第 47 卷 第 1 期 2008 年 1 月
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol. 47 No. 1 Jan. 2008

保向同胚映射的径向连续性*

李淑龙，苏伟旭，刘立新
（中山大学数学与计算科学学院，广东广州 510275）

摘 要：研究了复平面上保向同胚映射的径向绝对连续性. 利用 Rengel 不等式，证明了在一定模条件下，复平面到自身的保向同胚映射在几乎所有的径向上是绝对连续的（除去原点）。

关键词：共形模；极值长度；绝对连续
中图分类号：O174.5 **文献标识码**：A **文章编号**：0529-6579（2008）01-0013-03

设 D 是复平面 C 的一个区域，$\Gamma=\{\gamma_\alpha:\alpha\in A\}$ 是一个曲线族，其中每条曲线 γ_α 在 D 的内部，并且假定是局部可求长的。我们定义曲线 Γ 族的极值长度 $\lambda(\Gamma)$。记 D 上全体非负 Borel 可测函数集为 P。对于任意的 $\rho\in P$，我们可以将其视作一个度量密度。在该度量下，D 的 ρ 面积为

$$m_\rho(D)=\iint_D\rho^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而每条曲线 $\gamma\in\Gamma$ 的 ρ 长度是

$$l_\rho(\gamma)=\int_\gamma p|\mathrm{d}z|$$

考虑 P 的一个子集

$$P_0=\{\rho\in P:0<m_\rho(D)<\infty\}$$

则曲线族 Γ 的极值长度定义如下：

$$\lambda(\Gamma)=\sup_{\rho\in P_0}\{\inf_{\gamma\in\Gamma}l_\rho^2(\gamma)/m_\rho(D)\}$$

在拓扑四边形 $Q(z_1,z_2,z_3,z_4)$ 中，把边界弧 z_1z_2 与 z_3z_4 称作第一组对边，而另一组称作第二组对边，Γ_i，$i=1$，2，表示连接第 i 组对边并落在拓扑四边形 $Q(z_1,z_2,z_3,z_4)$ 内的曲线族。则根据拓扑四边形共形模的定义，我们有

$$\mathrm{mod}Q(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{\lambda(\Gamma_1)=\lambda(\Gamma_2)}$$

如果 $\rho=1$ 那么 $l_\rho(\gamma)$ 是 γ 的欧氏长度，记为 $l(\gamma)$。称 $d_i=\inf_{\gamma\in\Gamma_i}l(\gamma)$，为拓扑四边形 $Q(z_1,z_2,z_3,z_4)$ 第 i 组对边的距离，$i=1$，2。$m(Q)$ 表示 Q 的欧氏面积。下面引理称为 Rengel 不等式，它将在本文中起着重要的作用。

引理 1[1-3] 拓扑四边形 $Q(z_1,z_2,z_3,z_4)$ 的共形模满足不等式

$$\frac{d_2^2}{m(Q)}\leqslant\mathrm{mod}Q(z_1,z_2,z_3,z_4)\leqslant\frac{m(Q)}{d_1^2}$$

记 $A(r_1,r_2)=\{z|\ r_1\leqslant|z|\leqslant r_2\}$；
$A(r_1,r_2;\theta_1,\theta_2)=\{z|\ r_1\leqslant|z|\leqslant r_2;\theta_1\leqslant\arg z\leqslant\theta_2\}$

定义 $\mathrm{mod}(A(r_1,r_2))=\dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{r_2}{r_1}$

$$\mathrm{mod}(A(r_1,r_2;\theta_1,\theta_2))=\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\log\frac{r_2}{r_1}$$

如果 Γ 是由所有连接 $\{z||z|=r_1\}$ 与 $\{z||z|=r_2\}$，并且落在 $A(r_1,r_2)$ 上的局部可求长曲线所构成的曲线族，那么 $\mathrm{mod}A(r_1,r_2)=\lambda(\Gamma)$。如果 Γ 是由所有连接 $\{z||z|=r_1\}$ 与 $\{z||z|=r_2\}$，并且落在 $A(r_1,r_2;\theta_1,\theta_2)$ 上的局部可求长曲线所构成的曲线族，那么 $\mathrm{mod}(A(r_1,r_1;\theta_1,\theta_2))=\lambda(\Gamma)$[1-4]。

陈志国[5] 提出了这样一个问题：对于满足模条件 $\mathrm{mod}f(A)\leqslant K\mathrm{mod}(A)$ 的单位圆到自身的保向同胚映射如果满足规范条件 $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{|f(z)|}{|z|^k}=1$，那么是否有 $f(z)=\lambda z|z|^{k-1}|\lambda|=1$？有关背景可参考 [6-12]。

本文对此展开研究。我们目前还不能完全解决这个问题，但是在这方面有了一点进展，证明了在一定模条件下，复平面到复平面的保向同胚映射在径向方向上的绝对连续性。

1 主要定理及证明

定理 设 $f(z)$ 是复平面 C 到自身的一个保向同胚映射。如果 f 满足，

$$\mathrm{mod}f(A)\leqslant K\mathrm{mod}A$$

* 收稿日期：2007-04-30
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10371078）
作者简介：李淑龙（1981 年生），女，博士生；E-mail：shulong2004@163.com

这里 K 是正常数，A 是任意复平面内的环 $A(r_1,r_2)$ 或者环的一部分 $A(r_1,r_2;\theta_1,\theta_2)$，那么对于几乎所有的 $\theta\in[0,2\pi]$ 及任意的 $a>0$，f 在 $\{z=re^{i\theta}:r\geqslant a\}$ 绝对连续。

证 令 $A=\{z=re^{i\theta}\mid r_1<r<r_2,0<\theta\leqslant 2\pi\}$ 是复平面的环。假设

$$q(x)=m(f(A_x)),$$

这里 $A_x=\{z=re^{i\theta}\mid 0<r<\infty,0<\theta<x\}$，而 $m(f(A_x))$ 是 $f(A_x)$ 的欧氏面积。

显然 $q(x)$ 是 $x\in(0,2\pi]$ 的单调递增函数，因此几乎处处存在有限导数 $q'(x)$。

设 $q'(x_0)$ 存在并且有限，下面我们证明 $f(re^{ix_0})$ 在 $r\geqslant a$ 上绝对连续。

首先，我们选择一个正数 δ 使得 $x_0+\delta<2\pi$。设 (r_k,r_k^*)，$k=1,2,\cdots,n$，是 $a\leqslant r<\infty$ 的任意有限个互不重叠的小区间。

定义

$$G_k^\delta=\{z=re^{i\theta}\}r_k<r<r_k^*,x_0<\theta<x_0+\delta\}$$

那么

$$\mathrm{mod}G_k^\delta=\frac{1}{\delta}\log\frac{r_k^*}{r_k}$$

根据 Rengel 不等式，我们有

$$\frac{\left(d_k^\delta\right)^2}{m(f(G_k^\delta))}\leqslant\mathrm{mod}\,f(G_k^\delta)\qquad(1)$$

这里 d_k^δ 表示 $f(G_k^\delta)$ 第二组对边的欧氏距离。

当 $\delta\to0$ 时，这组对边收敛为点 $f(r_ke^{ix_0})$ 和 $f(r_k^*e^{ix_0})$，所以

$$\lim_{\delta\to0}d_k^\delta=|f(r_ke^{ix_0})-f(r_k^*e^{ix_0})|$$

根据已知条件，$\mathrm{mod}\,f(A)\leqslant K\mathrm{mod}\,A$，我们有

$$\mathrm{mod}\,f(A)\leqslant K\mathrm{mod}\,G_k^\delta$$

从而由（1）有

$$\frac{(d_k^\delta)^2}{m(f(G_k^\delta))}\leqslant K\frac{1}{\delta}\log\frac{r_k^*}{r_k},\quad k=1,2,\ldots,n\,(2)$$

根据 Schwarz 不等式，

$$\left(\sum_{k=1}^n d_k^\delta\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{(d_k^\delta)^2}{m(f(G_k^\delta))}\sum_{k=1}^n m(f(G_k^\delta))$$

注意到

$$\sum_{k=1}^n m(f(G_k^\delta))\leqslant q(x_0+\delta)-q(x_0)$$

由（2）可得

$$\left(\sum_{k=1}^n d_k^\delta\right)^2\leqslant K\frac{q(x_0+\delta)-q(x_0)}{\delta}\sum_{k=1}^n\log\frac{r_k^*}{r_k}$$

令 $\delta\to0$，得到

$$\left(\sum_{k=1}^n|f(r_ke^{ix_0})-f(r_k^*e^{ix_0})|\right)^2\leqslant Kq'(x_0)\sum_{k=1}^n\log\frac{r_k^*}{r_k}$$

注意到，当 $\alpha>\beta\geqslant1$ 时 $\log\frac{\alpha}{\beta}<\alpha-\beta$。

不妨设 $a\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_n$，那么 $r_k^*/a>r_k/a\geqslant1$，$k=1,2,\cdots,n$。

从而，$\log\frac{r_k^*}{r_k}<\frac{1}{a}|r_k^*-r_k|$，$k=1,2,\cdots,n$。

所以有

$$\left(\sum_{n=1}^n|f(r_ke^{ix_0})-f(r_k^*e^{ix_0})|\right)^2\leqslant$$

$$Kq'(x_0)\sum_{k=1}^n\log\frac{r_k^*}{r_k}<\frac{Kq'(x_0)}{a}\sum_{k=1}^n|r_k^*-r_k|\ (3)$$

由绝对连续的定义和（3），可知对于 $x_0\in[0,2\pi]$ 如果 $q'(x_0)$ 存在且有限，那么 f 在径向 $\{z=re^{ix_0}:r\geqslant a\}$ 绝对连续，由于几乎所有的 $\theta\in[0,2\pi]$，$q'(\theta)$ 都存在且有限，所以对于几乎所有 $\theta\in[0,2\pi]$，f 在 $\{z=re^{i\theta}:r\geqslant a\}$ 绝对连续。证毕。

以上定理中并没有证明 f 在 $z=0$ 附近的径向上是绝对连续的，那么它是否一定是绝对连续到 $z=0$ 呢？回答是不一定。

反例如下：设

$$f(z)=r^le^{i\theta},z=re^{i\theta}$$

这里 $l\leqslant K$ 且 $l<1$。

显然它是复平面到自身的保向同胚，而且对于任意的 $0<r_1<r_2,0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant2\pi$，

$$f(A(r_1,r_2;\theta_1,\theta_2))=A(r_1^l,r_2^l;\theta_1,\theta_2),$$

从而

$$\mathrm{mod}\,f(A(r_1,r_2;\theta_1,\theta_2))=\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\log\frac{r_2^l}{r_1^l}\leqslant$$

$$\frac{l}{\theta_2-\theta_1}\log\frac{r_2}{r_1}=l\mathrm{mod}\,A\leqslant K\mathrm{mod}\,A$$

但是，由 $\frac{\partial f}{\partial r}=lr^{l-1}e^{i\theta}$ 可知，当 $r\to0$ 时，$\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|=|lr^{l-1}|\to+\infty$ 这意味着在 $z=0$ 附近的径向上 $f(z)$ 不绝对连续。

考虑单位圆到单位圆的保向同胚映射，只要圆内的环和环的一部分满足模条件，同样可以得到相应的绝对连续性。

推论 设 $f(z)$ 是单位圆 $\triangle$ 到自身的一个保向同胚映射。如果 f 满足

$$\mathrm{mod}\,f(A)\leqslant K\mathrm{mod}\,A,$$

这里 K 是正常数，A 是单位圆内的环 $A(r_1,r_2)$ 或者环的一部分 $A(r_1,r_2;\theta_1,\theta_2)$，那么对于几乎所有的 $\theta\in[0,2\pi]$ 及任意的 $a>0$，f 在 $\{z=re^{i\theta}:a\leqslant r\leqslant 1\}$ 绝对连续。

证　令 $A = \{z = re^{i\theta} \mid r_1 < r < r_2, 0 < \theta \leq 2\pi\}$ 是复平面的环。假设

$$q(x) = m(f(A_x))$$

这里 $A_x = \{z = re^{i\theta} \mid 0 < r < 1, 0 < \theta < x\}$，而 $m(f(A_x))$ 是 $f(A_x)$ 的欧氏面积。

显然，$q(x)$ 是 $x \in [0, 2\pi]$ 的单调递增函数，因此几乎处处存在有限导数 $q'(x)$。

设 $q'(x_0)$ 存在并且有限，下面可证明 $f(re^{ix_0})$ 在 $a \leq r \leq 1$ 上绝对连续。

首先，选择一个正数 δ 使得 $x_0 + \delta < 2\pi$。设 (r_k, r_k^*)，$k=1, 2, \cdots, n$，是 $a \leq r \leq 1$ 的任意有限个互不重叠的小区间。

下面完全相同于前面定理的证明，马上可以得到结论。

参考文献：

[1] 李忠. 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用[M]. 北京:科学出版社,1988.

[2] AHLFORS L V. Lectures on quasiconformal mappings [M]. Princeton, New Jersey: Van Nostrand, 1966:381 -386.

[3] LEHTO V, VIRTANEN K. Quasiconformal Mappings in the Plane [M]. Second edition. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[4] GEHRING F W, VAISALA J. On the geometric definition for quasiconformal mappings [J]. Commentarii Math Helv, 1962, 36: 19 - 32.

[5] CHEN Z. Geometric characterization for affine mappings and Teichmüller mappings [J]. Studia Mathematica, 2003, 157(1): 71 - 82.

[6] ASTALA K. Area distortion of quasiconformal mappings [J]. Acta Math, 1994, 173: 37 - 60.

[7] ZHU H, ZHOU Z, HE C. The characterization of Grotzsch's problem in a domain [J]. J Fudan Univ, 1999, 38 (2): 205 - 207.

[8] STREBEL K. Extremal Teichmüller Mappings with Given Asymptotic Behaviour, Analysis and Topology [M] World Scientific, 1998: 677 - 695.

[9] HE C, LI Z. Quasiconformal mappings [J]. Contemporary Math, 1985, 48: 129 - 150.

[10] GEHRING F W, REICH E. Area distortion under quasiconformal mappings [J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1966, 388: 1 - 14.

[11] SLODKOWSKI Z. Holomorphic motions and polynomial hulls [J]. Proc Amer Math Sco, 1991, 111: 347 - 355.

[12] GARDINER F. Schiffer's interior variation and quasiconformal mappings [J] Duke Math J, 1975, 42: 371 - 380.

The Radial Continuity of Orientation-preserving Maps

LI Shu-long, SU Wei-xu, LIU Li-xin

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The radial absolutely continuity of the orientation-preserving homeomorphisms on the complex plane is studied. Under a definite modular condition, the orientation-preserving self-homeomorphisms between disks are absolutely continuous on almost every radial (except any neighborhood of the zero point) are proved by using the Rengel inequality.

Keywords: conformal modular; extremal length; absolutely continuous