Banach空间的非常B－正交性*

付向红[1]，黎永锦[2]
（1. 广东机电职业技术学院基础部，广东 广州 510515；
2. 中山大学数学系，广东 广州 510275）

摘　要：将实Banach空间中的B－正交推广为非常B－正交，证明非零元x和y非常B－正交当且仅当存在x的支撑泛涵f与y的支撑泛涵g使得$f(y) = g(x) = 0$，并讨论了它的一些重要性质。

关键词：B－正交；非常B－正交；支撑泛函；Banach空间
中图分类号：O177.2　**文献标识码**：A　**文章编号**：0529-6579（2008）01-0116-02

1　引言和定义

正交性是Hilbert空间和Banach空间的重要概论，它与Banach空间的很多重要性质都有密切的联系，因而正交性一直是Banach空间理论的一个重要的研究分支，很多类型的正交性都得到了很深入的讨论[1-6]。早在20世纪30年代，Birkhoff[7]就给出了Banach空间上的B－正交性的定义。

定义1[7]　设X是实数域（或复数域）K上的Banach空间，x，$y \in X$。如果对任意的$\lambda \in K$，有$\|x+\lambda y\| \geqslant \|x\|$则称$x$ B－正交于y，记作$x \perp_B y$。

在Banach空间x中，若x与y B－正交时，y与x也是B－正交的，我们说B－正交在Banach空间x中是对称的，关于B－正交的对称性Birkhoff有如下结果：

定理1[7]　如果X是三维或三维以上的Banach空间，那么B－正交具有对称性的充分必要条件是是一个内积空间。

B－正交的对称性在一般的Banach空间是不一定成立的，下面我们将它推广为非常B－正交，它具有对称性。

定义2　设X是数域K上的Banach空间，若对于任意的x，$y \in X$，a，$b \in K$都有$\|ax+by\| \geqslant \max\{|a|\ \|x\|, |b|\ \|y\|\}$，则称$x$与$y$是非常B－正交的，记作$x \perp_{\blacktriangle} y$。

明显地，若x与y是非常B－正交的，则x与y一定是B－正交的，但反过来有时是不成立的。甚至在有限维的Banach空间，x与yB－正交时，x与y也可以不是非常B－正交的。

例1：在R^2上定义范数$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_1 - x_2|\}$，对于$e_1 = (1, 0)$，$e_2 = (0, 1)$，和$\forall \lambda \in R$有$\|e_1 + \lambda e_2\| = \max\{1, |1-\lambda|\} \geqslant 1 = \|e_1\|$，因此$e_1 \perp_B e_2$。

然而，当$0<\lambda<1$时，$\|e_2+\lambda e_1\| = \max\{|\lambda|, |\lambda - 1|\} \geqslant \|e_2\|$不能成立，即$e_2 \perp_B e_1$不成立，从而$e_1$与$e_2$不是非常B－正交的。

根据B－正交和非常B－正交的定义，不难证明下面的定理。

定理2　设X是Banach空间，对于任意$x, y \in X$，$x \perp_{\blacktriangle} y$的充要条件是$x \perp_B y$且$y \perp_B x$。

定义3　设X是实数域R上的Banach空间，Y是X的子集，$x \in X$，如果对任意$y \in Y$，都有$x \perp_{\blacktriangle} y$，则称$x \perp_{\blacktriangle} y$；于是可以定义$Y$的非常B－正交补$Y^{\blacktriangle} = \{x \in X: x \perp_{\blacktriangle} Y\}$。

设X是实数域R上的Banach空间，X^*是它的共轭空间，由Hahn－Banach定理可知，对于任意的$x \in X$，有$f \in X^*$，使得$\|f\| = 1, f(x) = \|x\|$，记x的支撑泛函全体为$A_x = \{f \in X^*: \|f\| = 1, f(x) = \|x\|\}$。

2　主要结果和证明

定理3　设X是实数域$\mathbb{R}$上的线性赋范空间，x，$y \in X$，且x，y不为0，那么以下命题等价：

（1）$x \perp_{\blacktriangle} y$；

（2）存在$f \in A_x$，使得$f(y) = 0$并且存在$g \in A_y$，使得$g(x) = 0$。

证明　（1）⇒（2），由于$x \perp_{\blacktriangle} y$，即对于$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$，有$\|a_1 x + a_2 y\| \geqslant \max\{|a_1|\ \|x\|, |a_2|\ \|y\|\}$，因此$\|a_1 x + a_2 y\| \geqslant \max\{|a_1|\ \|x\|, |a_2|\ \|y\|\} > 0$，从而有$d$（$x$，*span*

* 收稿日期：2007－07－24
基金项目：广东省高校自然科学基金重点资助项目（05Z026）
作者简介：付向红（1968年生），女，高级讲师；通讯联系人：黎永锦；E-mail：stslyj@mail.sysu.edu.cn

$\{y\}) = \|x\|$。由 Hahn-Banach 定理可知存在 $f \in A_x$，使得 $f(y) = 0$。同理，存在 $g \in A_y$，使得 $g(x) = 0$。

（2）⇒（1），因为存在 $f \in A_x$, $\|f\| = 1$, 使得 $f(y) = 0$。

所以，$\|a_1x\| = f(a_1x) = f(a_1x + a_2y) \leqslant \|f\| \|a_1x + a_2y\| \leqslant \|a_1x + a_2y\|$。

类似地，有

$$\|a_2x\| = g(a_2x) = g(a_1x + a_2y) \leqslant \|g\| \|a_1x + a_2y\| \leqslant \|a_1x + a_2y\|$$

从而，对于任意 $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$，有 $\|a_1x + a_2y\| \geqslant \max\{|a_1| \|x\|, |a_2| \|y\|\}$，即有 $x \perp_{\blacktriangle} y$。

定理 4　设 X 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性赋范空间，Y 是 X 的线性子空间，如果 $\mathrm{d}(u,Y) = \|u\|$，那么以下命题等价：

（1）$u \in Y^{\blacktriangle}$；

（2）存在一个 $f \in A_u$，使得 $f|_Y = 0$，并且对任意的 $y \in Y$，存在 $g \in A_y$，使得 $g(u) = 0$。

证明　（1）⇒（2），由于 $\mathrm{d}(u,Y) = \|u\|$，因此由 Hahn-Banach 定理可知存在 $f \in A_x$，使得 $f(y) = d(u,Y) = \|u\|, f(Y) = 0$。对任意的 $y \in Y$，由 $u \in Y^{\blacktriangle}$ 可知存在 $g_y \in A_u$，使得 $g_y(u) = 0$。

（2）⇒（1），因为存在一个 $f \in A_u$，使得 $f|_Y = 0$ 即对任意的 $y \in Y$，有 $f(y) = 0$，有因为对任意的 $y \in Y$，存在 $g \in A_y$，使得 $g(u) = 0$，所以由定理 4 可得对任意的 $y \in Y$，$u \perp_{\blacktriangle} Y$，故 $u \in Y^{\blacktriangle}$。

利用前面的定理，不难得到下面的推论。

推论 1　如果 X 是三维或三维以上的 Banach 空间，那么 B－正交都是非常 B－正交的充分必要条件是 X 是一个 Hilbert 空间。

参考文献：

[1] ALBER YA I. James orthogonality and orthogonal decompositions of Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 2005,312(1):330－342.

[2] CHEN S, HUDZIK H, WANG Y. Orthogonally complemented hyperplanes in Orlicz function spaces [C]. Comment. Math. Prace Mat. Tomus specialis in Honorem Juliani Musielak,2004:71－82.

[3] MAZAHERI H, VAEZPOUR S M. Orthogonality and ε－Orthogonality in Banach spaces [J], Aust J Math Anal Appl,2005,2(1):5.

[4] MAZAHERI H, MAALEK GHAINI F M. Quasi－orthogonality of the best approximant sets [J]. Nonlinear Anal, 2006,65(3):534－537.

[5] SHOJA A, MAZAHERI H. General orthogonality in Banach spaces [J]. Int J Math Anal,2007,1(9－12):553－556.

[6] SUNDARESAN K. Orthogonality and nonlinear functionals on Banach spaces [J]. Proc Amer Math Soc,1972,34:187－190.

[7] BIRKHOFF G. Orthogonality in linear metric spaces [J]. Duke Math J,1935,1:169－172.

The Very B-orthogonality in Banach Space

FU Xiang-hong[1], *LI Yong-jin*[2]

(1. Department of Basic, Guangdong Vocational College of Mechanical and Electrical Technology, Guangzhou 510515, China;

2. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: B-orthogonality in real Banach space is extended to the very B-orthogonality. It is proved for any $x \neq 0$, $y \neq 0$, x and y are very B-orthogonal if and only if there exists support functional of x, with $f(y) = 0$ and there exists g which is a support functional of y with $g(x) = 0$, and some properties of very B-orthogonality are obtained.

Key words: B-orthogonality; very B-orthogonality; support functional; Banach spaces