

# 基于预报观测器的积分状态反馈控制系统 CAD<sup>\*</sup>

何碧霞, 吕志民

(中山大学新华学院信息科学系, 广东 广州 510520)

**摘 要:** 针对带预报观测器的积分状态反馈控制系统设计, 需对  $2n+1$  阶带符号变量三元矩阵方程组求解, 线性代数或数值计算法难于实现。提出借助 MATLAB 控制系统工具箱和符号数学工具箱中有关函数, 构成 CAD 的 M 文件, 自动完成设计过程, 得出状态变量的通解。计算结果与仿真数据比较, 两者基本一致, 证明本方法的正确与实用。

**关键词:** 预报观测器; 积分状态反馈; CAD

**中图分类号:** TP217.82 TP273.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) S2-0215-04

一个  $n$  阶被控对象的积分状态反馈控制系统设计, 在状态变量不能完全被观测时, 需借助预报观测器。根据分离原理, 可对积分状态反馈部分和观测器部分进行独立设计<sup>[1]</sup>。前者主要考虑闭环系统动态性能指标, 把极点配置在期望位置上, 积分环节需要系统状态变量增加至  $n+1$  阶; 后者则要求观测器动态响应速率比闭环系统快数倍, 作为另一组极点配置的依据。由此建立起  $2n+1$  阶方程, 可通过矩阵运算或使用 Ackermann 等方法, 求解出状态反馈部分的反馈矩阵, 再利用对偶原理, 求出观测器增益矩阵。在已知系统和观测器初始状态的情况下, 求系统状态变量或观测器状态变量过程, 因涉及到带符号变量三元矩阵方程组求解, 一般线性代数或数值计算法难求出其通解, 大多数文献只用递推法求出前几个节拍的采样值<sup>[2]</sup>。

本文介绍利用 MATLAB 控制系统工具箱 (Control System Toolbox) 中有关函数, 设计出反馈控制的状态反馈矩阵和观测器增益矩阵, 利用符号数学工具箱 (Symbolic Math Toolbox) 中符号对象函数, 进行带符号变量的矩阵运算及矩阵方程求解<sup>[3]</sup>, 直接求出系统状态变量或观测器状态变量的通解。使用 MATLAB 中 Simulink 仿真工具箱, 对整个系统进行数字仿真<sup>[4]</sup>, 结果和理论计算值比较, 两者十分接近, 证明本设计方法的正确与实用。

## 1 带预报观测器的积分状态反馈控制系统综述

使用带预报观测器的积分状态反馈控制系统, 既可克服状态变量不能完全被观测下实施极点配置, 也能有效地提高系统的无差度及抑制外来干扰。

设带零阶保持器的  $n$  阶被控对象离散状态空间表达式为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $A$   $B$   $C$  均为常系数矩阵。若系统采样周期  $T_s$  已知,  $u(k)$  幅度无界且为标量, 系统状态完全可控, 带前置积分器的  $n$  阶预报观测器状态空间表达式可以表示为

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = (A-KC)\hat{x}(k) + Bu(k) + Ky(k) \\ u(k) = -L\hat{x}(k) - l_{n+1}x_{n+1}(k) \\ e(k+1) = (A-KC)[\hat{x}(k) - x(k)] \end{cases} \quad (2)$$

式中  $K$  为观测器反馈增益矩阵,  $L$  为  $n$  阶状态反馈增益矩阵,  $e(k)$  为重构误差,  $x_{n+1}(k)$  为前置积分器新加的第  $n+1$  阶状态变量,  $l_{n+1}$  为第  $n+1$  阶状态反馈增益。

据分离定理, 闭环系统动态特性与观测器特性无关, 系统设计可分三部分独立进行。

(1) 状态反馈部分: 由闭环系统动态性能指标期望极点  $p_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ )、 $p_{n+1}$  及系统特征方程共同确定。

$$\begin{vmatrix} zI - A + BL & -Bl_{n+1} \\ -C & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)(z-p_{n+1}) \quad (3)$$

用比较同次幂系数方法求解式 (3) 方程, 可得状态反馈增益矩阵  $L$  和  $l_{n+1}$ 。其中

$$L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]$$

(2) 观测器部分: 要求其动态响应速率比整

\* 收稿日期: 2007-09-24

作者简介: 何碧霞 (1981年生), 女, 助教; E-mail: hebixia24@yahoo.com.cn

个闭环系统快 2 ~ 5 倍, 由此可得出另一组期望极点  $q$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ), 且有

$$|zI - A + KC| (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n) \quad (4)$$

求解式 (4) 可得观测器反馈增益矩阵  $K$

$$K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]^T$$

(3) 前置积分输入部分: 由新增第  $n+1$  阶状态变量、输入函数和系统输出反馈共同决定

$$x_{n+1}(k+1) = x_{n+1}(k) + r(k) - Cx(k) \quad (5)$$

若已知闭环系统初始状态  $x(0)$ 、 $x_{n+1}(0)$  和观测器的初始状态  $\hat{x}(0)$ , 可从式 (1)、(2) 和式 (5) 的变换中, 整理出  $X(z)$ 、 $X_{n+1}(z)$  和  $\hat{x}(z)$  的联立方程

$$\begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1} [zx(0) - B(\hat{L}X(z) + l_{n+1}x_{n+1}(z))] \\ \hat{X}(z) = (zI - A + KC + BL)^{-1} \cdot \\ [ \hat{x}(0) - B(l_{n+1}x_{n+1}(z) + KCX(z)) \\ x_{n+1}(z) = \frac{1}{z-1} [x_{n+1}(0) + R(z) - CX(z)] \end{cases}$$

这是一组带符号变量的三元矩阵方程, 要求出其状态变量的通解, 一般线性代数或数值计算法难于实现。

## 2 带预报观测器积分状态反馈控制系统的 CAD

为方便叙述起见, 以一个位置控制系统为例。伺服电机位置控制系统被控对象传递函数如图 1, 离散闭环控制系统所具有的动态特性类似连续系统  $\zeta=0.4613$ ,  $\omega_n=1.2261$ , 预报观测器动态响应速率为闭环系统的 4 倍, 离散系统采样周期  $T_s=1$  s, 设计带预报观测器的积分状态反馈控制系统, 对单位阶跃信号输入实现无静态误差输出, 对同样的干扰信号, 有较强的抑制能力, 求出闭环系统状态变量  $x(k)$  和  $x_{n+1}(k)$ 。

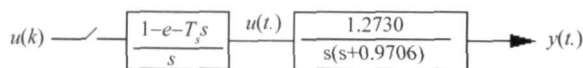


图 1 被控对象传递函数

Fig 1 The transfer function of controlled object

### (1) 连续对象模型离散化

据图 1 得系统连续状态空间表达式为

$$X(z) = \begin{cases} X_1(z) = \frac{0.2715z^2 - 0.6811z + 0.4268z + 0.02289z + 0.1223z - 0.258z}{z^2 - 3.602z + 4.934z - 3.372z + 1.792z - 1.678z + 1.708z - 1.17z} \\ \quad + 0.1099z - 0.01509z + 0.0006554z \\ \quad + 0.4879z - 0.1109z + 0.01162z - 0.0004411 \\ \quad + 0.2003z + 0.1035z + 0.02807z + 0.001574z \\ X_2(z) = \frac{z - 2.301z + 2.159z - 1.182z + 0.3681z - 0.04658z + 0.00198}{z - 1.093z + 0.4205z - 0.3278z} \\ X_3(z) = \frac{z - 3.093z + 3.807z - 2.517z + 0.9859z - 0.1825}{z - 3.093z + 3.807z - 2.517z + 0.9859z - 0.1825} \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t) \quad (7)$$

$$\text{式中, } F = \begin{bmatrix} -0.9706 & 0 \\ 1.2730 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H = [0 \ 1],$$

$$J = [0]$$

使用控制系统工具箱模型转换命令 `impinvar` 求得式 (1) 离散状态空间方程和输出方程各矩阵。

$$[A \ B \ C \ D] = \text{impinvar}(F \ G \ H \ J \ T_s, 'zoh') \quad (8)$$

$$\text{式中, } A = \begin{bmatrix} 0.3789 & 0 \\ 0.8147 & 1.0000 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.6400 \\ 0.4722 \end{bmatrix}, C =$$

$$[0 \ 1], D = [0].$$

### (2) 求期望配置的极点

状态反馈控制部分所需配置的极点为

$$P = [\exp(-\zeta \omega_n T_s + i \omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}), \exp(-\zeta \omega_n T_s - i \omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}), \zeta \omega_n T_s] \quad (9)$$

设预报观测器动态响应速率比闭环控制系统快 4 倍, 选择的极点为

$$Q = [\exp(-4 \zeta \omega_n T_s), \exp(-4 \zeta \omega_n T_s)]$$

解得

$$\begin{cases} P = [0.2638 + 0.5031i, 0.2638 - 0.5031i, 0.5656] \\ Q = [0.1041, 0.1041] \end{cases}$$

(3) 求观测器增益矩阵和积分状态反馈增益矩阵

使用 `acker` 函数和利用对偶原理, 求预报时观测器增益矩阵  $K$

$$K = [\text{acker}(A', C', Q)']$$

$$\text{求得 } K = [0.0927 \ 1.1707]^T$$

使用符号数学工具箱 `solve` 函数, 求解方程式

(3), 得积分状态反馈增益矩阵  $L$  及  $l_{n+1}$

$$L = [0.8910 \ 1.516], \quad l_{n+1} = -0.4243$$

(4) 使用符号对象函数计算式 (6) 的  $X(z)$  和  $X_{n+1}(z)$

设  $x(0) = [0, 0]^T$ ,  $x_{n+1}(0) = 0$ ,  $\hat{x}(0) = [0, 0]^T$ , 使用符号对象函数 `solve`, 求出系统状态变量  $X_1(z)$ 、 $X_2(z)$ 、 $X_3(z)$ , 使用 `numden`、`collect` 和 `sym2poly` 函数, 把结果化简为



4 结 语

本文介绍基于预报状态观测器的积分状态反馈控制系统计算机辅助设计方法，把复杂的带符号变量矩阵运算和高阶方程求解，由计算机自动完成，计算结果和仿真数据基本一致；系统对单位阶跃干扰信号有较强的抑制作用，第 12 个采样节拍后，扰动影响基本消失；仿真结果同时显示，当预报状态观测器初始状态选取  $\hat{x}=[1,1]^T$ ，闭环系统初始状态为  $x(0)=[0,0]^T$ ， $x^{(1)}(0)=0$ ，在输入及扰动为零情况下，经 14 个采样节拍后，观测器的状态变量  $\hat{x}$  已经趋向于系统变量  $x(k)$ ，重构误差

迅速收敛，可见上述设计方法是正确的。

参考文献:

[ 1 ] OGATA K. Modern Control Engineering[ M]. 4th ed. Prentice Hall. 2002

[ 2 ] ÅSTRÖM K J, WITTENMARK B. Computer Controlled Systems: Theory and Design[ M]. 3rd ed. Prince Hall Inc. 1997

[ 3 ] 刘宏友, 彭锋. MATLAB 6 X 符号运算及其应用[ M]. 北京: 机械工业出版社, 2003

[ 4 ] R MVALL C M. Computer aided control system design [ J]. IEEE Control Systems Magazine ( Special issue on CACSD), 1993, 13: 14—16

The CAD of State Feedback Control System with an Integrator  
Based on Predicted State Observer

HE Bixia LIU Zhimin

(Department of Information Science, Xin Hua College, Sun Yat sen University, Guangzhou 510520, China)

Abstract: A CAD method of state feedback control system with an integrator and based on predicted state observer is presented by using the relational functions in MATLAB control system toolbox and symbolic math toolbox. The sampled data of state variables to theoretical calculation are approximately equal to simulation testing, and the result shows that recommended method in this paper is correct and applied.

Key words: predicted state observer; state feedback with integrator; CAD