretical formulations of plasma microwave electronics— Part II: Kinetic theory of electron beam-wave interactions[J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 2000, 28 (6): 2152—2165

[7] 谢鸿全, 鄢扬, 刘盛纲. 相对论行波管色散特性分析[J]. 强激光与粒子束, 2002, 14 (1): 111—114

[8] 谢鸿全, 李承跃, 鄢扬, 等. 等离子体加载螺旋线行波管特性研究[J]. 物理学报. 2003, 52 (4): 914—919

Research on the T-G Modes in Two Waveguides Filled with
an Infinitely Thin Annular Plasma

XIE Hong-quan¹, LAO Xu², YOU Ji²

(1. College of Science, Southwest University of Science and Technology, MianYang, Sichuan 621010, China;
2. College of Information Engineering, Southwest University of Science and Technology,
MianYang, Sichuan 621010, China)

Abstract: BY means of fluid model and linear field theory, the dispersion equation of the electromagnetic wave propagation along a cylindrical waveguide filled with an infinitely thin annular plasma. The dispersion characteristics of T-G modes in cylindrical waveguide and corrugated wall waveguide are analyzed respectively. It is found that the frequency of the T-G mode couldn't be confined by plasma oscillation frequency in the case of the infinitely annular plasma filling.

Key words: plasma; cylindrical waveguide; corrugated wall waveguide; T-G mode