

几类并图的优美标号*

魏丽侠, 张昆龙

(华北科技学院 基础部, 河北 三河 065200)

摘要: 对非连通并图的优美性进行了研究, 给出了几类非连通的并图, 得出了如下结果: 对任意的正整数 n , m , 设 s 是不超过 $n/2$ 的最大整数, P_n 是 n 个顶点的路, $St(m)$ 是 $m+1$ 个顶点的星形树, 路 P_2 的补图与路 P_n 的联图记为 A_n , 则当 $n \geq 2$ 时, A_n 与任意一个具有 $n-1$ 条边的优美图的并图是一个优美图; 当 $n \geq 5$, $m \geq s+2$ 时, A_n 与星形树 $St(m)$ 的并图是一个优美图, 从而 A_n 与星形树 $St(n)$ 的并图是一个优美图; 当 $n \geq 5$ 时, A_n 与任意一条路 P_n 的并图是一个 $(n-s)$ -优美图。

关键词: 图; 优美图; 优美标号; 非连通图

中图分类号: 0157.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 03-0010-04

文[1] - [3] 研究了部分非连通图的优美性。我们对联图 $\bar{P}_2 \vee P_n$ 的非连通并图的优美性进行研究, 论证了三类非连通图 $(\bar{P}_2 \vee P_{2n}) \cup G_{n-1}$, $(\bar{P}_2 \vee P_n) \cup St(m)$, $(\bar{P}_2 \vee P_n^{(1)}) \cup P_n^{(2)}$ 的优美性。以下所讨论的图 $G(V, E)$ 均为简单无向图, 设 $V = V(G)$ 为图 G 的顶点集, $E = E(G)$ 为图 G 的边集, $|A|$ 为集合 A 的阶数, $[a]$ 为不超过实数 a 的最大整数, P_n 为 n 个顶点的路, $St(m)$ 为 $m+1$ 个顶点的星形树, $G_1 \vee G_2$ 为图 G_1 与 G_2 的联图, $\bar{G}$ 为图 G 的补图。

定义 1 设图 $G = (V, E)$, k 为正整数, 如果存在一个单射 $f: V \rightarrow \{0, 1, \dots, |E| + k - 1\}$, 使得对所有的边 $uv \in E$, 由 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ 导出一个双射 $f': E \rightarrow \{k, k+1, \dots, |E| + k - 1\}$, 则称图 G 是 k -优美图, f 是 G 的一个 k -优美标号。1-优美图也称优美图, 1-优美标号也称优美标号。

定理 1 设 n 为任意正整数, G_{n-1} 是任意一个边数为 $n-1$ 的优美图, 则:

(1) 图 $\bar{P}_2 \vee P_{2n}$ 是 n -优美图; (2) 当 $n \geq 2$ 时, 图 $(\bar{P}_2 \vee P_{2n}) \cup G_{n-1}$ 是优美图。

证明 (1) 设 $V(\bar{P}_2) = \{w_1, w_2\}$, $P_{2n}: x_1 x_2 \dots x_{2n}$, $E = E(\bar{P}_2 \vee P_{2n})$, $q = |E| + n - 1$, 则 $|E| = 6n - 1$, $q = 7n - 2$ 。定义图 $\bar{P}_2 \vee P_{2n}$ 的顶点标号 f 为:

$$f(w_1) = 0, f(w_2) = n,$$

$$f(x_i) = \begin{cases} q - \frac{1}{2}(i-1), & i = 1, 3, \dots, 2n-1 \\ 2n + \frac{i}{2} - 1, & i = 2, 4, \dots, 2n. \end{cases} \quad (1)$$

下面证明标号 f 是图 $\bar{P}_2 \vee P_{2n}$ 的 n -优美标号。

(i) 因 $f(w_1) < f(w_2) < f(x_2) < f(x_4) < \dots < f(x_{2n}) < f(x_{2n-1}) < f(x_{2n-3}) < \dots < f(x_1)$ (2)

故映射 $f: V(\bar{P}_2 \vee P_{2n}) \rightarrow \{0, 1, \dots, q\}$ 是单射。

(ii) 对所有的边 $uv \in E(\bar{P}_2 \vee P_{2n})$, 设 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$, 则:

$$f'(x_i x_{i+1}) = 5n - i - 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 2n-1)$$

$$f'(w_1 x_i) = \begin{cases} q - \frac{1}{2}(i-1), & i = 1, 3, \dots, 2n-1, \\ 2n + \frac{i}{2} - 1, & i = 2, 4, \dots, 2n. \end{cases}$$

$$f'(w_2 x_i) = \begin{cases} 6n - \frac{1}{2}(i+3), & i = 1, 3, \dots, 2n-1, \\ n + \frac{i}{2} - 1, & i = 2, 4, \dots, 2n. \end{cases}$$

从而, $f'(w_2 x_2) < f'(w_2 x_4) < \dots < f'(w_2 x_{2n}) < f'(w_1 x_2) < f'(w_1 x_4) < \dots < f'(w_1 x_{2n}) < f'(x_{2n-1} x_{2n}) < f'(x_{2n-2} x_{2n-1}) < \dots < f'(x_1 x_2) < f'(w_2 x_{2n+1}) < f'(w_2 x_{2n-3}) < f'(w_2 x_1) < f'(w_1 x_{2n-1}) < f'(w_1 x_{2n-3}) < \dots < f'(w_1 x_1)$, 所以 $f': E(\bar{P}_2 \vee P_{2n}) \rightarrow \{n, n+1, \dots, q\}$ 是双射, 因此 $\bar{P}_2 \vee P_{2n}$ 是 n -优美图。

下面证明结论 (2)。设 $V_1 = V(\bar{P}_2 \vee P_{2n})$, $E_1 = E(\bar{P}_2 \vee P_{2n})$, $V_2 = V(G_{n-1})$, $E_2 = E(G_{n-1})$, $V = V((\bar{P}_2 \vee P_{2n}) \cup G_{n-1})$, $E = E((\bar{P}_2 \vee P_{2n}) \cup G_{n-1})$,

* 收稿日期: 2007-09-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19801016, 10261003)

作者简介: 魏丽侠 (1962 年生), 女, 副教授; E-mail: weilixia622@sina.com

$q = |E|$, 则 $q = 7n - 2$ 。

设 f 是定理 1 证明 (1) 中定义的图 $\bar{P}_2 \vee P_{2n}$ 的顶点标号, g 是图 G_{n-1} 的一个优美标号。

定义图 $(\bar{P}_2 \vee P_{2n}) \cup G_{n-1}$ 的顶点标号 f_1 为: 当 $u \in V_1$ 时, $f_1(u) = f(u)$; 当 $v \in V_2$ 时, $f_1(v) = g(v) + 3n$ 。下面证明标号 f_1 是图 $(\bar{P}_2 \vee P_{2n}) \cup G_{n-1}$ 的一个优美标号。

(i) 由 f 的定义 (1) 式知, $f_1(x_{2n}) = f(x_{2n}) = 3n - 1$, $f_1(x_{2n-1}) = f(x_{2n-1}) = 6n - 1$; 由 g 的定义知, $g: V_2 \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$ 是单射, 故对任意 $v \in V_2$, $0 \leq g(v) \leq n-1$, 从而, $3n \leq f_1(v) \leq 4n-1$, 所以 $f_1(x_{2n}) < f_1(v) < f_1(x_{2n-1})$, 由 (2) 式有:

$$f_1(w_1) < \dots < f_1(x_{2n}) < f_1(v) < f_1(x_{2n-1}) < \dots < f_1(x_1). \quad (3)$$

由于对任意两个不同顶点 $v_1, v_2 \in V_2$, 有 $g(v_1) \neq g(v_2)$, 从而 $f_1(v_1) \neq f_1(v_2)$; 由 (3) 式知, 对任意两个不同顶点 $x, y \in V$, 有 $f_1(x) \neq f_1(y)$, 所以 $f_1: V \rightarrow \{0, 1, \dots, q\}$ 是单射。

(ii) 因 $f': E_1 \rightarrow \{n, n+1, \dots, q\}$ 是双射, $g': E_2 \rightarrow \{1, 2, \dots, n-1\}$ 是双射, 所以当边 $xy \in E_1$ 时, $f'_1(xy) = |f_1(x) - f_1(y)| = |f(x) - f(y)| = f'(xy)$, $f'_1(E_1) = f'(E_1) = \{n, n+1, \dots, q\}$; 当边 $xy \in E_2$ 时, $f'_1(xy) = |f_1(x) - f_1(y)| = |(g(x) + 3n) - (g(y) + 3n)| = |g(x) - g(y)| = g'(xy)$, $f'_1(E_2) = g'(E_2) = \{1, 2, \dots, n-1\}$, 从而 $f'_1(E_1) \cap f'_1(E_2) = \emptyset$, $f'_1(E_1) \cup f'_1(E_2) = \{1, 2, \dots, q\}$; 又因 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = E$, 所以 $f'_1: E \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ 是双射。

由 (i), (ii) 知, 图 $(\bar{P}_2 \vee P_{2n}) \cup G_{n-1}$ 是优美图。图 1 给出了图 $(\bar{P}_2 \vee P_8) \cup C_3$ 的优美标号。

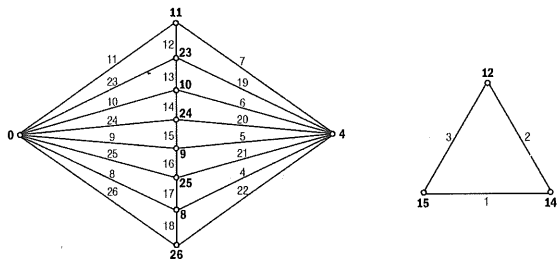


图 1

设 n 为任意正整数, $s = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, a, b 分别是序列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 偶数项和奇数项的最大脚标, 则 n 为偶数时, $s = \frac{n}{2}$, $a = n = 2s$, $b = n - 1 = 2n - 2s - 1$; n 为奇数时, $s = \frac{n-1}{2}$, $a = n - 1 = 2s$, $b = n =$

$2n - 2s - 1$ 。即对任意自然数 $n \geq 2$, $a = 2s$, $b = 2n - 2s - 1$ 。

定理 2 设 n, m 为任意正整数, 当 $n \geq 5$, $m \geq s + 2$ 时, 图 $(\bar{P}_2 \vee P_n) \cup St(m)$ 是优美图。

证明 设 $V(\bar{P}_2) = \{w_1, w_2\}$, $P_n: x_1 x_2 \dots x_n$, $V(St(m)) = \{y_0, y_j | j = 1, 2, \dots, m\}$, 其中 y_0 是星形树 $St(m)$ 的中心顶点, $q = |E((\bar{P}_2 \vee P_n) \cup St(m))|$, 则 $q = 3n + m - 1$ 。

由 $n \geq 5$ 知, $n \geq s + 3$, 从而 $n - s - 1 \geq 2$; 设 $h = n - s - 1$, 则 $h \geq 2$ 。

因 $2s + 1 \geq n$, 故 $s \geq n - s - 1$, 即 $s \geq h$, 从而 $m \geq s + 2 \geq h + 2$ 。

定义图 $(\bar{P}_2 \vee P_n) \cup St(m)$ 的顶点标号 f 如下:

$$f(w_1) = 0, f(w_2) = n - s,$$

$$f(x_i) = \begin{cases} q - \frac{1}{2}(i-1), & i = 1, 3, \dots, b \\ 2n - 2s + \frac{i}{2} - 1, & i = 2, 4, \dots, a \end{cases}$$

$$f(y_0) = n - s + 1, f(y_1) = n - s + 2,$$

$$f(y_{h+1}) = 2n + 1 - s(n - 2s)$$

$$f(y_j) = \begin{cases} j, & j = 2, 3, \dots, h \text{ 时} \\ n + s + 1 + j, & j = h + 2, h + 3, \dots, m \text{ 时} \end{cases}$$

其中, $f(x_a) = 2n - 2s + \frac{a}{2} - 1 = 2n - s - 1$,

$$f(x_b) = q - \frac{1}{2}(b-1) = 2n + m + s,$$

$$f(y_{h+1}) = \begin{cases} 4s + 1, & n \text{ 为偶数时,} \\ 3s + 3, & n \text{ 为奇数时,} \end{cases}$$

$$f(y_{h+2}) = n + s + 1 + (h + 2) = 2n + 2。$$

下面证明标号 f 是图 $(\bar{P}_2 \vee P_n) \cup St(m)$ 的优美标号。

(i) 因 $s + 2 < n$, 故 $n - s + 2 < 2n - 2s$, 而 $f(y_1) = n - s + 2$, $f(x_2) = 2n - 2s$, 故 $f(y_1) < f(x_2)$, 从而 $f(w_1) < f(y_2) < f(y_3) < \dots < f(y_h) < f(w_2) < f(y_0) < f(y_1) < f(x_2) < f(x_4) < \dots < f(x_a) < f(y_{h+1}) < f(y_{h+2}) < \dots < f(y_m) < f(x_b) < f(x_{b-2}) < \dots < f(x_1)$ 。

故映射 $f: V((\bar{P}_2 \vee P_n) \cup St(m)) \rightarrow \{0, 1, \dots, q\}$ 是单射。

(ii) 对所有的边 $uv \in E((\bar{P}_2 \vee P_n) \cup St(m))$, 设 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$, 则:

$$f'(w_1 x_i) = \begin{cases} q - \frac{1}{2}(i-1), & i = 1, 3, \dots, b, \\ 2n - 2s + \frac{i}{2} - 1, & i = 2, 4, \dots, a. \end{cases}$$

$$f'(w_2x_i) = \begin{cases} 2n+m+s-\frac{1}{2}(i+1), i=1,3,\dots,b, \\ n-s+\frac{i}{2}-1, i=2,4,\dots,a. \end{cases}$$

$$f'(x_ix_{i+1}) = n+m+2s-i (i=1,2,\dots,n-1),$$

$$f'(y_0y_1) = 1, f'(y_0y_{h+1}) = n+s-s(n-2s),$$

$$f'(y_0y_j) = \begin{cases} n-s+1-j, j=2,3,\dots,h \text{ 时}, \\ 2s+j, j=h+2, h+3,\dots,m \text{ 时}. \end{cases}$$

$$\text{其中, } f'(w_1x_a) = 2n-s-1, f'(w_1x_b) = 2n+m+s, f'(w_2x_a) = (2n-s-1)-(n-s) = n-1, f'(w_2x_b) = (2n+m+s)-(n-s) = n+m+2s,$$

$$f'(y_0y_{h+1}) = \begin{cases} 3s, & n \text{ 为偶数时}, \\ 2s+1, & n \text{ 为奇数时}, \end{cases}$$

(a) 当 n 为偶数时, $n=2s$, 从而,

$$\begin{aligned} f'(y_0y_1) &< f'(y_0y_h) < f'(y_0y_{h-1}) < \dots < f'(y_0y_2) < \\ f'(w_2x_2) &< f'(w_2x_4) < \dots < f'(w_2x_a) < f'(w_1x_2) < \\ f'(w_1x_4) &< \dots < f'(w_1x_a) < f'(y_0y_{h+1}) < f'(y_0y_{h+2}) < \\ &< \dots < f'(y_0y_m) < f'(x_{n-1}x_n) < f'(x_{n-2}x_{n-1}) < \dots < \\ &< f'(x_1x_2) < f'(w_2x_b) < f'(w_2x_{b-2}) < \dots < \\ f'(w_2x_1) &< f'(w_1x_b) < f'(w_1x_{b-2}) < \dots < f'(w_1x_1). \end{aligned}$$

(b) 当 n 为奇数时, $n=2s+1$, 将上式中划线的项 $f'(y_0y_{h+1})$ 移至 Δ 处, 其它项不变, 上式仍成立. 由 (a), (b) 知, $f':E((\bar{P}_2 \vee P_n) \cup St(m)) \rightarrow \{1,2,\dots,q\}$ 是双射. 综合 (i) (ii) 可知, 图 $(\bar{P}_2 \vee P_n) \cup St(m)$ 是优美图.

推论 对任意正整数 $n \geq 5$, 图 $(\bar{P}_2 \vee P_n) \cup St(n)$ 是优美图.

图 2 (a), (b) 分别给出了图 $(\bar{P}_2 \vee P_7) \cup St(12)$ 和 $(\bar{P}_2 \vee P_8) \cup St(12)$ 的优美标号.

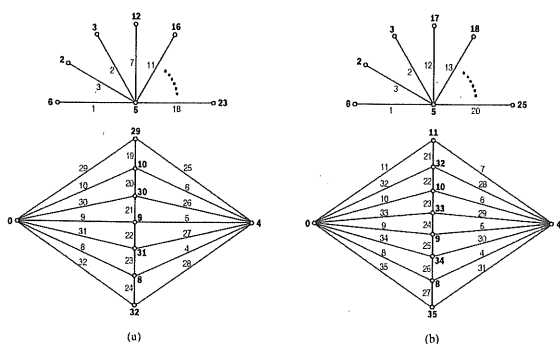


图 2

定理 3 对任意正整数 $n \geq 5$, 图 $(\bar{P}_2 \vee P_n^{(1)}) \cup P_n^{(2)}$ 是 $(n-s)$ -优美图.

证明 设 $V(\bar{P}_2) = \{w_1, w_2\}$, $P_n^{(1)}: x_1x_2 \dots x_n$, $P_n^{(2)}: y_1y_2 \dots y_n$, $V = V((\bar{P}_2 \vee P_n^{(1)}) \cup P_n^{(2)})$, $E = E((\bar{P}_2 \vee P_n^{(1)}) \cup P_n^{(2)})$, $q = |E| + (n-s) -$

1; 则 $|E| = 4n-2$, $q = 5n-s-3$.

定义子图 $\bar{P}_2 \vee P_n^{(1)}$ 的顶点标号 f 为:

$$f(w_1) = 0, f(w_2) = n-s,$$

$$f(x_i) = \begin{cases} 5n-s-\frac{1}{2}(i+5), i=1,3,\dots,b \\ 2n-2s+\frac{i}{2}-1, i=2,4,\dots,a. \end{cases}$$

$$\text{其中, } f(x_a) = 2n-2s+\frac{a}{2}-1 = 2n-s-1, f(x_b) = 5n-s-\frac{1}{2}(b+5) = 4n-2.$$

设 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$, 则 $f'(x_ix_{i+1}) = 3n+s-i-2 (i=1,2,\dots,n-1)$.

$$f'(w_1x_i) = \begin{cases} 5n-s-\frac{1}{2}(i+5), i=1,3,\dots,b \\ 2n-2s+\frac{i}{2}-1, i=2,4,\dots,a. \end{cases}$$

$$f'(w_2x_i) = \begin{cases} 4n-\frac{1}{2}(i+5), i=1,3,\dots,b \\ n-s+\frac{i}{2}-1, i=2,4,\dots,a. \end{cases}$$

其中, $f'(w_1x_a) = 2n-s-1$, $f'(w_1x_b) = 4n-2$, $f'(w_2x_a) = n-1$, $f'(w_2x_b) = 3n+s-2$.

(i) 当 n 为偶数时, $n=2s$, 定义路 $P_n^{(2)}$ 的顶点标号为: $f(y_n) = 7s$,

$$f(y_j) = \begin{cases} \frac{j}{2} & j=2,4,\dots,n-2, \\ 5s-\frac{1}{2}(j+1), & j=1,3,\dots,n-1. \end{cases}$$

从而, $f'(y_jy_{j+1}) = 5s-j-1 (j=1,2,\dots,n-2)$, $f'(y_{n-1}y_n) = 3s$.

(a) 由于 $f(w_1) < f(y_2) < f(y_4) < \dots < f(y_{n-2}) < f(w_2) < f(x_2) < f(x_4) < \dots < f(x_a) < f(y_{n-1}) < f(y_{n-3}) < \dots < f(y_1) < f(y_n) < f(x_b) < f(x_{b-2}) < \dots < f(x_1)$, 所以图 $(\bar{P}_2 \vee P_n^{(1)}) \cup P_n^{(2)}$ 的不同顶点对应的标号互不相同.

$$\begin{aligned} (b) \text{ 又因 } f'(w_2x_2) &< f'(w_2x_4) < \dots < f'(w_2x_a) \\ &< f'(w_1x_2) < f'(w_1x_4) < \dots < f'(w_1x_a) \\ &< f'(y_{n-1}y_n) < f'(y_{n-2}y_{n-1}) < \dots < f'(y_1y_2) \\ &< f'(x_{n-1}x_n) < f'(x_{n-2}x_{n-1}) < \dots < f'(x_1x_2) \\ &< f'(w_2x_b) < f'(w_2x_{b-2}) < \dots < f'(w_2x_1) \\ &< f'(w_1x_b) < f'(w_1x_{b-2}) < \dots < f'(w_1x_1) \end{aligned}$$

(4)

其中 $f'(w_2x_2) = f(x_2) - f(w_2) = (2n-2s) - (n-s) = n-s$, $f'(w_1x_1) = f(x_1) - f(w_1) = 5n-s-3 = q$, 所以 $f':E \rightarrow \{n-s, n-s+1, \dots, q\}$ 是双射.

(ii) 当 n 为奇数时, $n=2s+1$, 定义路 $P_n^{(2)}$

的顶点标号为: $f(y_n) = 6s + 3$,

$$f(y_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(j+1), j = 1, 3, \dots, n-2, \\ 5s - \frac{j}{2} + 2, j = 2, 4, \dots, n-1. \end{cases}$$

从而, $f'(y_j y_{j+1}) = 5s - j + 1 (j = 1, 2, \dots, n-2)$,

$f'(y_{n-1} y_n) = 2s + 1$.

(a) 由于 $f(w_1) < f(y_1) < f(y_3) < \dots < f(y_{n-2}) < f(w_2) < f(x_2) < f(x_4) < \dots < f(x_a) < f(y_{n-1}) < f(y_{n-3}) < \dots < f(y_2) < f(y_n) < f(x_b) < f(x_{b-2}) < \dots < f(x_1)$, 所以图 $(\bar{P}_2 \vee P_n^{(1)}) \cup P_n^{(2)}$ 的不同顶点对应的标号互不相同。

(b) 将 (4) 式中的划线项 $f'(y_{n-1} y_n)$ 移至 Δ 处, 其它项不变, 不等式仍成立。故此时映射 $f': E \rightarrow \{n-s, n-s+1, \dots, q\}$ 仍是双射。

综合 (i), (ii) 可知, 图 $(\bar{P}_2 \vee P_n^{(1)}) \cup P_n^{(2)}$ 是 $(n-s)$ -优美图。

$n=5$ 时, $s=2$, $n-s=3$, 图 3 (a) 给出了图 $(\bar{P}_2 \vee P_5^{(1)}) \cup P_5^{(2)}$ 的 3-优美标号; $n=6$ 时, $s=3$, $n-s=3$, 图 3 (b) 给出了图 $(\bar{P}_2 \vee P_6^{(1)}) \cup P_6^{(2)}$ 的 3-优美标号。

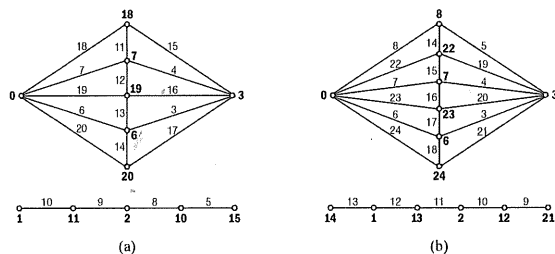


图 3

参考文献:

- [1] MA K J. Graceful graph [M]. Beijing: Peking University Press, 1991.
- [2] ACHARYA B D, HEGED S M. Arithmetic graph [J]. J Theory, 1990, 14(3): 275-299.
- [3] MARTIN G. Mathematical games [J]. Scientific American, 1972, 22(6): 625-645.
- [4] ECKLER A R. The construction of missile guidance codes resistant to random interference [J]. Bell Syst Technical J, 1960, 39: 973-994.
- [5] RINGEL G. Problem 25 in theory of graph and its applications [C]. Smolenice: Proc Symposium Smolenice. 1963, 162-167.
- [6] ROSA A. On certain valuations of the vertices of a graph theory of graphs [C]. Proc Internat, Sympos Rome, 1966, 349-355.
- [7] GOLOMB S W. How to number a graph, graph theory and computing [M]. New York: Academic Press, 1972, 23-37.
- [8] BI S Y, LI X F, LU X. The k -grace fullness and arithmetic of grace [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Jilinensis, 1999, (2): 19-22.
- [9] LU X, LI X F, FU T. The k -grace fullness and arithmetic of grace [J]. Changchun Institute of Post-Telecommunication Journal, 2000, 18(4): 17-20.
- [10] PAN W, LU X. The gracefulness of two kinds of unconnected graphs [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2003, 41(2): 152-154.
- [11] WEI L X, JIA Z Z. The gracefulness of unconnected graphs $G_1 \cup G_2$ and $G_1 \cup G_2 \cup K_2$ [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2005, 28(4): 689-694.
- [12] YAN Q T. The graceful labelings of $P_{2r, 2m}$ [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Science, 2006, 26(5): 513-517.
- [13] CAI H, WEI L X, LU X R. The gracefulness of unconnected graphs $(P_1 \vee P_n) \cup G_r, W_n \cup St(m)$ and $(P_1 \vee P_n) \cup (P_3 \vee \bar{K}_r)$ [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2007, 45(4): 539-543.

The Graceful Graphs on Several Kinds of Union Graphs

WEI Li-xia, ZHANG Kun-long

(North China Institute of Science and Technology, Hebei Sanhe 065200, China)

Abstract: To study the gracefulness of unconnected union graphs, several kinds of unconnected union graphs are given and the following results are obtained: for arbitrary positive integer n , m , let s be the greatest integer not greater than $n/2$, P_n be a path with n vertex, $St(m)$ be a star tree with $m+1$ vertex, graph A_n be the join graph of complement of P_2 and P_n , then for $n \geq 2$, the union of A_{2n} and arbitrary a graceful graph with $n-1$ edges is a graceful graph; for $n \geq 5$, $m \geq s+2$, the union of A_n and star tree $St(m)$ is a graceful graph, therefore the union of A_n and star tree $St(n)$ is a graceful graph; for $n \geq 5$, the union of A_n and arbitrary path P_n is a $(n-s)$ -graceful graph.

Key words: graph; graceful graph; graceful label; unconnected graph