

Co regular 集的可计算性探讨^{*}

邱玉文, 赵希顺

(中山大学逻辑与认知研究所, 广东 广州 510275)

摘要: 引入了在 TIE 框架下, 利用开集和闭集的表示式, 定义了度量空间中 co regular 集的若干不等价表示式; 并对这些表示式的强弱关系进行了论证。研究表明: 这些表示式的强弱, 有一个明确的顺序; 在被引入的不等价表示式中, $\eta_{\leq} = \theta_{\leq} \wedge \overline{\psi}_{\leq}$ 是 co regular 集所有表示式中最强的。

关键词: 第二类能行性理论; 可计算性; 表示式; co regular 集

中图分类号: O141.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 06-0014-04

第二类能行性理论 (简称为 TIE) 是最近几十年活跃于可计算分析领域的主要分析工具。它的主要思想是利用改进后的图灵机^[1], 即可输入和输出无穷长的字符串的图灵机研究实数和实数集合上诸运算的可计算性和计算复杂性。

TIE 用有限字母表 Σ 上的无穷字符串来表示实数, 这个无限长度的字符串被称为实数的表示式。在一个第二类图灵机上, 如可在无输入的情况下能输出一个实数 x 的 α 表示式, 就称这个实数 x 是 α -可计算的。对于函数 $f: A \rightarrow B, x \mapsto y$ 称部分映射 $\alpha_x: \subseteq \Sigma^{\omega} \rightarrow B$ 和 $\beta_y: \subseteq \Sigma^{\omega} \rightarrow B$ 是定义在集合 A 和 B 上的命名系统。这里, Σ 表示有限多个元素的字母表, Σ^{ω} 表示 Σ 上所有无穷串组成的集合, “ $\subseteq$ ” 表示上述两个映射是分别建立在 A 的子集到实数集 B 上的满射。当在图灵机上任意输入自变量 x 的一个 α 表示式时, 都可以输出 $y = f(x)$ 的一个 β 表示式, 就称函数 $\{ \alpha, \beta \}$ 是可计算的。假设 $\alpha_x: \subseteq \Sigma^{\omega} \rightarrow X$ 和 $\beta_y: \subseteq \Sigma^{\omega} \rightarrow X$ 是建立在集合 (或类) X 上的不同的两个命名系统, 如果存在一个可计算函数 h 可将 $x \in X$ 的 α 表示式转化为 β 表示式, 就称表示式 α 比 β 强或表示式 β 比 α 弱, 记为 $\alpha \leq \beta$ 。如果 $\alpha \leq \beta$ 和 $\beta \leq \alpha$ 同时成立, 就称 α 和 β 等价, 记为 $\alpha \equiv \beta$ 。

任意一个研究对象都会尽可能多地建立不同的命名系统, 因为虽然等价的命名系统诱导的函数可计算性是相同的^[1], 但是计算复杂性可能不同。对于一个函数来讲, 建立在定义域和值域上不同的不等价命名系统, 对于研究函数的可计算性, 意义十分重大。

经过前辈数学和计算机工作者的辛勤努力, 可计算分析的框架已经基本形成。实数、集合 (开

集、闭集、紧集) 的命名系统, 可计算函数以及连续函数的表示、极限、积分、求根和测度等可计算性研究已经形成系统成熟的结论^[2-9]。但是, 这个新兴领域的研究目前仍然十分活跃, 还有许多具体的工作待后人来完成。

本文提出了 co regular 集的若干不等价表示式, 并对这些表示式的强弱关系进行了比较; 在此基础上对 co regular 集类上部分算子的可计算性进行了探讨。Ziegler 等^[2-3, 7] 已经对 regular 集的可计算性和算子的可计算性做出了不少结论。由于 regular 集和 co regular 集互为补集, 即分别是闭集和开集, 所以某些关于两个集合的拓扑学结论是对偶的。这就使得对于两个集合的表示和描述既可以互相借鉴但是又不可以彼此取代。

1 co regular 集的可计算性

定义 1^[2] (1) 度量空间 R^d 上的子集 R 被称为 regular 集, 当且仅当集合 R 满足 $R = \overline{R}$ 。

(2) 度量空间 R^d 上的子集 P 被称为 co regular 集, 当且仅当集合 P 满足 $P = \overline{P}$ 。

这里 $\overline{R}$ 和 R° 分别表示 R 的闭包和内部。

定义 2 设 $\mathcal{O} \subseteq P^d$ 是所有开集所组成的类, $\mathcal{A} \subseteq P^d$ 是所有闭集所组成的类:

(1) 一个闭集 $A \subseteq A$ 的 ψ 表示式 P 即 $\psi(P) = A$ 是指: 对所有与 A 相交不空的有理开立方体的编码进行枚举。一个闭集 $A \subseteq A$ 的 ψ 表示式 Q 即 $\psi(Q)$ 是指: 对所有与 A 不相交的有理闭立方体的编码进行枚举。一个闭集 $A \subseteq A$ 的 ψ 表示式

* 收稿日期: 2007-04-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60573011 14010638)

作者简介: 邱玉文 (1966 年生) 男, 博士研究生, 副教授, E-mail: qyw1122@sina.com

为: $\psi \subseteq \psi \wedge \psi$.

(2) 对开集的表示式进行定义如下^[11]:

$$\theta_<(P_i = R^d \setminus \psi(P_i) \quad \theta_>(P_i = R^d \setminus \psi(P_i) \\ \theta(P_i = R^d \setminus \psi(P))$$

即: 一个开集 $U \subseteq O$ 的 $\theta_<$ 表示式是指: 对所有包含在开集 U 内的有理闭立方体的编码进行枚举。一个开集 U 的 $\theta_>$ 表示式是指: 对所有与 $R^d \setminus U$ 交集不空的有理开立方体的编码进行枚举。一个开集 U 的 θ 表示式是指: $\theta = \theta_< \wedge \theta_>$ 。这里 “ $\wedge$ ” 表示对 $\theta_<$ 和 $\theta_>$ 表示式进行编码, 变成一个表示式。

由于 regular集是闭集而 co-regular集是开集, 所以, 如果 P 是 co-regular集 P 的 $\theta_<$ 表示式, 则 P 也是 regular集 $R = R^d \setminus P$ 的 ψ 表示式; 反之, 如果 Q 是 regular集 R 的 ψ 表示式, 则 Q 也是 co-regular集 $P = R^d \setminus R$ 的 $\theta_>$ 表示式。

引理 1 R^d 上 co-regular集的拓扑性质。

(1) 由所有 co-regular集所组成的类对有限个交集和任意个交集的内部是封闭的。即 $P_i = A^\circ$, $i \in \mathbb{I} \Rightarrow P = A^\circ$ 这里且 $P = (\bigcap_{i \in \mathbb{I}} P_i)^\circ$ 且 $A = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A$

(2) 对任意开集 U 和闭集 A $U = \bar{U}^\circ$ 且 $A^\circ = \bar{A}$ 。

(3) 一个集合 P 是 co-regular集当且仅当存在一个开集 U 使得 $P = U^\circ$ 。

(4) 一个集合 P 是 co-regular集当且仅当存在一个闭集 A 使得 $P = A^\circ$ 成立。

证明 注意到拓扑学的基本结论, $(R^d \setminus G)^\circ = R^d \setminus \bar{G}$ 和 $(R^d \setminus G) = R^d \setminus G^\circ$ 。

(1) 现证两个 co-regular集的交仍是 co-regular集:

Ziegler^[3] 已经证明对于闭集 Q 和 Q , $\overline{Q \cup Q} = \overline{(Q \cup Q)}^\circ$ 。易证对于开集 P_1 和 P_2 , $\overline{P_1 \cup P_2} = \overline{(P_1 \cup P_2)}^\circ$ 。所以, 若 P_1 和 P_2 是两个 co-regular集, 当然也都是开集, 则 $P_1 \cap P_2$ 也是一个 co-regular集。

下证 co-regular集类 P 对于任意多个集合交集的内部运算是封闭的:

先证 $P = A^\circ$ 由内部运算的单调性知 $P \subseteq A$ $P = P^\circ \subseteq A^\circ$ 。再证 $P \supseteq A^\circ$ 成立, 对每一个 i , $A \supseteq P_i$ 所以 $\bigcap_{i \in \mathbb{I}} A \supseteq A^\circ$ 并且有 $P = (\bigcap_{i \in \mathbb{I}} P_i)^\circ = (\bigcap_{i \in \mathbb{I}} A)^\circ \supseteq A^\circ$ 成立。

(2) 设 A 是一个闭集, $A^\circ \subseteq \bar{A}$ 故由内部运算的单调性可得 $A^\circ = (A^\circ)^\circ \subseteq (\bar{A})^\circ$; 另一方面 $A^\circ \subseteq A$ $\bar{A}^\circ \subseteq A = A$ 这样, $(\bar{A})^\circ \subseteq A^\circ$ 所以 $(\bar{A})^\circ \subseteq A^\circ$ 。

(3) 如果存在开集 U 满足 $P = \bar{U}^\circ$, 则有 $\bar{P} =$

$(\bar{U}^\circ) = \bar{U}$ $\bar{P}^\circ = \bar{U}^\circ = P$ 如果 P 是一个 co-regular集, 根据定义 2 令 $U = P$ 显然有 $P = \bar{U}^\circ$ 成立。

(4) 设 A 是一个闭集且 $P = A^\circ$ 则 $\bar{P} = \bar{A}^\circ$ $(\bar{A})^\circ = (\bar{A}^\circ)^\circ$; 即 P 是一个 co-regular集; 反之, 若 $P = (\bar{P}^\circ)$, 则有 $A = \bar{P}$ 是一个闭集, 满足 $A^\circ = \bar{P}^\circ = P$ 。

下面的引理 2 指出了 regular集和 co-regular集互为补集。

引理 2 设集合 P R 是度量空间 R^d 的子集, 则

(1) P 是 co-regular集当且仅当存在 regular集 R 使得 $P = R^d \setminus R$ 。

(2) P 是 co-regular集当且仅当存在一个闭集 A $A^\circ = P$ 。

证明 (1) 必要性: 设 R 是一个 regular集且 $P = R^d \setminus R$ 根据定义 1, $R = \bar{R}^\circ$ 故 $P = \bar{R}^\circ \setminus R = R^d \setminus \bar{R}^\circ$, 即 P 是一个 co-regular集。

充分性: 设 P 是一个 co-regular集, 根据定义 1, $P = P^\circ$ 。所以

$R = R^d \setminus P = R^d \setminus P^\circ = \overline{R^d \setminus P} = \overline{(R^d \setminus P)^\circ} = \bar{P}^\circ$ 即 R 是一个 regular集。

(2) 由引理 1 (2), 结论显然成立。

由上述引理可以看出: 如果 P 是一个 co-regular集, 则 P 是一个 regular集; 反之, 如果 R 是一个 regular集, 则 R 是一个 co-regular集。

为了研究 R^d 上 co-regular集 P 的可计算性, 现在对 P 的表示式进行定义。

由于 P 是一个开集, 因此可以借助开集的表示式描述 co-regular集。又因为 P 也可以看作是一个闭集 A 的内部以及 P 是一个闭集, 故也可以借助闭集的表示式描述 P 。综合对开集和闭集的各种描述, 可以定义 co-regular集的表示式如下:

定义 3 设 P 是一个 co-regular集。

(1) 由于 P 是开集, 用于描述开集的表示式 $\theta_<$ 和 $\theta_>$ 可以用来描述 P 。

(2) 由于 P 的闭包是 P 闭集, 可以使用 ψ 和 $\bar{\psi}$ 表示 P 以获得 P 的信息。把 P 的这两种表示式记作 $\bar{\psi}$ 和 $\bar{\psi}$ 。

(3) 对于任意闭集 $A \subseteq R^d$, 它的内部 $A^\circ = P$ 一定是 co-regular集。所以可以使用 ψ 和 $\bar{\psi}$ 表示 A 以获得 P 的信息。把 P 的这种表示式称为 $\bar{\psi}$ 表示式和 $\bar{\psi}$ 表示式。

(4) 一个满足 $P = \bar{U}^\circ$ 的开集 $U \subseteq R^d$, 它的 $\theta_<$ 和 $\theta_>$ 可以用来描述 co-regular集 P 。这两个表示式分别称为 P 的 $\bar{\theta}_<$ 表示式和 $\bar{\theta}_>$ 表示式。

(5) 定义 P 的 $\vartheta_{<}$ 表示式为一个有理稠密枚举 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 的编码^[2]。换句话说, P 的一个 $\vartheta_{<}$ 表示式是对集合 $P \cap Q^d$ 枚举的编码。 P 的 $\vartheta_{<}$ 表示式是 $\mathbb{R}^d \setminus P$ 的 $\vartheta_{<}$ 表示式。

(6) P 的 $\bar{\vartheta}_{<}$ 表示式是开集 U 的 $\vartheta_{<}$ 表示式, $P = U^\circ$ 。 P 的 $\bar{\vartheta}_{<}$ 表示式是 $\mathbb{R}^d \setminus P$ 的 $\bar{\vartheta}_{<}$ 表示式。

引理 3^[10] 设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个 co-regular 集, 记 $P; = (\mathbb{R}^d \setminus P)^\circ$ 。根据定义 3

(1) P 的任何一个 $\bar{\psi}$ 表示式都是 P 的 $\theta_{>}$ 表示式; 反之, P 的任何一个 $\theta_{>}$ 表示式也都是 P 的 $\bar{\psi}$ 表示式;

(2) 类似地, $\vartheta_{<}$ 和 $\vartheta_{>}$ 也具有上述关系, 反之亦然;

(3) 类似地, $\bar{\vartheta}_{<}$ 和 $\bar{\vartheta}_{>}$ 也具有上述关系; 反之亦然;

(4) 类似地, $\theta_{<}$ 和 $\bar{\psi}$ 也具有上述关系; 反之亦然;

(5) 类似地, ψ 和 $\bar{\theta}_{<}$ 也具有上述关系; 反之亦然;

(6) 类似地, $\bar{\theta}_{<}$ 和 ψ 也具有上述关系; 反之亦然。

定理 1 开集类 $\mathcal{O}$ 上的映射 $\text{COR}: \mathcal{O} \rightarrow P \mapsto \bar{P}$ 称为 co-regularization 。COR 既不是 $(\theta_{<} \wedge \theta_{>}, \theta_{<})$ 可计算的也不是 $(\theta_{<} \wedge \theta_{>}, \theta_{<})$ 可计算的。

证明 按照定义 3 $P \mapsto \bar{P}$ 是 $(\theta_{<} \wedge \theta_{>}, \theta_{<})$ 可计算的, 当且仅当 co-regular 集 P 的 $\bar{\theta}_{<}$ 表示式可转化为 $\theta_{<}$ 表示式。Hertling 在文献 [6] 的定理 4.10 中已经证明 Regularization 映射 $A \mapsto \bar{A}$ 既不是 $(\psi \wedge \bar{\psi}, \psi)$ 可计算的又不是 $(\psi \wedge \bar{\psi}, \bar{\psi})$ 可计算的。根据命题 1, 可得 COR 既不是 $(\theta_{<} \wedge \theta_{>}, \theta_{<})$ 可计算的也不是 $(\theta_{<} \wedge \theta_{>}, \theta_{<})$ 可计算的。

定理 2 设 $\gamma \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是一个有理稠密枚举^[2]:

$$(1) \theta_{<} \leq \bar{\theta}_{<} \leq \bar{\psi} \leq \psi \leq \bar{\vartheta}_{<};$$

$$(2) \theta_{<} \leq \vartheta_{<} \leq \bar{\psi};$$

$$(3) \bar{\psi} \leq \psi \leq \theta_{>} \leq \bar{\theta}_{>} \leq \bar{\vartheta}_{>};$$

$$(4) \bar{\psi} \leq \vartheta_{>} \leq \theta_{>};$$

$$(5) \bar{\theta}_{<} \leq \bar{\theta}_{>}, \psi \leq \bar{\theta}_{>}.$$

证明 (1) $\theta_{<} \leq \bar{\theta}_{<}$ 根据定义 3, 一个 co-regular 集 P 的 $\theta_{<}$ 表示式都可以看作是它的 $\bar{\theta}_{<}$ 表示式。

$\bar{\theta}_{<} \leq \bar{\psi}$ 一个 co-regular 集 P 的 $\bar{\theta}_{<}$ 表示式即为一个开集 U 的 $\theta_{<}$ 表示式, 这里 U 满足 $P = U^\circ$ 。Weihrauch 已经证明^[1], 算子 $\text{CLS}: U \mapsto U$ 是 $(\theta_{<},$

$\psi)$ 可计算的。于是, 对于开集 U 来说, 它的 $\theta_{<}$ 表示式可以转化为 U 的 ψ 表示式。这样根据 $U = P$ 就证明了 co-regular 集 P 的 $\bar{\theta}_{<}$ 表示式可以转化为它的 $\bar{\psi}$ 表示式。

$\bar{\psi} \leq \psi_{<}$ 闭集 A 满足 $A^\circ = P$ 所以 P 的每个 $\bar{\psi}$ 表示式都可以同时看作是它的 $\psi_{<}$ 表示式。

$\psi_{<} \leq \bar{\vartheta}_{<}$ 一个 co-regular 集 P 的 $\psi_{<}$ 表示式是闭集 A 的 ψ 表示式, 这个 A 满足 $A^\circ = P$ 。在文献 [1] 的定理 5.1.10 中, 已经证明闭集 A 的 ψ 表示式可以转化为一个有理枚举 $Q \subseteq Q^d$ 使得 $Q = A$ 可得 Q 是 P 的 $\bar{\vartheta}_{<}$ 表示式。

(2) $\theta_{<} \leq \vartheta_{<}$ 根据定义 $\text{dm}(\gamma)$ 是递归可枚举的而 $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow Q^d$ 是 $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 可计算的向量函数^[3], 所以从 $\theta_{<}$ 表示式所枚举的有理开立方体中写出一个有理向量 (即中心点的坐标) 是能行的。而 P 的一个表示式可转化为恰好覆盖 P 的所有开立方体的枚举。这样, 我们就能获得 co-regular 集 P 的一个稠密枚举。即满足 $\forall m \in P \cap Q^d$ 的所有 m 。

$\vartheta_{<} \leq \bar{\psi}$ 由于 $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow Q^d$ 是 $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 是可计算的向量函数^[10], 将限 γ 制在 P 上得 $M = \{m \mid m \in \text{dm}(\gamma)\}$ 上, 则有 $\gamma \upharpoonright M = P$ 根据定义, 即把 P 的一个 co-regular 集 P 的 $\vartheta_{<}$ 表示式转化成了 P 的 $\leq \bar{\psi}$ 表示式。

(3) 由 (1) 和引理 3 易得所证结论。

(4) 由 (2) 和引理 3 易得所证结论。

(5) $\bar{\theta}_{<} \leq \bar{\vartheta}_{>}$ co-regular 集 P 的 $\bar{\theta}_{<}$ 表示式是包含在开集 U 的所有有理闭立方体 I_k 的枚举, 这里 U 满足 $U^\circ = P$ 一个有理点 $\in Q \subseteq (\mathbb{R}^d \setminus P)^\circ \cap Q^d$ 当且仅当存在着一个 $k \in \mathbb{N}$ $B(r \cdot 2^{-k}) \cap I_k = \emptyset$ 。因此, 存在一个图灵机 M 输入 P 的任意一个 $\bar{\theta}_{<}$ 表示式, 对所有的自然数 $k \in \mathbb{N}$ 进行测试, 对满足条件 $B(r \cdot 2^{-k}) \cap I_k$ 的输出, 可以得到 P 的表示式 Q $\bar{Q}^\circ = (\mathbb{R}^d \setminus P)^\circ$ 。

$\bar{\psi} \leq \bar{\vartheta}_{>}$ 由引理 3 $\bar{\theta}_{>}$ 和 $\bar{\vartheta}_{>}$ 易得所证结论。

定理 3 记 $\text{Int}: A \mapsto P$ $A \mapsto A^\circ$ 为内部算子 (Interior Operator)。则

(1) Int 是 $(\psi, \psi_{<})$ 可计算的和 $(\psi, \bar{\psi})$ 可计算的。

(2) Int 是 $(\psi, \bar{\psi})$ 不连续的且 $(\psi, \bar{\psi})$ 不连续的。

(3) Int 是 $(\psi, \vartheta_{<})$ 不连续的且 $(\psi, \vartheta_{>})$ 不连续的。

(4) Int 是 $(\psi, \bar{\vartheta}_{<})$ 可计算的和 $(\psi, \bar{\vartheta}_{>})$ 可计算的。

证明 (1) 根据引理 2, (2) 一个集合 P 是

co.regular集, 当且仅当存在一个闭集 A $A^\circ = P$. 按照定义 3 闭集 A 的 $\psi_<$ 表示式是 co.regular集 A° 的 $\psi_<^\circ$ 表示式. 这就证明了算子 Int 是 $(\psi_<, \psi_<^\circ)$ 可计算的和 $(\psi_<, \psi_>)$ 可计算的.

(2) 对任何闭集 A 来说, $\overline{A^\circ}$ 是 regular集合. 根据 regular集合的表示式的定义^[2], A 的 $\overline{\psi_<}$ 表示式正是闭集 A 的 $\overline{\psi_<^\circ}$ 表示式. 在文献 [6] 里, Hertling已经证明了 regularization映射 $\text{RE}: A \mapsto \overline{A^\circ}$ 是 $(\psi_<, \psi_<^\circ)$ 不连续和 $(\psi_<, \psi_>)$ 不连续的. 结论得证.

(3) 设 A° 是 co.regular集 A 是闭集, A 的一个 $\psi_<$ 表示式按照引理 3 是 A° 的一个 $\psi_<^\circ$ 表示式. 在定理 2 中已经证明了 $\psi_<^\circ$ 不可转化为 $\vartheta_<$ 以及 $\psi_<$ 不可转化为 $\vartheta_>$.

(4) 在定理 2 中, 已经证明了 $\psi_<^\circ \leq \overline{\vartheta_>}$ 和 $\psi_< \leq \overline{\vartheta_>}$.

2 结 论

(1) 本文提出 co.regular集的若干表示式, 并对这些表示式的强弱进行了探讨. 研究结果: $\eta_< = \vartheta_< \wedge \overline{\psi_<}$ 是 co.regular集所有表示式中最强的. 这些结论是 co.regular集和 regular集上可计算算子研究的基础.

(2) 基于论文提出的表示式, 对 co.regularization和补集的内部化等算子的可计算性给出了较强的结论.

(3) 限于篇幅的限制, 本文尚没有指出在众多的表示式之中, 哪个表示式是被准许的^[1].

(4) 本文虽然对不同表示式的强弱做了比较, 但是逆关系的推导和证明并没有写出.

作者将在今后的工作中, 提出并证明这些结

论, 并对 co.regular集上的其它算子如交, 并等运算进行可计算性探讨.

致谢: 衷心感谢 Norbert Th. Muller, 郑锡忠和 Robert Rettinger三位教授的悉心指导.

参考文献:

- [1] WEHRAUCH K. Computable analysis [M]. Springer 2000
- [2] ZIEGLER M. Computability on regular subsets of Euclidean spaces [J]. Math Log Quart 2002 48: 157—181.
- [3] ZIEGLER M. Computable operators on regular subsets [J]. Math Log Quart 2004 50: 392—404.
- [4] VASCO B, GERO P. Computability on subsets of metric spaces [J]. Theoretical Computer Science 2003 305: 43—76.
- [5] ABBAS E. Computable Banach spaces via domain theory [J]. Theoretical Computer Science 1994 219: 169—184.
- [6] HERTLING P. An effective Riemann mapping theorem [J]. Theoretical Computer Science 1999 219: 225—265.
- [7] ZIEGLER M. Turing computability of (Non-) linear Optimization [J] // Proceedings of the Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG2001), 2002: 181—184.
- [8] KUMMER M. Computability of convex sets [J] // Proceedings of the STACS/Springer LNCS900 1995: 550—561.
- [9] QIU Y W, ZHAO X S. Representations of co.regular subsets on Euclidean spaces [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics 2007 22: 252—257.
- [10] GRZEGORCZYK A. Computable functionals [J]. Fund Math 1995 42: 168—202.

Computability of Co.regular Subsets on Metric Spaces

QIU Yuwen, ZHAO Xi-shun

(Institute of Logic and Cognition, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Concepts and results will be represented in “Type2 Theory of Effectivity”, which is the best framework of computable analysis. For co.regular subsets in metric spaces, several reasonable representations and its induced computability have been suggested. With respect to reducibility, there is a order for those distinct basic notions. It has also been shown that $\eta_< = \vartheta_< \wedge \overline{\psi_<}$ is the strongest representation among the distinct representations.

Key words: type2 theory of effectivity; computability; representations; co.regular subset