

本原图的局部极指数^{*}

魏福义, 曾文才, 刘木伙

(华南农业大学应用数学系, 广东 广州 510640)

摘要: 设 G 是 n 阶本原无向图, $k(G)$ 表示 G 中局部本原指数等于 G 的本原指数的总数. 确定了 $k(G)$ 的最大值和次大值, 刻画了 $k(G)$ 达到最大值和次大值的所有本原无向图.

关键词: 本原指数; 本原图; 伴随矩阵; 局部本原指数

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 05-0022-03

1 研究背景

本文只考虑不含重边的无向图, 记为 G . 设 G 的边集合和点集合分别为 $E(G)$ 和 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 若点 v_i 到自己有一条边, v_i 称为环点; 点 v_i, v_j 之间最短路的长度称为这两点的距离, 记为 $d(v_i, v_j)$; 路 P 和圈 D 的长度分别记为 $l(P)$ 和 $l(D)$; G 中最短奇圈的长度称为 G 的奇围长, 记为 $k(G)$; 点 v_i 到奇圈 D 上所有点的距离的最小值, 称为点 v_i 和奇圈 D 的距离, 记为 $d(v_i, D)$. 一个图 G 称为本原图, 若存在某自然数 k 使对任意两点 $v_i, v_j \in V(G)$, G 中都存在从点 v_i 到点 v_j 的长为 k 的无向通道 (允许点和边重复). 这样的自然数中的最小者称为无向图 G 的本原指数, 记作 $\gamma(G)$. 设 $v_i, v_j \in V(G)$ (允许 $i=j$), 若存在一个正整数 k 使得对于每个正整数 $m \geq k$ G 中均有从 v_i 到 v_j 长为 m 的通道, 则把这种数中的最小者称为 v_i 到 v_j 的局部本原指数, 记为 $\gamma(v_i, v_j)$. 对于无向图, $\gamma(v_i, v_j) = \gamma(v_j, v_i)$, 故本文认为其表示一个局部本原指数.

下面几个引理是已知的:

引理 1^[1] 若 G 为本原无向图, 则 G 必连通且含奇圈.

引理 2^[2] $\gamma(G) = \max\{\gamma(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V(G)\}$.

引理 3^[3] 设 G 为本原无向图, 并且 $v_i, v_j \in V(G)$, 若存在两条从 v_i 到 v_j 长度分别为 k_1 和 k_2 且奇偶性不同的通道, 则 $\gamma(v_i, v_j) \leq \max\{k_1, k_2\} - 1$.

文 [1] 刻画了本原指数为 2^{n-2} 的本原图及其性质; 文献 [2-9] 刻画了本原指数的其它性质; 文献 [10-11] 描述了广义本原指数及其性质. 但是到目前为止, 关于局部本原指数的总数与本原指数的关系, 一直未见报道.

从引理 2 可知: 本原图 G 的最大局部本原指数等于 G 的本原指数. 本文指出 $k(G)$ 的最大值和次大值分别为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 和 $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, 同时刻画了 $k(G)$ 达到最大值和次大值的所有极图. 其中 $k(G)$ (或 $k'(G)$) 表示 G 中局部本原指数等于 (或小于) G 的本原指数的总数.

为了方便, 分别用 K_n 和 K_{n-1} 表示完全图和星图. 定义 G_1 为在完全图 K_n 的每个点都加一个环所得的图; G_2 为在星图的中心点加一个环所得的图. 其他未定义的概念和符号均可在 [1], [10] 中找到.

2 主要结果

由 $k(G)$ 的定义和组合性质知: n 阶图 G 的局部本原指数的总数为 $\frac{n(n+1)}{2}$; $k(G)$ 与 $k'(G)$ 的关

系为: $k(G) = \frac{n(n+1)}{2} - k'(G)$.

定理 1 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶本原图, 则 $k(G) \leq \frac{n(n+1)}{2}$, 等号成立当且仅当 G 同构于 G_1 .

证明 由定义知: $k(G) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ 和 $k(G_1) = \frac{n(n+1)}{2}$.

* 收稿日期: 2007-02-26

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (5300084); 华南农业大学校长基金资助项目 (4900-104111)

作者简介: 魏福义 (1964 年生), 男, 副教授; E-mail: weifu@126.com

假设 $k(G) = \frac{n(n+1)}{2}$, 由引理 1 知 G 连通且必含奇圈。若 $k(G) \geq 3$, 记 D 是 G 中一个最短奇圈。由引理 3 知对于任意 $v, w \in V(D) (i \neq j)$, 有 $\gamma(v, w) < \gamma(v, v)$, 故 $k(G) < \frac{n(n+1)}{2}$, 矛盾, 故有 $k(G) = 1$ 。不妨设 v 是一个环点, 则 $\gamma(v, v) = 1$, 结合 $k(G) = \frac{n(n+1)}{2}$ 和引理 3 知: 对于任意两点 $v, w \in V(G)$, 有 $d(v, w) = 1$ (允许 $i = j$) 即 G 同构于 G_1 。

由定理 1 的证明可得:

推论 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶本原图, 则 $k(G) = \frac{n(n+1)}{2}$ 当且仅当 $\gamma(G) = 1$ 。

定理 2 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶本原图, 且 $\gamma(G) \geq 2$, 则 $k(G) \leq \frac{n(n+1)}{2} - n$ 。

证明 若对于任意点 $v \in V(G)$, 都有 $\gamma(v, v) < \gamma(G)$, 则结论显然成立。

对于满足 $\gamma(v, v) = \gamma(G)$ 的任意点 $v \in V(G)$, 由局部本原指数的定义和引理 3 知: 必存在一个点 w 满足: $\gamma(v, w) < \gamma(G)$ 且 $d(v, w) = 1$ 。结合使不等式 $\gamma(v, w) < \gamma(G)$ 成立的那些点 (如果存在) 的数目, 有: $k'(G) \geq n$ 。故 $k(G) \leq \frac{n(n+1)}{2} - n$ 。

引理 4 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶本原图。若 $k(G) = \frac{n(n+1)}{2} - n$, 则

(1) $\gamma(G) = 2$;

(2) G 含有唯一的奇圈。

证明 (1) 由 $k(G)$ 与 $k'(G)$ 的关系和 $k(G) = \frac{n(n+1)}{2} - n$ 知: $k'(G) = n$ 。

假设 $\gamma(G) = m > 2$, 分两种情况讨论:

情况 1 $\forall v \in V(G), \gamma(v, v) < m$

由引理 1 知: G 至少包含一个奇圈。若 G 有一个环点, 不妨设为 v 。则存在一个点 w 满足 $d(v, w) = 1$ 且 $\gamma(v, w) = 1 < m$; 若存在长度大于 1 的奇圈 D 则对于任意不同的两点 $v, w \in V(D)$, 有 $\gamma(v, w) < \gamma(v, v) < m$ 。

结合 $\gamma(v, v) < m (i = 1, 2, \dots, n)$ 的条件可得: $k'(G) > n$ 矛盾。

情况 2 至少存在一点 $v \in V(G)$, 满足 $\gamma(v, v) = m$ 。下面按照点 v 是否在最小奇圈 D 上分为两种子情况讨论。

子情况 2.1 点 v 都不在最小奇圈 D 上。由 m

> 2 和引理 3 知: 必存在与点 v 相关的两个不同点 $w, x \in V(G)$, 满足: $\gamma(v, w) < m$ 和 $\gamma(v, x) < m$ 。这样, 满足 $\gamma(v, w) < m$ (允许 $i = j$) 的局部本原指数总数大于 n 。故有: $k'(G) > n$ 矛盾。

子情况 2.2 存在点 v 在最小奇圈 D 上。这蕴含着对于任意点 $v \in V(G)$, 必在一个最小奇圈 (允许不同于 D) 上 (否则, 存在一个点 $w \in V(G)$ 不在最小奇圈上, 则 $\gamma(v, w) > m$, 矛盾)。此时 $k(D) = \gamma(G) + 1$, 结合 $\gamma(G) = m > 2$ 可知: $|V(D)| = m + 1 > 3$ 。故任意点 $v \in V(G)$, 必在一个长度大于 3 的最小奇圈上。结合对于同一个最小奇圈上的任意两个不同点 $v, w \in V(G)$ 有 $\gamma(v, w) < m$, 以及最小奇圈上的两个不同点对的数目大于 $m + 1$ 的事实, 有: $k'(G) > n$ 矛盾。

由推论和上述证明得: $\gamma(G) = 2$ 。

(2) 用反证法证明。假设 G 至少含有两个奇圈, 因 G 是连通图, 故 $|E(G)| \geq n + 1$ 。由引理 2 和 $\gamma(G) = 2$ 知: 对于任意点 v 必在长度为 3 的奇圈上; 或者必存在环点 v 满足 $d(v, v) \leq 1$ 。这蕴含着若 $(v, w) \in E(G)$ (允许 $i = j$) 则: $\gamma(v, w) = 1$ 。结合 G 至少含有两个奇圈知: $k'(G) \geq |E(G)| \geq n + 1 > n$ 矛盾。所以 G 只含有唯一的奇圈。

定理 3 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶本原图。则:

$k(G) = \frac{n(n+1)}{2} - n$ 当且仅当 G 同构于 G_2 或一个三角形 ($n = 3$)。

证明 必要性: 若 G 同构于一个三角形, 结论显然成立; 若 G 同构于 G_2 用引理 3 直接计算可得: $\gamma(v, w) = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 且 $\gamma(v, w) = 2 (i \neq j, i \neq 1)$, 故: $k(G) = \frac{n(n+1)}{2} - n$ 。

充分性: 由引理 4 知: G 只含有唯一的奇圈, 记为 D 。分为两种情况讨论。

情况 1 $[V(G)/V(D)] \neq \emptyset$

对于任意点 $u \in [V(G)/V(D)]$, 设 $d(u, v) = d(u, D) = 1$ 且点 u 到点 v 的一条长为 1 的最短路为 P_k 。对于任意点 $u \in [V(G) \cup V(P_k)/v]$, 结合引理 3 可知:

$$\gamma(u, u) > \gamma(u, v) > \gamma(v, v)$$

这蕴含着 $k'(P_k \cup D) \geq |V(P_k \cup D)|$, 且等式成立当且仅当 $k(D) = k(P_k) = 1$ 。结合条件 $k'(G) = n$ 及 u 的取法可得:

$$k'(P_k \cup D) = |V(P_k \cup D)|, k(D) = k(P_k) = 1$$

不妨设 $V(D) = \{v\}$, 由 $\gamma(v, v) = 1 (k =$

$1, 2, \dots, n)$ 以及 $k(G) = \frac{n(n+1)}{2} - n$ 可得: $(v,$

$v_i) \notin E(G) (P \neq \emptyset, P \neq 1)$ 即图 G 同构于 G_3 。

情况 2 $[V(G)/V(D)] = \emptyset$

此时: $|V(G)| = |V(D)| = n$, 而 $\gamma(G) = 2$ 且 $\gamma(G) = k(D) - 1 = n - 1$, 则 $n = 3$ 即 G 同构于一个三角形。

定理 1、2 和 3 给出了 n 阶本原无向图 G 中标 $k(G)$ 的最大值和次大值, 并且刻画了达到最大值和次大值的所有 n 阶本原无向图。

参考文献:

[1] 邵嘉裕. 对称本原矩阵的指数集[J]. 中国科学: A 辑, 1986(9): 931—939

[2] LIU B MECKY B D WORMALD N C et al The exponent set of symmetric primitive $(0, 1)$ matrices with zero trace[J]. Linear Algebra Appl 1990(133): 121—131.

[3] LIU B SHAO JY. Characterization of primitive extremal matrices[J]. 中国科学: A 辑 (英文版), 1991(7): 25—36

[4] CAI J WANG B The characterization of symmetric primitive matrices with exponent $n-1$ [J]. Linear Algebra Appl 2003(364): 135—145

[5] CAI J ZHANG K The characterization of symmetric primitive matrices with exponent $2n-2$ [J]. Linear Multilinear Algebra 1995(39): 391—396

[6] BRUALDI R A RYSER H J Combinatorial matrix theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[7] 王建中, 王殿军. 对称本原矩阵的指数集的刻画[J]. 数学进展, 1994, 22(5): 516—523

[8] WEI F CHU M WANG J On odd primitive graphs[J]. Australas J Comb 1999(3): 11—15

[9] ZHOU B Exponents of primitive graphs[J]. Australas Comb 2003(28): 67—72

[10] BRUALDI R A LIU Bo-lan Generalized exponents of primitive directed graphs[J]. Graph Theory 1990(14): 483—499

[11] LIU Bo-lan Generalized exponents of boolean matrices[J]. Linear Algebra and its Applications 2003(373): 169—182

Primitive Graphs of Extremal Local Exponent

WEI Fu-yi ZENG Wen-cai LIU Mu-huo

(Department of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou 510640, China)

Abstract: Let G be the primitive graphs of order n and $k(G)$ be the total number of local exponent which is equal to the exponent of G . All the primitive graphs of order n for which $k(G)$ achieve the largest and the second largest value are characterized completely.

Key words: exponents; primitive graphs; associated matrix; local exponent

(上接第 21 页)

Research on Method of Text Classification Rule Extraction Based on Genetic Algorithm and Entropy

TANG Hua ZENG Bi-qing

(Computer Engineering Department of Nanhai Campus, South China Normal University, Foshan 528225, China)

Abstract: Aimed at the text classification problems in data mining, a text classification rule extraction method is proposed based on genetic algorithm and entropy for rule discovery called Genetic Miner (GM). The goal of GM is to discover classification rules in data sets. It produces population with the entropy and then extract classification rule with genetic algorithm. Compared the performance of GM with other two well-known algorithms Antminer and CN2 in six public domain data sets, the results showed that GM has a better performance in both predictive accuracy and rule list simplicity criteria than Antminer and CN2. It can also mostly improve the comprehensibility of the discovered knowledge.

Key words: text classification rule; data mining; discover knowledge; information entropy; genetic algorithm

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net