基于支持向量回归的响应面可靠度计算*

刘济科，赵　卫
（中山大学应用力学与工程系，广东 广州 510275）

摘　要：针对可靠度计算问题中极限状态函数比较复杂或为隐式的情况，提出了一种基于支持向量回归的响应面可靠度计算方法。该方法通过支持向量回归来拟合极限状态函数，所得函数偏导数计算简单，便于进一步采用常规的一次或二次可靠度方法进行求解。该方法首先用拉丁超立方抽样方法产生训练所需样本，通过支持向量回归构造极限状态函数的替代函数，然后用可靠度计算中比较常用的梯度优化法计算其可靠指标或失效概率。算例结果证明了该方法的可靠性和有效性。

关键词：支持向量回归；响应面；可靠度计算；梯度优化法
中图分类号：O342；TU323　**文献标识码：**A　**文章编号：**0529-6579（2008）01-0001-04

对于实际工程的复杂结构可靠度计算问题，用于判断结构或部件等行为失效的极限状态函数往往不具有明确的解析表达式，或者呈现高度的非线性化状态。针对这一类可靠度计算问题，一种回归拟合极限状态函数曲面的方法——响应面方法（Response Surface Method）为工程界所广泛采用[1-3]。响应面方法是将数学方法和统计方法相结合的产物，它通过回归拟合解析表达式 $\bar{Z} = \bar{G}(X)$ 来代替真实极限状态函数曲面 $Z = G(X)$ 进行可靠度的计算，这样就避免了采用一次或二次可靠度方法（FORM 或 SORM）不易求取极限状态函数对随机变量的偏导数的问题，使可靠度计算得到简化。但是，目前常用的响应面方法一般采用一次或二次多项式来拟合或逼近极限状态函数，显然在极限状态函数曲面非线性化程度较高时，这种方法并不能很好地逼近极限状态函数，从而会导致后续采用一次或二次可靠度方法进行可靠度计算的精度不高或误差较大。

本文提出了一种基于支持向量回归[3-6]（Support Vector Regression，SVR）的响应面方法，将隐式的极限状态函数用逼近的显式函数来代替。由于支持向量回归方法理论上能以任意精度逼近函数曲面，因而不存在常规响应面方法多项式如何选择以提高精度的问题，并且求解随机变量的偏导数比较简单。本文方法首先采用支持向量回归的方法逼近极限状态函数，然后用常规的一次或二次方法计算可靠度。

1　支持向量机及支持向量回归

支持向量机（support vector machines，SVM）是 AT&T Bell 实验室的 Vapnik 于20世纪90年代提出来的，是一种建立在统计学习理论基础上的机器学习方法。已经广泛应用于模式识别，回归分析和函数拟合等问题中，并且有一套坚实的理论基础[7-9]，下面是 ε - SVR 支持向量回归的基本原理。

假定给定一个训练样本集：$S = ((x_1, y_1), \cdots, (x_1, y_1)) \subseteq (X \times Y)^l$，这里 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，对于两类分类问题 $Y = \{-1, 1\}$，对于 m 类分类问题 $Y = \{1, 2, \cdots, m\}$，而对于回归问题 $Y \subseteq \mathbb{R}$，l 为训练样本的数目。

对于 f 可以采用下式来估计函数：

$$f(x) = \omega^T \phi(x) + b \tag{1}$$

对于 f 为线性函数的情况，引入估计误差 ε 后可以转化为对偶问题：

$$\min \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i - \alpha_i^*)(\alpha_j - \alpha_j^*)x_i^T x_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i(\varepsilon - y_i) + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i^*(\varepsilon + y_i)$$

$$s.t. \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{l}(\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 \\ \alpha_i, \alpha_i^* \in [0, C] \end{cases} \tag{2}$$

其中，α_i，α_i^* 为 Lagrange 乘子，α_i，$\alpha_i^* \geq 0$。引入核函数后，

* **收稿日期：**2007-07-06
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10772202）；广东省自然科学基金资助项目（07003680）
作者简介：刘济科（1967年生），男，博士，教授，博士生导师；E-mail：liujike@mail. sysu. edu. cn

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l}(\alpha_i - \alpha_i^*)K(x_i,x) + b \quad (3)$$

其中 $K(x_i,x)$ 为核函数。常用的核函数有：线性核 $K(x_i,x_j) = x_i^T x_j$，多项式核 $K(x_i,x_j) = (\gamma x_i^T x_j + r)^d$，高斯核 $K(x_i,x_j) = \exp(-\gamma \| x_i - x_j \|^2)$ 和双曲正切核 $K(x_i,x_j) = \tanh(\gamma x_i^T x_j + r)$ 等。

2 基于支持向量回归的响应面法

采用支持向量回归逼近极限状态函数的第一步是构造用于训练的样本集，本文采用 Latin Hypercube（LH）抽样方法[7-9]。

2.1 拉丁超立方抽样（Latin Hypercube Sampling, LHS）

设 N 为要实现的样本数目，n 为随机变量数目。拉丁超立方抽样将随机变量 X_j 的定义域等概率地划分为 N 个区间，第 i 个样本 X_j^i 根据以下表达式根据累积分布函数产生：

$$X_j^i = F_j^{-1}[(i-1+U)/N]$$
$$i = 1,2,\cdots,N \quad j = 1,2,\cdots,n \quad (4)$$

其中 F_j^{-1} 是 F_j 的反函数，U 是在（0，1）上服从均匀分布的独立随机变量。然后就建立了一个 $N \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{P}$。在其每一行（即一个样本）被代入极限状态函数之前，要对 $\boldsymbol{P}$ 的每一列进行调整，并消除虚假的相关关系，可参考文献［7-9］。

2.2 基于支持向量回归的极限状态函数逼近

考虑到随机变量的参数选取范围可能相差较大，为加快训练的速度，需要对拉丁超立方抽样所产生的样本进行预处理。设随机变量所对应的向量为 $X =(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，$G$ 为极限状态函数相应的取值，这里对这些参数进行如下缩放至［-1 1］范围内，缩放后的参数分别记为 $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 和 $\bar{G}$。那么，它们之间满足如下关系式：

$$\frac{X_i - X_{i,\min}}{X_{i,\max} - X_{i,\min}} = \frac{Y_i + 1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{G - G_{\min}}{G_{\max} - G_{\min}} = \frac{\bar{G} + 1}{2} \quad (6)$$

其中 $X_{i,\min}$，$G_{\min}$，$X_{i,\max}$ 和 $G_{\max}$ 分别为所有样本中 X_i 和 G 的最小值和最大值。经过支持向量机训练后可得如下式：

$$\bar{G}(Y) = \sum_{i=1}^{l}(\alpha_i - \alpha_i^*)K(Y^{(i)},Y) + b \quad (7)$$

其中 $Y^{(i)}$ 表示训练所得的第 i 个支持向量。

3 可靠度的计算

3.1 梯度优化法

计算可靠指标的几何含义是求均值点到失效边界的最短距离，而设计验算点就是失效边界上距均值点最近的点。若基本随机变量是不相关的，可首先将其转换为标准正态分布变量，然后在标准正态变量空间内计算可靠指标，这一计算过程可归结为约束优化问题进行求解[1-3]，具体求解过程如下：

设基本变量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为相互独立的正态变量（对于非正态变量与非独立变量的情况可以通过 Rosenblatt 变换[10]来进行转换），通过变换：

$$U = T(X) = \frac{X - AVER}{SD} \quad (8)$$

可以得到一组相互独立的标准正态变量 $U = (U_1, U_2, \cdots, U_n)$，其中 $AVER$ 和 SD 分别向量 X 对应的均值和方差向量。于是极限状态函数也可转换到标准正态空间，即

$$g(X) = g[R(X), S(X)] =$$
$$g\{R[T^{-1}(U)], S[T^{-1}(U)]\} = G(U) \quad (9)$$

采用迭代的方法可以确定极限状态面 $G(U) = 0$ 上距原点最近的点 U^*，然后计算结构的可靠指标：

$$\beta = \sqrt{U^*(U^*)^T} \quad (10)$$

并由式

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) \quad (11)$$

计算结构的失效概率。

采用如下的迭代格式：

$$U_{i+1} = \left(U_i \alpha_i^T + \frac{G(U_i)}{\| \nabla G(U_i) \|}\right)\alpha_i \quad (12)$$

可以确定验算点 U^*。式中

$$\nabla G(U) = \left(\frac{\partial G(U)}{\partial U_1}, \frac{\partial G(U)}{\partial U_2}, \cdots, \frac{\partial G(U)}{\partial U_n}\right) \quad (13)$$

是梯度向量，而

$$\alpha = -\frac{\nabla G(U)}{\| \nabla G(U) \|} \quad (14)$$

是沿着负梯度方向的单位向量，它垂直于极限状态面，其指向背离坐标原点。一般经过有限次的循环迭代计算，序列 U_i 便收敛于极限状态面上距原点最近的点 U^*，并能达到所需的精度。

3.2 本文方法

本文采用高斯核函数对极限状态函数进行了支持向量回归估计，将高斯核函数代入（7）式可得

$$\bar{G}(Y) = \sum_{i=1}^{l} c_i \exp(-\gamma \| Y - Y^{(i)} \|^2) + b \quad (15)$$

从而得到原极限状态函数的替代函数。根据支持向量机的基本原理，该函数对原函数的逼近可以通过调整样本容量和训练时的样本值的估计精度 ε 以及容差 ε' 来达到任意的精度。由（15）式得

$$\frac{\bar{G}(Y)}{\partial Y_j} = \sum_{i=1}^{l} -2c_i\gamma\exp(-\gamma \| Y - Y^{(i)} \|^2) \cdot$$

$$(Y_j - Y_j^{(i)}) \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{16}$$

从而，由（5），（6），（8）和（16）式可得：

$$\frac{\partial G(X)}{\partial U_j} = \frac{\partial G}{\partial Y_j}\frac{\partial Y_j}{\partial U_j} =$$

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{G}}\frac{\partial \bar{G}}{\partial Y_j}\frac{\partial Y_j}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial U_j} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial Y_j}\frac{(G_{\max} - G_{\min})SD_i}{X_{j,\max} - X_{j,\min}} =$$

$$\sum_{i=1}^{l} - 2c_i\gamma\exp(-\gamma \| Y - Y^{(i)} \|^2) \cdot$$

$$(Y_j - Y_j^{(i)})\frac{(G_{\max} - G_{\min})SD_i}{X_{j,\max} - X_{j,\min}}$$

$$(j = 1,2,\cdots,n) \tag{17}$$

取支持向量机估计精度 $\varepsilon = 0.001$ 以及容差 $\varepsilon' = 0.0001$，计算可靠度的整个过程可归纳如下：

（1）用拉丁超立方抽样方法构造训练集；

（2）用支持向量回归方法根据训练集获得逼近极限状态函数的显式函数；

（3）取 U 初值为0，根据(17)式计算各偏导数；

（4）代入（12）－（14）迭代直至收敛到满意的精度；

（5）根据（10），（11）式计算可靠指标、可靠度或失效概率。

4 计算实例及讨论

本文选取了如下两个非线性算例，按照上述方法用 LIBSVM[11]工具训练支持向量，构造极限状态函数的替代函数，对可靠度指标及失效概率进行了计算，并和其它方法的结果进行比较如下。

表 1 算例 1 的可靠指标及失效概率

Tab. 1 Reliability index and failure probability of numerical example 1

样本数 N	可靠指标 β		失效概率($P_f \times 10^{-3}$)	
	本文方法	常规梯度优化法	本文方法	常规梯度优化法
10*	2.4849	2.872	6.4794	2.0394
20*	2.5848		4.8718	
30*	2.7545		2.9391	
50	2.7747		2.7626	
100	2.8705		2.0491	
200	2.8442		2.2261	
300	2.9124		1.7933	
400	2.8540		2.1586	
500	2.8592		2.1236	
600	2.8650		2.0850	

算例 1 有一圆截面直杆，其承受拉力 $P = 100$ kN，设杆的直径 d 和材料的应力屈服极限 F_y 为随机变量，其均值和标准差分别为：$m_d = 3$ cm，$\sigma_d = 0.3$ cm，$m_{F_y} = 29\ 000$ N/cm^2，$\sigma_{F_y} = 2\ 500$ N/cm^2。

表 2 算例 2 的可靠指标及失效概率

Tab. 2 Reliability index and failure probability of numerical example 2

样本数 N	可靠指标 β		失效概率($P_f \times 10^{-3}$)	
	本文方法	常规梯度优化法	本文方法	常规梯度优化法
100*	11.6001	2.541	0	5.5268
200	4.6505		0.001655	
300	2.3388		9.6729	
400	2.5380		5.5744	
500	2.5395		5.5506	

算例 2 设极限状态方程为

$$G(Y) = C + \sum_{i=1}^{n} \ln[\Phi(-Y_i)] = 0$$

其中，$Y_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为相互独立的标准正态随机变量。当 n 和 C 的值分别取为 2 和 6.648 5 时计算结构的失效概率[12]。

从表 1，2 中可以看出，当样本数较少时，本文方法和常规梯度优化法所得结果相差相对较大，随着样本数量的增加，逐渐趋近于常规梯度优化方法的结果；计算过程中发现，当样本数量较少时（表中标 * 的样本），结果并不能收敛到确定值，因此本文这里取相邻两次计算所得结果变化较小的作为计算结果，当达到一定数量的样本后，则可以收敛。这说明支持向量回归方法对极想状态函数的拟合精度提高了。从表 1 中还可以看出，样本数达到一定数量后（如表 1 中的 100、200、300 和 400 等），虽然总体上接近常规梯度优化法计算结果，但是还不能收敛到一个确定值，这主要是由样本的随机性所引起的。对比表 2 和表 1 可知，由于算例 2 的极限状态函数非线性化程度相比算例 1 更高，因此算例 2 达到较准确的结果需要更多的样本。

5 结 论

本文提出了一种基于支持向量回归的响应面可靠度计算方法，该方法可以较好地拟合极限状态函数，求解随机变量的偏导数比较简单。对于极限状态函数比较复杂——主要是偏导数不容易计算，或者极限状态函数为隐函数的情况，在目前支持向量机相关理论与应用日益成熟的情况下，本文提供了一条新的计算可靠度的途径。

参考文献：

[1] 武清玺. 结构可靠性分析及随机有限元法[M]. 北

京:机械工业出版社, 2005.
WU Q X. Structural reliability analysis and stochastic FEM. Beijing, China Machine Press, 2005.
[2] ANDERZEJ S N, KEVIN R C. Reliability of structures [M]. McGraw - Hill Companies Inc,2000.
[3] SHINOZUKA M. Basic analysis of structural safety. Journal of Structure Engineering[J]. ASCE,1983, 109(3): 721 -740.
[4] VAPNIK V N. Statistical learning theory [M]. John Wiley & Sons inc. , 1998.
[5] NELLO C, JOHN S T. An introduction to support vector machines and other kernel - based learning methods [M]. Cambridge University Press, 2000.
[6] ALEX J S, BERNHARD S. A tutorial on support vector regression [J]. Statistics and Computing, 2004, 14: 199 -222.
[7] 秦权，林道锦，梅刚. 结构可靠度随机有限元[M]. 北京:清华大学出版社,2006.
QIN Q, LIN D J, MEI G. Structural reliability stochastic FEM[M]. Beijing:Tsinghua University Press, 2006.
[8] MCKAY M D, CONOVER W J, BECKMAN R J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code [J]. Technometrics, 1979, 21(2): 239 -245.
[9] OLSSON A M J, SANDBERG G E. Latin hypercube sampling for stochastic finite element analysis [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(1): 121 - 125.
[10] ROSENBLATT M. Remarks on a multivariate transformation [J]. Annals of Math Stat, 1952, 23(3): 470 -472.
[11] CHANG C C, LIN C J. LIBSVM: a library for support vector machines[EB/OL]. [2001 - 12 - 12]. Software available at http://www. csie. ntu. edu. tw/~ cjlin/libsvm.
[12] 赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用[M]. 大连:大连理工大学出版社,1996.
ZHAO G F. Reliability theory and its applications for engineering structures[M]. Dalian: Dalin University of Technology Press, 1996.

Response Surface Method for Reliability Computation Based on Support Vector Regression

LIU Ji-ke, ZHAO Wei
(Department of Mechanics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: On the complicated or implicit limit state functions in the reliability problems, a response surface method for reliability computation based on Support Vector Regression (SVR) is presented. A fit of the limit state function is constructed by this method. The partial derivatives of the fit function could be easily computed and further be used to calculate the reliability through the ordinary first or second order reliability method. Firstly, the required training samples by Latin Hypercube sampling are generated in this paper. Secondly, the substituted function of the limit state function is obtained by the SVR. Thirdly, the reliability index and failure probability are calculated by the ordinary gradient optimization method. Results of the numerical examples justify the reliability and effectiveness of the proposed method, which provides a new approach for the reliability computation.

Key words: support vector regression; response surface method; reliability calculation; gradient optimization method