具有两个时滞之和的连续系统时滞相关稳定性*

赵立英[1]，刘 坤[2]，刘贺平[2]
（1. 北京科技大学 应用科学学院，北京 100083；
2. 北京科技大学 信息工程学院，北京 100083）

摘 要：针对一类状态向量中含有两个时滞之和的连续系统，研究了其时滞相关稳定性问题。借助于积分不等式，获得了使系统稳定的、基于线性矩阵不等式的时滞相关充分条件，不需要对原系统进行模型变换。最后通过数值算例验证了设计方法的有效性。

关键词：时滞和；时滞相关；积分不等式；线性矩阵不等式
中图分类号：TP13 **文献标识码**：A **文章编号**：0529-6579（2008）01-0026-03

时滞现象经常出现在各种工程、生物和经济系统中，时滞常常是导致系统不稳定和影响系统性能的一个重要原因。因此，其研究在过去数十年得到了许多学者的广泛关注。

最常见的时滞系统为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - d(t)) \tag{1}$$

其中 $d(t)$ 为系统的状态时滞，满足 $0 \leqslant d(t) \leqslant \bar{d} < \infty, \dot{d}(t) \leqslant \tau < \infty$。

许多关于时滞系统的研究成果都是基于系统（1）提出的，见文献［1-6］。在这种系统中，状态时滞是一种单一的或简单的形式。然而，有时在实际应用中，信号从一点传送到另一点可能要经过一些网络节点，这些节点在网络传播过程中可能会导致一些具有不同特性的时滞出现。例如图 1 所示的网络化控制系统。

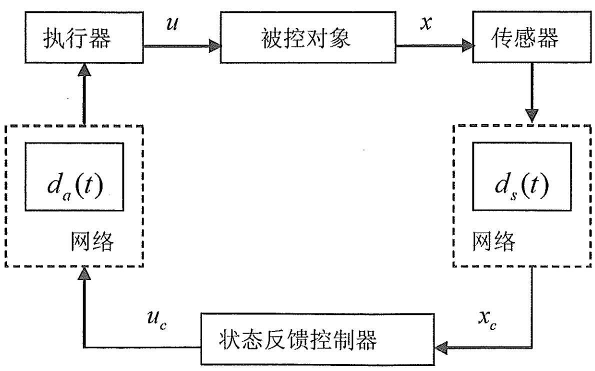

图 1 网络化控制系统
Fig. 1 Networked control system

图 1 中存在两个时滞：传感器和控制器之间的通信时滞 $d_s(t)$，控制器和执行器之间的通信时滞 $d_a(t)$。在网络传播过程中两个时滞的特性并不完全相同，所以不能把它们合到一起来研究。因此，当被控对象和状态反馈控制器分别以 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 和 $u_c(t) = Kx_c(t)$ 的形式给出时，闭环系统为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - d_s(t) - d_a(t)) \tag{2}$$

系统（2）和系统（1）的不同之处就是在状态变量 $x(t)$ 中存在两个时滞，并且这两个时滞满足如下的关系

$$0 \leqslant d_s(t) < \bar{d}_s < \infty, \dot{d}_s(t) \leqslant \tau_s < \infty,$$
$$0 \leqslant d_a(t) < \bar{d}_a < \infty, \dot{d}_a(t) \leqslant \tau_a < \infty \tag{3}$$

1 问题描述

考虑如下时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - d_1(t) - d_2(t)) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\bar{d}, 0] \end{cases} \tag{4}$$

其中 $x(t) \in R^n$ 是系统的状态向量，$d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 是系统状态的两个时滞部分，满足

$$0 \leqslant d_1(t) < \bar{d}_1 < \infty, \dot{d}_1(t) \leqslant \tau_1 < \infty,$$
$$0 \leqslant d_2(t) < \bar{d}_2 < \infty, \dot{d}_2(t) \leqslant \tau_2 < \infty \tag{5}$$

并且 $\bar{d} = \bar{d}_1 + \bar{d}_2$。

本文的目的是设计时滞相关稳定条件使得系统（4）的平凡解对于满足（5）式的时滞 $d_1(t)$、$d_2(t)$ 是渐近稳定的。为此，做如下符号说明：

$P > 0$ 表示 P 为对称正定阵；$P > Q$ 表示 $P - Q$

* **收稿日期**：2007-10-13
基金项目：国家自然科学基金资助项目（50476083）
作者简介：赵立英（1965 年生），女，副教授；E-mail：liyingzhao0909@126.com

为对称正定阵；‖ · ‖ 表示向量的 Euclid 范数；$\lambda_{max}(A)$ 表示矩阵 A 的最大特征值；矩阵中的 “ * ” 表示对称矩阵的对称项。

2　主要结果及证明

定理 如果存在矩阵 $P>0$，$Q_1>Q_2>0$，$Q_3>Q_4>0$，$Z_1>Z_2>0$，$Z_3>Z_4>0$ 以及适当维数的矩阵 M_{i1}，M_{i2}（$i=1,\cdots 4$）使得以下线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & -M_{11}^T+M_{12} & -M_{31}^T+M_{32} & PB & A^T\Pi_{55} & \bar{d}_1M_{11}^T & 0 & \bar{d}_2M_{31}^T & 0 \\ * & \Pi_{22} & 0 & -M_{21}^T+M_{22} & 0 & \bar{d}_1M_{12}^T & \bar{d}_2M_{21}^T & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & -M_{41}^T+M_{42} & 0 & 0 & 0 & \bar{d}_2M_{32}^T & \bar{d}_1M_{41}^T \\ * & * & * & \Pi_{44} & B^T\Pi_{55} & 0 & \bar{d}_2M_{22}^T & 0 & \bar{d}_1M_{42}^T \\ * & * & * & * & -\Pi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{d}_1Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \bar{d}_2Z_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \bar{d}_2Z_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \bar{d}_1Z_4 \end{bmatrix}<0 \qquad (6)$$

其中
$$\Pi_{11}=PA+A^TP+Q_1+Q_3+M_{11}^T+M_{11}+M_{31}^T+M_{31}$$
$$\Pi_{22}=-(1-\tau_1)(Q_1-Q_2)-M_{12}^T-M_{12}+M_{21}^T+M_{21}$$
$$\Pi_{33}=-(1-\tau_2)(Q_3-Q_4)-M_{32}^T-M_{32}+M_{41}^T+M_{41}$$
$$\Pi_{44}=-(1-\tau_1-\tau_2)(Q_2+Q_4)-M_{22}^T-M_{22}-M_{42}^T-M_{42}$$
$$\Pi_{55}=\bar{d}_1Z_1+\bar{d}_2Z_2+\bar{d}_2Z_3+\bar{d}_1Z_4$$
则系统（4）的平凡解是渐近稳定的。

证明　取 Lyapunov 函数为
$$V(x(t),t)=V_1(x(t),t)+V_2(x(t),t)+V_3(x(t),t)+V_4(x(t),t)+V_5(x(t),t)$$
其中
$$V_1(x(t),t)=x^T(t)Px(t),$$
$$V_2(x(t),t)=\int_{t-d_1(t)}^{t}x^T(\theta)Q_1x(\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{t-d_1(t)-d_2(t)}^{t-d_1(t)}x^T(\theta)Q_2x(\theta)\mathrm{d}\theta,$$
$$V_3(x(t),t)=\int_{-\bar{d}_1}^{0}\int_{t+r}^{t}\dot{x}^T(\theta)Z_1\dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r+\int_{-\bar{d}_1-\bar{d}_2}^{t-\bar{d}_1}\int_{t+\tau}^{t}\dot{x}^T(\theta)Z_2\dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau,$$
$$V_4(x(t),t)=\int_{t-d_2(t)}^{t}x^T(\theta)Q_3x(\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{t-d_1(t)-d_2(t)}^{t-d_2(t)}x^T(\theta)Q_4x(\theta)\mathrm{d}\theta,$$
$$V_5(x(t),t)=\int_{-\bar{d}_2}^{0}\int_{t+r}^{t}\dot{x}^T(\theta)Z_3\dot{x}(\theta)\mathrm{d}r+\int_{-\bar{d}_1-\bar{d}_2}^{-\bar{d}_2}\int_{t+\tau}^{t}\dot{x}^T(\theta)Z_4\dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau,$$
式中为满足（6）式中的矩阵。

由文献［11］，知道 $V_i(x(t),t)(i=1,2,3,4,5)$ 是正定的。

令 $\xi(t)=[x^T(t)\quad x^T(t-d_1(t))\quad x^T(t-d_2(t))\quad x^T(t-d_1(t)-d_2(t))]$，对 $V(x(t),t)$ 沿着系统（4）的轨线求导，并应用文献［7］中的引理 1，整理可得

$$\dot{V}(x(t),t)\leqslant\xi^T(t)\cdot\begin{bmatrix} \Pi_{11} & -M_{11}^T+M_{12} & -M_{31}^T+M_{32} & PB \\ * & \Pi_{22} & 0 & -M_{21}^T+M_{22} \\ * & * & \Pi_{33} & -M_{41}^T+M_{42} \\ * & * & * & \Pi_{44} \end{bmatrix}\xi(t)+$$
$$x^T(t)\Pi_{55}x(t)+\bar{d}_1\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d_1(t)) \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} M_{11}^T \\ M_{12}^T \end{bmatrix}Z_1^{-1}\cdot[M_{11}\quad M_{12}]\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d_1(t)) \end{bmatrix}+\bar{d}_2\begin{bmatrix} x(t-d_1(t)) \\ x(t-d_1(t)-d_2(t)) \end{bmatrix}^T\cdot$$
$$\begin{bmatrix} M_{21}^T \\ M_{22}^T \end{bmatrix}Z_2^{-1}[M_{21}\quad M_{22}]\begin{bmatrix} x(t-d_1(t)) \\ x(t-d_1(t)-d_2(t)) \end{bmatrix}+$$
$$\bar{d}_2\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d_2(t)) \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} M_{31}^T \\ M_{32}^T \end{bmatrix}Z_3^{-1}[M_{31}\ M_{32}]\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d_2(t)) \end{bmatrix}+$$
$$\bar{d}_1\begin{bmatrix} x(t-d_2(t)) \\ x(t-d_1(t)-d_2(t)) \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} M_{41}^T \\ M_{42}^T \end{bmatrix}Z_4^{-1}[M_{41}\quad M_{42}]\cdot\begin{bmatrix} x(t-d_2(t)) \\ x(t-d_1(t)-d_2(t)) \end{bmatrix}\triangleq\xi^T(t)\Omega\xi(t)$$

对（6）式应用 Schur 补性质[8]，可以得出 $\Omega<0$，所以 $\lambda_{\max}(\Omega)<0$。于是
$$\dot{V}(x(t),t)\leqslant\xi^T(t)\Omega\xi(t)\leqslant\lambda_{\max}(\Omega)\|x(t)\|^2$$
令 $\varepsilon=-\lambda_{\max}(\Omega)$，则 $\varepsilon>0$，从而有 $\dot{V}(x(t),t)\leqslant-\varepsilon\|x(t)\|^2$，所以系统（4）的平凡解是渐近稳定的。

3　数值算例

考虑时滞系统（4），其中：

$$A=\begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.09 \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\dot{d}_1(t)\leqslant$$

0.1, $\dot{d}_2(t) \leqslant 0.8$。利用定理以及 Matlab 软件中的 LMI 工具箱，可得（表1，表2）：

表1　给定时滞界 $\bar{d}_1$，$\bar{d}_2$ 时滞界的最大值的比较

Tab. 1　Delay bound $\bar{d}_2$ for given $\bar{d}_1$

$\bar{d}_1$ / $\bar{d}_2$ 最大值	1	1.1
文献[9]	0.180	0.080
文献[10]	0.180	0.080
本文定理	0.232	0.124

表2　给定时滞界，$\bar{d}_2$ 时滞界 $\bar{d}_1$ 的最大值的比较

Tab. 2　Delay bound for given

$\bar{d}_2$ / $\bar{d}_1$ 最大值	0.1	0.2	0.3
文献[9]	1.080	0.980	0.080
文献[10]	1.080	0.980	0.880
本文定理	1.261	1.034	0.902

4　结　论

本文利用积分不等式讨论了一类状态向量中含有两个时滞之和的连续系统的时滞相关稳定性，获得了基于 LMI 的时滞相关稳定充分条件。没有对原系统进行模型变换，得到的结论较已有文献具有较小的保守性。

参考文献：

[1] HE Yong, WANG Qingguo, XIE Lihua, et al. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(2): 293 – 299.

[2] XU Shengyuan, JAMES L. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(3): 384 – 387.

[3] LEE Y S, MOON Y S, KWON W H, et al. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay [J]. Automatica, 2004, 40(1): 65 – 72.

[4] XU Shengyuan, JAMES L, ZOU Yun. New results on delay-dependent robust H_∞ control for systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2006, 42(2): 343 – 348.

[5] KWON O M, PARK J H. On improved delay-dependent robust control for uncertain time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(11): 1991 – 1995.

[6] LIN Chong, WANG Qingguo, LEE T H. A less conservative robust stability test for linear uncertain time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(1): 87 – 91.

[7] 吴敏，张先明，佘锦华. 线性时滞系统的时滞相关鲁棒控制[J]. 控制理论与应用，2005，22(4)：619 – 622.
WU Min, ZHANG Xianming, SHE Jinhua. Delay dependent robust control for linear time-delay uncertain systems [J]. Control Theory and Applications, 2005, 22(4): 619 – 622.

[8] 俞立. 鲁棒控制 – 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京：清华大学出版社，2003.
YU Li. Robust control-linear matrix inequality approach [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.

[9] JING X J, TAN D L, WANG Y C. An LMI approach to stability of systems with severe time-delay [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(7): 1192 – 1195.

[10] WU Min, HE Yong, SHE Jinhua, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems [J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435 – 1439.

[11] 肖伸平，吴敏，张先明. 不确定时滞系统的时滞相关非脆弱鲁棒 H_∞ 控制[J]. 系统科学与数学，2007，27(3)：401 – 411.
XIAO Shenping, WU Min, ZHANG Xianming. Non-fragile delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems[J]. Journal of Systems Science and Mathematics Science, 2007, 27(3): 401 – 411.

Delay-dependent Stability for Systems with Two Additive Time-varying Delay Components

ZHAO Li-ying[1], *LIU Kun*[2], *LIU He-ping*[2]

(1. Applied Science School, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;
2. Information and Engineering School, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: The delay-dependent stability for continuous systems with two additive time-varying delay components is studied. By incorporating with the integral inequality, a LMI approach is used to derive a delay-dependent sufficient condition, which can guarantee that the system is asymptotically stable. The model transformation is unnecessary. A numerical example suggests that the proposed design method is effective.

Key words: additive delay components; delay-dependent; integral inequality; LMI