

## 尺度模型在水文频率分析中的应用\*

许月萍<sup>1</sup>, 汤有光<sup>2</sup>, 王锐琛<sup>3</sup>

(1. 浙江大学建工学院水文与水资源工程研究所, 浙江 杭州 310058;  
2. Department of Civil Engineering, Hong Kong University of Science and Technology,  
Hong Kong; 3. 西北勘测设计研究院, 陕西 西安 710065)

**摘要:** 简要介绍了一种新的结合物理过程的尺度模型, 并分析比较了应用尺度模型和传统频率分析方法(即直接计算法)来计算设计降雨的优劣势。使用香港新界北雨量站数据, 发现尺度模型在降雨历时 120, 360, 720 和 1 440 min 范围内比较合理, 计算得出的设计降雨比直接计算法得出的要小, 且随着重现期的增加, 两者的差异也相应地增加。结合了物理特性的尺度模型相较直接计算法更加合理, 可以作为传统频率分析方法的一种替代或补充方案来计算设计降雨值。

**关键词:** 直接计算法; 尺度模型; 设计降雨

**中图分类号:** TV211; P343 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579(2009)06-0127-05

### Application of Scale Model in Hydrological Frequency Analysis

XU Yueping<sup>1</sup>, TUNG Yeoukoug<sup>2</sup>, WANG Ruichen<sup>3</sup>

(1. Institute of Hydrology and Water Resources, Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2. Department of Civil Engineering, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, China; 3. Xibei Hydroelectric Investigation & Design Institute, Xi'an 710065, China)

**Abstract:** Incorporating physical characteristics of processes in hydrological analysis is one of the focuses of hydrological field. A scale model is introduced and its merits and limitations in calculating design rainfall depths, compared to traditional frequency analysis (direct method), are analyzed in this paper. The data were collected from rainfall gauges of Hong Kong New Territory. It is found that the scale model is applicable for rainfall durations of 120, 360, 720 and 1 440 min. The calculated rainfall depths are smaller than those from the direct method. The differences between rainfall depths increase with return periods. It is concluded that the scale model is more reasonable than traditional frequency analysis and can be used as an alternative or complement to design rainfall depth calculation.

**Key words:** direct method; scale model; design rainfall depths

设计降雨通常由传统的频率分析方法来计算, 如我国普遍采用皮尔逊 III 型来描述降雨的概率分布。由于对水文过程物理意义的不充分理解, 水文过程特性的获得一般是基于数据的分析。传统频率分析方法正是基于数据之上, 虽具有明确的频率概

念, 但其具体物理形成过程却不甚清楚。一直以来, 传统频率分析方法在水文领域中的应用颇有争议<sup>[1-3]</sup>, 主要因为它是一种纯统计学的方法, 缺少对水文物理过程的分析。近些年来, 在水文过程分析中考虑其物理特性是国际水文研究领域的焦点之

\* 收稿日期: 2008-11-03

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目(Y507071); 国家自然科学基金资助项目(50809058); 教育部博士点基金资助项目(200803351029)

作者简介: 许月萍(1975年生), 女, 副教授; E-mail: yuepingxu@zju.edu.cn

—<sup>[3-4]</sup>。本文首先介绍了尺度模型,并应用它来计算不同降雨历时的设计降雨值,最后比较分析了应用传统频率分析方法和尺度模型的优劣势。

## 1 尺度模型

假定降雨过程是一个多梯级过程<sup>[5]</sup>,可以获得如下的降雨尺度模型。假定  $I_d$  和  $I_{\lambda d}$  分别为降雨历时为  $d$  和  $\lambda d$  的年最大降雨强度(或降雨深)。尺度参数  $\lambda$  是用来转换降雨历时从  $d$  至  $\lambda d$  的乘子。根据文献 [6],基本的尺度模型主要描述为

$$E[I_{\lambda d}^i] = \lambda^{in} E[I_d^i] \quad (1)$$

其中,  $E$  代表统计矩;  $i$  代表统计矩的阶数;  $in$  为  $i$  阶的尺度指数。从式 (1) 可以看出,不同尺度的降雨统计矩可以通过尺度  $\lambda$  来进行转换。

如果尺度指数和统计矩的阶数具有线性关系,那么此性质称之为“广义简单标度”。这里,尺度指数为不同阶数的统计矩和尺度参数对数线性回归的坡度值。然而,经验证明,一些水文过程并不遵循广义简单尺度关系,通常可以从水文过程分析中观察到其多尺度特性<sup>[4,6-7]</sup>。当水文过程呈现多尺度特性时,尺度指数跟统计矩阶数就不再有线性比例关系。

当尺度指数大于  $in$  时,其物理过程是消耗性的。相应地,可以假设:

$$E[I_{\lambda d}^i] = \lambda^{\alpha_i} E[I_d^i] = \lambda^{i\varphi_i} E[I_d^i] \quad (2)$$

其中,  $\alpha_i$  是尺度指数;  $n = \alpha_1$  是物理场均值的尺度指数;  $\varphi_i$  是描述统计矩阶数尺度指数偏离线性特性的函数,  $\varphi_1 = 1$ 。

假定  $\lambda = d/d_*$ , 对于前两阶统计矩,方程 (2) 变为:

$$\begin{aligned} E[I_d] &= E[I_{d_*}] * \frac{d^n}{d_*^n}; \\ E[I_d^2] &= E[I_{d_*}^2] * \frac{d^{2\varphi_2}}{d_*^{2\varphi_2}} \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $d_*$  是参考降雨历时;  $d$  是所关注的降雨历时;  $I_{d_*}$  表示参考降雨历时  $d_*$  的最大降雨强度或降雨深。

不失一般性,这里只考虑设计降雨深。根据文献 [8],重现期为  $T$  的降雨深可以用下式表示:

$$D = E[I_d] + K_T (\text{Var}[I_d])^{1/2} \quad (4)$$

其中,  $K_T$  表示频率系数,是重现期  $T$  和概率分布类型的函数,不同概率分布的  $K_T$  各不相同,对给定的概率分布,  $K_T$  通常可由  $K-T$  关系曲线来确定,不同概率分布的  $K-T$  理论关系曲线可以参见文献 [8],例如在本文后面算例中的理论概率分布为广

义极限分布,其  $K_T$  见式 (5)。  $E[I_d]$  和  $\text{Var}[I_d]$  分别为降雨过程的均值和方差。根据文献 [6],统计矩是用传统矩法估计的,本文中同样应用传统矩法。

$$K_T = -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \left\{ 0.5772 + \ln \left[ \ln \left( \frac{T}{T-1} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

把 (3) 式代入 (5) 式,设计降雨深的计算公式如下:

$$D = a_1 \left[ 1 + K_T \sqrt{(a_2/a_1^2) d^{2(\varphi_2-1)n} - 1} \right] d^n \quad (6)$$

其中,  $a_1 = \frac{E[I_{d_*}]}{d_*^n}$ ;  $a_2 = \frac{E[I_{d_*}^2]}{d_*^{2\varphi_2}}$ ;  $\varphi_2$  是二阶统计矩偏离线性特性的系数;  $a_1$  是参考降雨历时的年最大降雨深经重新标度的平均值;  $a_2$  是参考降雨历时的年最大降雨深经重新标度的二阶统计矩。如式 (6) 所示,计算不同重现期的降雨深  $D$ ,首先需要估计四个参数  $n, a_1, a_2$  和  $\varphi_2$ 。这些参数主要通过前二阶统计矩的对数线性回归获得的。

## 2 传统频率分析方法 (直接计算法)

传统频率分析方法单纯用数学统计的方法来优选频率曲线,其中线性矩法 (L-moment approach) 是传统频率分析中曲线拟合的最新方法之一,且在水文中的应用日益增多<sup>[9-11]</sup>。因线性矩法对洪水或降雨的极大值和极小值不太敏感,不确定性较小,是在文献 [12] 定义的概率权重矩基础上将排序系列的值进行一定的线性组合来计算矩的<sup>[13]</sup>,这里介绍线性矩法。

假定一水文随机变量  $X$  服从某概率分布函数,从中选取  $n$  个样本。把这  $n$  个样本按从小到大的顺序进行排列,则有  $X_{(1)n} \leq X_{(2)n} \leq \dots \leq X_{(i)n} \leq \dots \leq X_{(n)n}$ , 其中  $k$  表示  $n$  个样本中第  $k$  小值的序号。根据文献 [13] 和 [14],分布函数的前四阶线性矩分别为:

$$\lambda_1 = E[X]; \lambda_2 = \frac{1}{2} E[X_{(1)2} - X_{(2)2}]$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} E[X_{(1)3} - 2X_{(2)3} + X_{(3)3}] \quad (7)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4} E[X_{(1)4} - 3X_{(2)4} + 3X_{(3)4} - X_{(4)4}]$$

这里  $X_{(i)n}$  为样本大小为  $n$  的第  $i$  个最大的观测值 ( $i=1$  即为最大观测值)。其中一阶线性矩是均值,二阶线性矩为两个随机选择的观测值期望差的比例,三阶跟四阶线性矩分别表示概率分布函数的偏态和离势程度(峰度)。

前四阶的无偏差概率权重矩估计值分别为:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \bar{X}; b_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-j)X_{(j)}}{n(n-1)} \\
 b_2 &= \sum_{j=1}^{n-2} \frac{(n-j)(n-j-1)X_{(j)}}{n(n-1)(n-2)}; \\
 b_3 &= \sum_{j=1}^{n-3} \frac{(n-j)(n-j-1)(n-j-2)X_{(j)}}{n(n-1)(n-2)(n-3)}
 \end{aligned} \tag{8}$$

其一般形式为：

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\binom{n-j}{r} X_{(j)}}{\binom{n-1}{r}} = \frac{1}{(r+1)} \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\binom{n-j}{r} X_{(j)}}{\binom{n}{r+1}} \tag{9}$$

其中  $r = 1, \dots, n-1$ 。

对任何概率分布函数，线性矩的估计值可以用上述无偏差概率权重矩计算：

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_1 &= b_0; \hat{\lambda}_2 = 2b_1 - b_0; \hat{\lambda}_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0; \\
 \hat{\lambda}_4 &= 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0
 \end{aligned} \tag{10}$$

线性矩偏态系数的定义如下：

$$\tau_3 = \lambda_3 / \lambda_2 \tag{11}$$

线性矩峰度系数的定义如下：

$$\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2 \tag{12}$$

其估计值分别为：

$$\hat{\tau}_3 = \hat{\lambda}_3 / \hat{\lambda}_2; \hat{\tau}_4 = \hat{\lambda}_4 / \hat{\lambda}_2 \tag{13}$$

线性矩的估计值可以用来估算不同概率分布函数的参数，从而得到不同水文变量的分布函数。利用线性矩来优选分布函数或线型时，通常使用线性矩比例图 (L-moment ratio diagram)<sup>[13]</sup>。图 1 所示为部分常用概率分布函数的线性矩比例图，其中横坐标为线性矩偏态系数，纵坐标为线性矩峰度系数。样本值  $\hat{\tau}_3$  和  $\hat{\tau}_4$  在线性矩比例图的位置决定了该随机变量  $X$  属于何种概率分布函数。

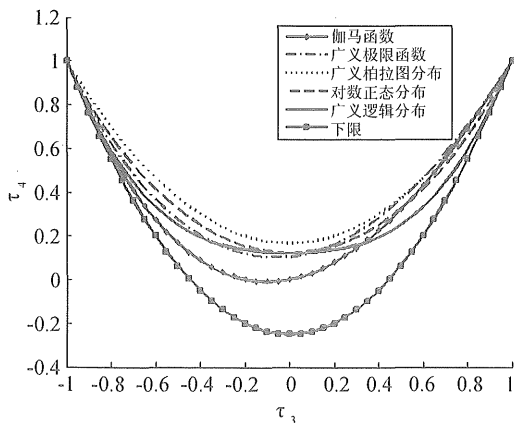


图 1 线性矩比例图

Fig. 1 L-moment ratio diagram

### 3 算例分析

为比较尺度模型和直接算法对设计降雨的影响，选用位于香港北新界的雨量站  $N_3$  的数据。在香港，只有香港天文台有超过 100 a 的雨量资料，对其它雨量站，仅仅 20 a 的数据可以用来分析。考虑降雨历时为 5、10、15、30、60、120、360、720 和 1 440 min (即 1d)。

图 2 为尺度模型的  $\lambda$  和统计矩的对数关系。从图 2 可以看出，单一的线性回归分析并不能得出很好的回归效果。根据图 2 和香港地区不同历时的降雨性质，所考虑的降雨历时有两个尺度范围，一个是从 5 到 60 min，另一个是从 120 min 到 1 d。因此，本文考虑的尺度范围为历时大于 60 min 的降雨，其中 60 min 作为尺度模型的参考历时。

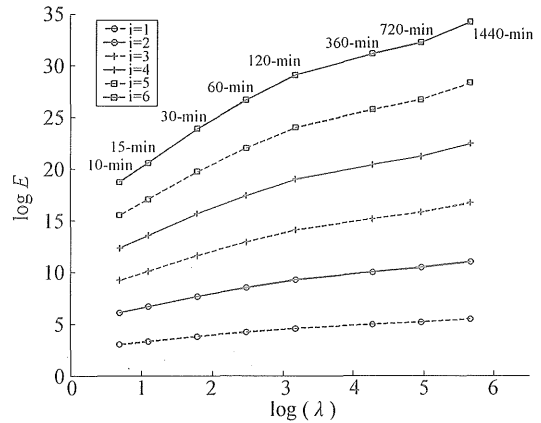


图 2  $\lambda$  和统计矩的对数关系

Fig. 2 Relationship between  $\lambda$  and statistical moments in log-space

经回归分析，可以得出尺度模型的参数  $n = 0.36$ ,  $a_1 = 74.38$ ,  $\varphi_2 = 0.98$  和  $a_2 = 6\ 308.1$ 。

为方便尺度模型和传统频率分析方法之比较，在本文中，直接算法同样只考虑从 120 min 到 1 d 的降雨历时。首先从图 3 的线性矩比例图可以看出，单从拟合好坏上来说，分析 20 a 的雨量数据可以得出，120 和 360 min 降雨过程遵循广义极限分布，720 min 降雨遵循广义逻辑分布函数，而 1 d 降雨遵循广义帕拉图分布。因实际的理论分布只有一个 (假定不知道降雨的理论分布)，这里采用拟合最好的广义极限分布函数<sup>[15]</sup>。

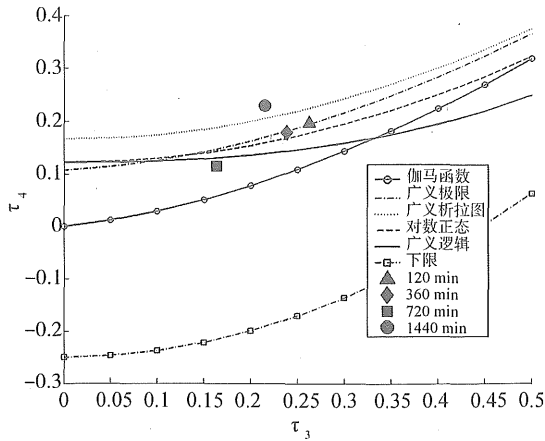


图 3 线性矩比例图

Fig. 3 L-moment ratio diagram

图 4 为直接计算法得出的不同降雨历时的设计降雨值。图中,  $T$  为重现期,  $D$  为降雨深。从图 4 可以看出, 降雨历时为 360 min 和 720 min 的设计降雨在重现期  $T=1\ 000\ a$  之前有交叉现象, 这种现象是不符合物理过程特性的。出现这种现象的原因与没有考虑不同历时降雨之间的相依关系有关。而实际上, 他们之间是有一定的依赖关系的。

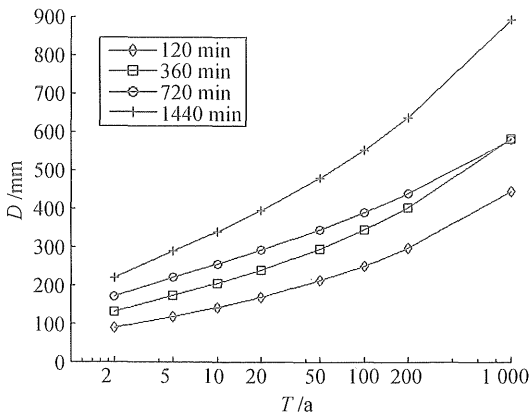


图 4 直接计算法得出的设计降雨深

Fig. 4 Resign rainfall depths from L-moment approach

图 5 为尺度模型得出的设计降雨值, 其理论分布采用广义极限分布函数。从图 5 可以看出, 在重现期  $T=1\ 000\ a$  之前, 交叉现象已经消失, 如果想彻底解决可能的交叉 (如在  $T=10\ 000\ a$ ), 则需要增加一定的约束条件。

尺度模型因同时考虑不同尺度的设计降雨, 即考虑了不同历时降雨之间的相依关系, 因而其结果从物理上来说更为合理。交叉现象的传统解决方法, 是把不同历时的降雨量, 分别计算或绘制频率曲线, 然后进行平衡、协调工作而获得设计降雨的

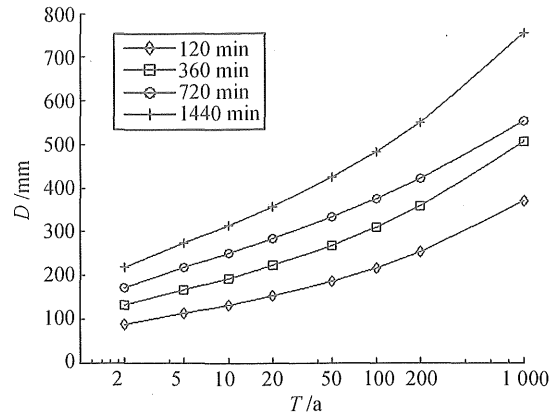


图 5 尺度模型得出的设计降雨深

Fig. 5 Resign rainfall depths from the proposed scale model

过程, 并没有考虑不同历时降雨量之间的相关关系。“平衡和协调工作”只是从数学上来说让设计降雨避免相交, 而非物理上。因此, 尺度模型更具有优势。

表 1 表示 2 种方法下不同降雨历时不同重现期的降雨深值, 这里还同时列出了用设计洪水计算规范推荐之皮尔逊 III 型概率分布利用线性矩法算出的结果。由该表可以看出, 尺度模型得出的降雨深值一般比直接计算法得出的值要小, 而且随着重现期的增加, 两者的差异也相应地增加, 这就说明, 随着重现期增加, 两种方法引起的不确定性增大。皮尔逊 III 型计算得出的结果跟直接计算法得出的结果相差一开始并不大, 重现期增加时, 直接计算法得出的值比皮尔逊 III 型要大。尺度模型和直接计算法两种方法使用了同样的降雨数据, 尺度模型因结合考虑了降雨过程的物理特性而使其结果更加合理。对其它降雨历时, 可以得出同样的结论。这里不再附结果。

表 1 两种方法下降雨历时为 120 min 的不同重现期的降雨深

Table 1 Rainfall depths for duration 120 minutes calculated with two methods

| 计算方法<br>重现期 | 直接计算法<br>mm | 尺度模型   | 差异<br>% | 皮尔逊 III 型<br>mm |
|-------------|-------------|--------|---------|-----------------|
| 5 a 一遇      | 118.10      | 112.74 | 5       | 120.13          |
| 10 a 一遇     | 141.70      | 131.52 | 7       | 143.62          |
| 20 a 一遇     | 168.37      | 152.75 | 9       | 166.43          |
| 50 a 一遇     | 210.64      | 186.39 | 12      | 196.69          |
| 100 a 一遇    | 249.55      | 217.37 | 13      | 220.16          |
| 1 000 a 一遇  | 442.12      | 370.65 | 16      | 295.23          |

## 4 结 论

本文介绍了直接计算法和尺度模型两种计算设计降雨的方法, 结果表明尺度模型得出的设计降雨值比直接计算法得出的值要小, 而且随着重现期的增加, 两者的差异也越来越大。尺度模型因考虑了水文过程的物理特性, 其结果更为合理, 因此尺度模型可以作为传统频率分析方法的一种新的替代方案或补充方案加以推广应用。

### 参考文献:

- [1] PANDEY G, LOVEJOY S, SCHERTZER D. Multifractal analysis of daily river flows including extremes for basin of five to two million square kilometers, one day to 75 years [J]. *Journal of Hydrology*, 1998, 208: 62 - 81.
- [2] 王国安. 可能最大暴雨和洪水计算原理与方法 [M]. 北京: 中国水利电力出版社, 1999.
- [3] KLEMES V. Tall tales about tails of hydrological distributions. I. *Journal of Hydrological Engineering*, 2000, 5 (3): 227 - 231.
- [4] HURBERT P, TCHIGUIRINSKAIA I, SCHERTZER D. Predetermination of floods [M]// Vasiliev et al eds. *Extreme Hydrological Events: New Concepts for Security*, 2007: 185 - 198.
- [5] GUPTA V K, WAYMIRE E. Multiscaling properties of spatial rainfall and river flow distributions [J]. *Journal of Geophysical Research* 95 (D3), 1990: 1999 - 2009. DOI: 10.1002/hyp.
- [6] BURLANDO P, ROSSO R. Scaling and multiscaling models of depth-duration-frequency curves for storm precipitation [J]. *Journal of Hydrology*, 1996, 187: 45 - 64.
- [7] VENEZIANO D, FURCOLO P. Multifractality of rainfall and scaling of intensity-duration-frequency curves [J]. *Water Resources Research*, 2002, 38 (12): 42 - 1 - 42 - 12.
- [8] CHOW V T, MAIDMENT D R, MAYS L W. *Handbook of Applied Hydrology* [M], McGraw Hill: New York, 1988.
- [9] 熊立华, 郭生练. L-矩在区域洪水频率分析中的应用 [J]. *水力发电*, 2003, 29 (3): 6 - 8.  
XIONG Lihua, GUO Shenglian. Application of L-moments in the regional flood frequency analysis [J]. *Water Power*, 2003, 29(3): 6 - 8.
- [10] 陈元芳, 王庆荣, 沙志贵等. 线性矩法在长江中下游区域水文频率计算中的应用 [J]. *河海大学学报: 自然科学版*, 2002, 31 (2): 207 - 211.  
CHEN Yuanfang, WANG Qingrong, SHA Zhigui, et al. Application of L-moment based regional flood frequency analysis method to middle and lower Yangtze River [J]. *Journal of Hohe University: Natural Sciences*, 2002, 31 (2): 207 - 211.
- [11] GONZOLEZ J, VALDES J B. A regional monthly precipitation simulation model based on an L-Moment smoothed statistical regionalization approach [J]. *Journal of Hydrology*, 2007, doi: 10.1016/j.jhydrol.2007.09.059.
- [12] GREENWOOD J A, LANDWEHR J M, MATALAS N C. Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of distribution expressible in inverse form [J]. *Water Resources Research*, 1979, 15(5): 1049 - 1054.
- [13] HOSKING J R M, WALLIS J R. *Regional Frequency Analysis—an approach based on L-moments* [M]. Cambridge University Press, 1997.
- [14] MAIDMENT D R. *Handbook of Hydrology* [M]. New York: McGraw-Hill Inc, 1993.
- [15] TUNG Y K, YEN B C, MELCHING C S. *Hydrosystems Engineering Reliability Assessment and Risk Analysis* [M]. McGraw-Hill Professional Publishing, 2005.