第 49 卷 第 1 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 49 No. 1
2010 年 1 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 2010

具有通用机的多组工件的 $Q//C_{max}$ 问题的近似算法*

丁 伟
（中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘 要： 研究的目的在于解决实践中对多组任务的优化排序问题，即在最短的时间内完成所有给定的任务。由于这类问题往往都是 NP 完全问题，人们通常寻求其近似算法。提出了一种改进的 LPT 算法，利用“最大相对加工时间”准则和“首先空闲”准则，讨论了将 n 组工件安排在 n 台速度不同的专用机，一台速度小于专用机的通用机上的 C_{max} 问题，得到了利用该近似算法所得的解 T 与最优解 T^* 的一个估计：$T/T^* \leqslant 1 + 1/\sum_{i \in I} s_i$，其中 I 表示在最后完工的工件完工之前，在通用机上至少安排了一个工件的工件组的下标集合。由此得出采用该近似算法对工件排序，在最差情况下要比最优排序多出 $1/\sum_{i \in I} s_i$ 的时间。

关键词： 启发式算法；性能指标；LPT 算法；通用机；专用机
中图分类号： O223 **文献标志码：** A **文章编号：** 0529-6579（2010）01-0005-04

Heuristic Algorithm of the $Q//C_{max}$ Problem on Multi-Tasks with Uniform Processors

DING Wei
(School of Mathematics and Computional Science,
Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: To study the C_{max} problem on many-group jobs with one general-purpose machinery and n special-purpose machineries that they are with the different speeds. This problem is always NP-C problem, so the approximate method is usually to be found. An improved LPT algorithm and the upper bound performance are given. The ratio of the approximate solution and the best way is $T/T^* \leqslant 1 + 1/\sum_{i \in I} s_i$, it means that the complete time using this approximate method is $1/\sum_{i \in I} s_i$ more than the best in worst condition.

Key words: heuristic algorithm; performance indexes; LPT algorithm; general-purpose machinery; special-purpose machinery

关于排序问题的第一篇论文由 Johnson[1] 于 1954 年发表，它是关于两台机器的排序问题。由于该类问题是 NP-Hard 的，人们在解决该类问题时经常使用的一个启发式规则是 LPT（Longest Processing Time）规则，即一旦有机器空闲，总是把等待加工的最大工件安排给这个首先空闲的机器加工。LPT 规则最初由 Graham[2] 提出，并在该文献中对这一经典的平行机调度问题给出了应用 LPT 规则得到的近似解 T 与最优解 T^* 的一个比值：$\frac{T}{T^*} \leqslant \frac{4}{3} - \frac{1}{(3m)}$，其中 m 是机器的数目；后来 Coff-

* 收稿日期：2009-05-15
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10531040）
作者简介：丁伟（1969 年生），女，讲师；E-mail：dingwei@mail.sysu.edu.cn

man[3] 将其改进为：$\dfrac{T}{T^*} \leqslant \dfrac{(n+1)}{n} - \dfrac{1}{(nm)}$，其中 n 是工件的数目；Webster[4] 对将 n 个工件安排在 m 台同速度的平行机的情形，给出了 LPT 算法是最优算法的充分条件：如果 $p_j(j=1,\cdots,n)$ 表示工件的加工时间，若对所有的 $j=1,\cdots,n-1$ 均有 $\dfrac{p_j}{p_{j+1}}$ 是整数，那么 LPT 算法可得到最优解；Gonzalez[5] 研究了 m 台速度不同的平行机的调度问题，并得到了在 LPT 算法下的界：$\dfrac{T}{T^*} \leqslant \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{(2m)}$；Chen[6] 也考虑了 m 台速度不同的并行机的调度问题，他令 r_m 是最快速度与最慢速度的比值，运用 LPT 算法得到界：$\dfrac{T}{T^*} \in \left[1 + \dfrac{(N_m - 1)r_m}{3N_m}, 1 + \dfrac{r_m}{3}\right]$，其中 $N_m = (3/\sqrt{e})\left(\dfrac{3}{2}\right)^m - 2$；Kovacs[7] 考虑了 $m-1$ 台机器速度相同，有一台机器速度比较快的情形，作者得到了一个 LPT 算法下的紧界：$\dfrac{T}{T^*} \leqslant \dfrac{(\sqrt{3}+1)}{2} \approx 1.366$。作者同时还考虑了另一种机器速度均是 2^n 的情形，得到了 LPT 算法下的界：$\dfrac{41}{30} < \dfrac{T}{T^*} < \dfrac{42}{30}$。

在实际应用中，存在着一类关于多组工件在多组加工速度不同的机器上的排序问题，该 C_{max} 问题要求工件在机器上的一种安排，使得从第一个工件开始加工时刻起，到最后一个工件完成加工时刻止的时间跨度最小。例如在纺纱的生产工艺流程中，需要将两种不同旋转方向的纱（正纱和反纱）合并成一股纱，两股纱分别有各自的一组专用加工机器，相互之间不能混淆加工，实际中还有一类能加工两种纱的通用机器。对此类 C_{max} 问题，许多学者已经进行了广泛的研究[8-13]。文献［8-10］针对两组工件，两台速度不同专用机的情形，分别就一台通用机、两台通用机和 m 台通用机的情形的到了不同的紧界：4/3、3/2 和 2；文献［11-13］针对 n 组工件，n 台专用机和一台通用机（速度相同）的情形，分别讨论了 $n=3,4$ 和一般的 n 的情形，分别得到了界：4/3、5/4 和 $\dfrac{(n+1)}{n}$。

本文在文献［8-12］的基础上讨论一种更为复杂的情形：有 n 组工件 $L_r = \{t_{ri}, i \in I_r\}$，$I_r = \{1,2,\cdots,n_r\}$，$r = 1,2,\cdots,n$，$n_r$ 为非负整数，t_{ri} 代表工件并表示其绝对加工时间；有 $n+1$ 台机器 $\{M_l, l = 1,2,\cdots,n+1\}$，其中 M_1，M_2，…，M_n 分别为工件组 L_1，L_2，…，L_n 的专用机，其加工速度分别为 s_1，s_2，…，s_n，M_{n+1} 为通用机，可加工任何一组工件，由于在实际中通用机的加工速度往往不大于专用机的加工速度，所以我们不失一般性地假设通用机的加工速度为1，且有 $s_i \geqslant 1$，$i = 1,2,\cdots,n$。假设工件之间是独立的，与加工次序无关，加工是不允许中断的，则问题为：将 n 组工件安排在 $n+1$ 台速度不同的机器上，使其最后完工时间最小。

本文就 n 组工件，n 台专用机，一台通用机，且专用机的加工速度不小于通用机的加工速度的情形展开了讨论，在方法上，利用改进的 LPT 算法，我们可得到结果：

$$\frac{T}{T^*} \leqslant 1 + \frac{1}{\sum\limits_{i \in I} s_i} \tag{1}$$

其中 I 表示在最后完工的工件完工之前，在通用机上至少安排了一个工件的工件组的下标集合。推广了文献［8-12］的结果。

1 M-LPT$_1$ 算法及有关性质

与经典的 LPT 算法相对应，我们提出了一种改进的 LPT 算法，即：M-LPT$_1$ 算法。本节主要讨论 M-LPT$_1$ 算法的步骤和相关的重要性质。

M-LPT$_1$ 算法首先对 n 个工件组按其总的相对加工时间的长短从大到小排序，即：$\dfrac{T_1}{s_1} \geqslant \dfrac{T_2}{s_2} \geqslant \cdots \geqslant \dfrac{T_n}{s_n}$，并对每个工件组中的工件按其绝对加工时间从大到小排序，即：$t_{ri} \geqslant t_{ri+1}$，$r = 1,2,\cdots,n$，$i = 1,2,\cdots,n_r - 1$，假设用 t_{rk} 表示排序后的第 r 个工件组中的第 k 个工件；若工件 t_{rk} 先于 $t_{r'k'}$ 被分配，则记作 $t_{rk} < t_{r'k'}$；若工件 t_{rk} 分配给机器 M_l，则记作 $t_{rk} \in M_l$；$MT_l(t)$ 表示排序后工件 t 被安排之前各机器上的最后绝对完工时间；MT_l 表示所有工件被安排完之后各机器上的最后完工时间；$ML_l(t)$ 表示工件 t 被安排之前各机器上的工件集合，并记

$$T_r = \sum_{i=1}^{n_r} t_{ri}, r = 1,2,\cdots,n$$

$$MT_l(t) = \sum_{t' \in M_l, t' < t} t', MT_l = \sum_{t \in M_l} t, l = 1,2,\cdots,n+1$$

$$ML_l(t) = \{t' \mid t' < t, t' \in M_l\}, l = 1,2,\cdots,n+1$$

$L = (L_1, L_2, \cdots, L_n)$ 表示全体工件，$|L_r|$ 表示 L_r

中工件的个数，记 $|L| = |L_1| + |L_2| + \cdots + |L_n|$。

假定算法是按各组工件下标递增的次序将工件逐个分配到有关机器上去的，设 L_r 中第 k_r 个工件以前的工件已被分配，工件 t_{rk_r} 在等待分配，则称当前 $t_{1k_1}, t_{2k_2}, \cdots, t_{nk_n}$ 在候选。

定义 1　在 $t_{1k_1}, t_{2k_2}, \cdots, t_{nk_n}$ 候选时，工件组 L_r 的“专用机可能承担的绝对加工时间（SMT）”为

$$SMT_r(k_r) = T_r - \sum_{t_{ri} \in M_{n+1}, i < k_r} t_{ri}, r = 1,2,\cdots,n$$

当某一组工件 L_r 为空集时，$SMT_r = SMT_r(k) \equiv 0$，$k$ 为任一正整数。

定义 2　在 t_{rk_r} 候选时，工件组 $L_r (r = 1,2,\cdots,n)$ 的“相对 SMT”为

$$\frac{SMT_r(k_r)}{s_r}, r = 1,2,\cdots,n$$

M-LPT$_1$ 算法的步骤：

（1）预排序：使 $\frac{T_1}{s_1} \geqslant \frac{T_2}{s_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{T_n}{s_n}$，$t_{ri} \geqslant t_{ri+1}, i = 1,2,\cdots,n_r - 1, r = 1,2,\cdots,n$；

（2）令 $k_r = 1$，$MT_l(k_r) = 0$，$ML_l(k_r) =$ 空集，$r = 1,2,\cdots,n$，$l = 1,2,\cdots,n+1$；

（3）用最大相对 SMT 法则选择工件。若

$$r = \min\left\{r' \mid \frac{SMT_{r'}(k_{r'})}{s_{r'}} = \max_{r''=1,2,\cdots,n} \frac{SMT_{r''}(k_{r''})}{s_{r''}}\right\} \tag{2}$$

则 t_{rk_r} 处于候选状态；

（4）用最早完工准则选择机器。在分配 $t \in L_r (r = 1,2,\cdots,n)$ 时，若 $\frac{(MT_r(t) + t)}{s_r} \leqslant MT_{n+1}(t) + t$，则 $t \in M_r$；若 $\frac{(MT_r(t) + t)}{s_r} > MT_{n+1}(t) + t$，则 $t \in M_{n+1}$；

（5）若所有工件组都分配完毕，则结束。否则，转到（3），对其余工件按最大相对 SMT 法则和最早完工准则继续分配。

下面给出 M-LPT$_1$ 算法的性质。

对于工件 t 用 $ST(t)$ 表示其开始加工的时刻，$CT(t)$ 表示其完成加工的时刻。

引理 1

（1）若 $t', t'' \in M_l, l = 1,2,\cdots,n+1$，且 $t' < t''$，则 $CT(t') \leqslant ST(t'')$。

（2）若 $t', t'' \in L_r, r = 1,2,\cdots,n$，且 $t' < t''$，则 $CT(t') - t' \leqslant ST(t'')$。

（3）若 $t \in L_r, r = 1,2,\cdots,n$，则 $\frac{(MT_l(t) + t)}{s_l} \geqslant CT(t), l = r, n+1$。

证明　（1）和（2）由算法步骤（1）及 $ST(t)$ 和 $CT(t)$ 的定义可得，（3）由算法步骤（4）及 $ST(t)$ 和 $CT(t)$ 的定义可得。

引理 2　若存在 $t_{rp} \in L_r$，使 $CT(t_{rp}) = T$，$r = 1,2,\cdots,n$，$p = 1,2,\cdots,n_r$，且有 $t_{kq} < t_{rp}$，$k = 1,2,\cdots,n$，且 $k \neq r$，$q = 1,2,\cdots,n_k$，则 $T_k \geqslant SMT_k(q) > s_k T$。

证明　因 $t_{kq} < t_{rp}$，故可设 t_{kq} 是在与 t_{rs} 候选时当选的，其中 $s \leqslant p$。由算法知：$\frac{SMT_k(q)}{s_k} > \frac{SMT_r(s)}{s_r}$，由 SMT 的性质可得：

$$\frac{T_k}{s_k} > \frac{SMT_k(q)}{s_k} > \frac{SMT_r(s)}{s_r} \geqslant \frac{SMT_r(p)}{s_r}$$

若 $t_{rp} \in M_r$，因 $CT(t_{rp}) = T$，则 $MT_r = s_r T$，于是 $SMT_r(p) \geqslant MT_r = s_r T$。故有 $T_k \geqslant SMT_k(q) > s_k T$。

若 $t_{rp} \in M_{n+1}$，则由算法步骤（4）知：

$$\frac{MT_r(t_{rp}) + t_{rp}}{s_r} > MT_{n+1}(t_{rp}) + t_{rp} = T \tag{3}$$

因 $MT_r \geqslant MT_r(t_{rp})$，故 $MT_r + t_{rp} > s_r T$。因 $CT(t_{rp}) = T$，故当 $i \geqslant p+1$ 时，$t_{ri} \in M_r$，于是

$$SMT_r(p) = MT_r(t_{rp}) + \sum_{i \geqslant p} t_{ri} =$$

$$MT_r(t_{rp}) + t_{rp} + \sum_{i \geqslant p+1} t_{ri} = MT_r + t_{rp} \tag{4}$$

故 $SMT_r(p) = MT_r + t_{rp} > s_r T$，从而得 $T_k > SMT_k(q) > s_k T$。

引理 3　若 $L = (L_1, L_2, \cdots, L_n)$ 中存在某个 $t_{rp} \in L_r$，使 $CT(t_{rp}) = T(L)$，且至少存在一个 t_{kq}，$k \neq r$，$\{t_{kq} \mid t_{kq} \in M_{n+1}, t_{kq} < t_{rp}\} = \Phi$。则存在 L'，使 $|L'| < |L|$，且 $\frac{T(L')}{T^*(L')} \geqslant \frac{T(L)}{T^*(L)}$。

证明　若 $\{t_{kq} \mid t_{kq} \in M_{n+1}, t_{kq} < t_{rp}\} = \Phi$，说明在通用机 M_{n+1} 上，在 t_{rp} 之前无 L_k 中的工件，即在 t_{rp} 之前 L_k 中的工件均被安排在专用机 M_k 上，故可作 $L'_1 = L_1$，$L'_2 = L_2$，$\cdots$，$L'_{k-1} = L_{k-1}$，$L'_k = L_{k+1}$，$\cdots$，$L'_{n-1} = L_n$，$L'_n =$ 空集，$L' = (L'_1, L'_2, \cdots, L'_n)$，则 $SMT_n(L') \equiv 0$，且 $L'_1, L'_2, \cdots, L'_{n-1}$ 中工件顺序与 $L - L_k$ 中工件顺序一致，故安排也一致，从而 $CT(L' \mid t_{rp}) = CT(L \mid t_{rp}) = T(L)$，因 $|L'| < |L|$，故 $T^*(L') \leqslant T^*(L)$，从而得到 $\frac{T(L')}{T^*(L')} \geqslant \frac{T(L)}{T^*(L)}$。

2 M-LPT1 算法性能指标的界

本小节讨论 M-LPT$_1$ 算法在最差情况下的性能指标。

定理1 对于 n 组工件，n 台专用机，一台通用机，且专用机的加工速度不小于通用机的加工速度的排序问题，在 M-LPT$_1$ 算法下有界：

$$\frac{T}{T^*} \leqslant 1 + \frac{1}{\sum_{i \in I} s_i}$$

其中 I 表示在最后完工的工件完工之前，在通用机上至少安排了一个工件的工件组的下标集合。

证明 假设存在 $t_{rp} \in L_r$，使 $CT(t_{rp}) = T$；

情况A：若 $|I| = n$，即对任意的 $t_{kq} \in L_k$，$k \neq r$，均有 $\{t_{kq} \mid t_{kq} \in M_{n+1}, t_{kq} < t_{rp}\} \neq \Phi$，则不妨设 $u_k = \max\{i \mid t_{ki} \in M_{n+1}, t_{ki} < t_{rp}\}$，显然 $u_k \geqslant 2$，因为由算法知 $t_{k1} \in M_k$。

因为 $CT(t_{rp}) = T$，由引理1知 $\frac{(MT_r(t_{rp}) + t_{rp})}{s_r} \geqslant CT(t_{rp}) = T$。

由引理2知：对任意的 $t_{ku_k} \in L_k$，$k \neq r$，均有 $T_k \geqslant SMT_k(u_k) > s_k T$。故

$$T^* \geqslant \frac{T_1 + T_2 + \cdots + T_n}{1 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n} \geqslant$$

$$\frac{T_1 + T_2 + \cdots + MT_r(t_{rp}) + t_{rp} + \cdots + T_n}{1 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n} \geqslant$$

$$\frac{s_1 T + s_2 T + \cdots + s_r T + \cdots + s_n T}{1 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i + 1} T$$

即 $$\frac{T}{T^*} \leqslant 1 + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} s_i}$$

情况B：若 $|I| < n$，即存在 $t_{kq} \in L_k$，$k \neq r$，使得 $\{t_{kq} \mid t_{kq} \in M_{n+1}, t_{kq} < t_{rp}\} = \Phi$，则可重复应用引理3，由 I 的含义知存在 L'，且 $|L'| = |I|$，满足对任意的 $t_{kq} \in L'_k$，$k \neq r$，均有 $\{t_{kq} \mid t_{kq} \in M_{n+1}, t_{kq} < t_{rp}\} \neq \Phi$，由情况A的证明和引理3可知，此时有 $\frac{T(L)}{T^*(L)} \leqslant \frac{T(L')}{T^*(L')} \leqslant 1 + \frac{1}{\sum_{i \in I} s_i}$。由此可见在本节所述的 M-LPT$_1$ 算法下总有 $\frac{T}{T^*} \leqslant 1 + \frac{1}{\sum_{i \in I} s_i}$。

推论1 对于 n 组工件，n 台专用机，一台通用机，且专用机的加工速度不小于通用机的加工速度的排序问题，在 M-LPT$_1$ 算法下有界：

$$\frac{T}{T^*} \leqslant 1 + \frac{1}{|I|} \tag{5}$$

证明 由 $s_i \geqslant 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$，可得 $\frac{T}{T^*} \leqslant 1 + \frac{1}{|I|}$，从而可得上述结果。

参考文献：

[1] JOHNSON S M. On the representations of an integer as the sum of products of integers[J]. Trans Amer Math Soc, 1954, 76: 177 – 189.

[2] GRAHAMR L. Bounds on multiprocessing timing anomalies[J]. SIAM J Appl Math, 1969, 17(2): 416 – 429.

[3] COFFMAN E G Jr, SETHI R. A generalized bound on LPT sequencing[J]. Informat Res Ope, 1976, 10 (B – 2): 17 – 25.

[4] WEBSTER S T. A general lower bound for the makespan problem[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 89: 516 – 524.

[5] GONZALEZ T, IBARRA O H, SAHNI S. Bounds for LPT schedules on uniform processors[J]. SIAM J Comput, 1977, 6 (1): 155 – 166.

[6] CHEN B. Parametric bounds for LPT scheduling on uniform processors [J]. Acta Math Appl Sinica (English Ser.), 1991, 7(1): 67 – 73.

[7] KOVACS A. Tighter approximation bounds for LPT scheduling in two special cases[C]. Algorithms and complexity, Lecture Notes in Comput Sci, 3998, Springer, Berlin, 2006: 187 – 198.

[8] 秦成林，丁伟. 具有通用机的两组工件的 $Q//C_{max}$ 问题[J]. 上海大学学报：自然科学版，1995，6(1)：18 – 25.

[9] 秦成林，潘家定. 具有两台专用机、两台通用机的 $Q_4//C_{max}$ 问题的近似算法[J]. 运筹学学报，1998，2(1)：64 – 70.

[10] 丁伟. 具有通用机的两组工件的排序问题[J]. 中山大学学报：自然科学版，2004，43(2)：33 – 36.

[11] 丁伟. 具有通用机的三组工件的排序问题[J]. 上海大学学报：自然科学版，2005，11(1)：48 – 51.

[12] 丁伟. 具有通用机的四组工件的排序问题[J]. 华南理工大学学报：自然科学版，2005，33(10)：108 – 111.

[13] 丁伟. 具有通用机的 n 组工件的排序问题[J]. 运筹学学报，2006，10(4)：122 – 126.

[14] 丁伟. 同速度的具有 m 台通用机的 n 组工件的排序问题[J]. 中山大学学报：自然科学版，2008，47(3)：19 – 22.