第48卷 第6期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 48 No. 6
2009年 11月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Nov. 2009

二阶非线性中立型时标动态方程非振动解的存在性*

高 瑾[1]，程世辉[2]，王其如[1]
（1. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275；
2. 河南教育学院信息技术系，河南 郑州 450014）

摘　要：利用 Krasnoselskii 不动点定理，建立了研究二阶非线性中立型时标动态方程

$$[r(t)(x(t)+p(t)x(t-\tau))^{\Delta}]^{\Delta}+\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)f_i(x(t-\sigma_i))=0,\ t\in T$$

的非振动解的存在性条件。所得结果包含二阶非线性中立型微分方程相应的结论，并给出二阶非线性中立型差分方程新的判别准则。

关键词：二阶非线性时标动态方程；非振动解；存在性；中立型；Krasnoselskii 不动点定理
中图分类号：O175.14，O175.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0529-6579（2009）06-0023-04

Existence of Nonoscillatory Solutions to Second-order Nonlinear Neutral Dynamic Equations on Time Scales

GAO Jin[1], *CHENG Shihui*[2], *WANG Qiru*[1]
(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Department of Information Technology, Henan Institute of Education, Zhengzhou 450014, China)

Abstract: By employing Krasnoselskii's fixed pomt theorem, the existence of nonoscillatory solutions of the second-order nonlinear neutral dynamic equations on time scales

$$[r(t)(x(t)+p(t)x(t-\tau))^{\Delta}]^{\Delta}+\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)f_i(x(t-\sigma_i))=0,\ t\in T$$

is established. The obtained results cover those for second-order nonlinear neutral differential equations and provide new crtteria for second-order nonlinear neutral differential equations.

Key words: second-order nonlinear dynamic equations on time scales; nonoscillatory solutions; existence; neutral; Krasnoselskii's fixed point theorem

为了统一连续与离散分析，1988年德国 Stefan Hilger 教授在他的博士论文和文［1］中首次提出测度链微积分（The calculus of measure chains）。他的博士导师 Bernd Aulbach 教授指出，这种新的微积分有三个主要目的：统一、推广和离散化（Unification-Extension-Discretization）。而对于许多情况，我们只需考虑测度链（Measure chain）的一种特殊情形——时间标度（Time scale），简称时标。一个时标指的是实数集 $\mathbb{R}$ 的任一非空闭子集，通常用符号“T”表示。时标理论的研究不仅能把微分方程理论和差分方程理论很好地结合在一起，而且所得的结果比微分方程和差分方程理论的更为广泛。它的建立引起了国内外许多学者的广泛关注，并得到了一系列研究成果[1-10]。

* 收稿日期：2008-12-23
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10971231，10571183）；广东省自然科学基金资助项目（8151027501000053）
作者简介：高瑾（1985年生），女，硕士生；通讯作者：王其如；E-mail：mcswqr@mail.sysu.edu.cn

1 概　述

本文考虑如下二阶非线性中立型时标动态方程

$$[r(t)(x(t)+p(t)x(t-\tau))^{\Delta}]^{\Delta}+\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)f_i(x(t-\sigma_i))=0,\ t\in T \qquad (1)$$

其中 T 为一时标，$\inf T=t_0,\sup T=\infty$，$m\geqslant 1$ 为整数，$\tau\geqslant 0,\sigma_i\geqslant 0$ 为常数使得对所有 $t\in T$ 且 $t\geqslant\max\{\tau,\sigma_i,i=1,\cdots,m\}$ 时，$t-\tau,t-\sigma_i\in T$；$r,p,Q_i\in C_{rd}(T,\mathbb{R})$，$r(t)>0$，$f_i\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}),i=1,\cdots,m$。

方程（1）的一个解被称为是振动的如果它有任意大的零点，否则称它是非振动的。

1998年，Kulenovic 等[11]研究了二阶线性中立型微分方程

$$(x(t)+cx(t-\tau))''+Q_1(t)x(t-\sigma_1)-Q_2(t)x(t-\sigma_2)=0,\ t\geqslant t_0$$

的非振动解的存在性问题。2007年，Zhou[12]研究了下列微分方程的非振动解的存在性问题：

$$[r(t)(x(t)+p(t)x(t-\tau))']'+\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)f_i(x(t-\sigma_i))=0,\ t\geqslant t_0$$

2007年，Zhu 等[7]给出了时标上的 Arzela-Ascoli 定理，并利用 Kranoselskii 不动点定理建立了一阶中立型泛函动态方程

$$[x(t)+p(t)x(g(t))]^{\Delta}+f(t,x(h(t)))=0,\ t\in T$$

存在非振动解的若干充分必要性准则。

本文将在文［7］的基础上，利用 Kranoselskii 不动点定理把文［11－12］的结果推广到二阶非线性中立型时标动态方程（1）。作为本文主要结果的应用，最后我们给出其在两个特殊时标下的推论。

限于文章篇幅，有关时标理论的预备知识请参见文献［3－4］。

2 主要结果

这一节将给出方程（1）的非振动解的存在性条件。首先给出一个引理：

引理1 （Krasnoselskii 不动点定理）设 X 是一个 Banach 空间，Ω 为 X 的一个有界闭凸子集，S_1，S_2 为 Ω 到 X 的映照使得 $S_1x+S_2y\in\Omega$ 对每一对 $x,y\in\Omega$。若 S_1 是收缩映射而且 S_2 是全连续的，则方程 $S_1x+S_2x=x$ 在 Ω 内有解。

定理1 假设存在非负常数 c_1 和 c_2，使得 $c_1+c_2<1$，$-c_2\leqslant p(t)\leqslant c_1$，且

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{|Q_i(t)|}{r(s)}\Delta s\Delta t<\infty,i=1,2,\cdots,m \qquad (2)$$

则方程（1）存在有界非振动解。

证明 由积分交替性知（2）等价于

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{|Q_i(t)|}{r(s)}\Delta t\Delta s<\infty,i=1,2,\cdots,m \qquad (3)$$

由（3），选 $T_0\in T$ 充分大，使得

$$\int_{T_0}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{M}{r(s)}\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\Delta u\Delta s<\frac{1-c_1-c_2}{4}$$

此处 $M=\max\limits_{(1-c_1-c_2)/2\leqslant x\leqslant 1}\{|f_i(x)|:1\leqslant i\leqslant m\}$。令 $[t_0,T_0]_T:=\{t\in T:t_0\leqslant t\leqslant T_0\}$，$[t_0,\infty)_T:=\{t\in T,t\geqslant t_0\}$，$C([t_0,\infty)_T,\mathbb{R})$ 表示所有 $[t_0,\infty)_T\to\mathbb{R}$ 的连续函数的集合，且 $BC[t_0,\infty)_T:=\{x:x\in C([t_0,\infty)_T,\mathbb{R})$ 且 $\sup\limits_{t\in[t_0,\infty)_T}|x(t)|<\infty\}$。在 $BC[t_0,\infty)_T$ 上定义 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[t_0,\infty)_T}|x(t)|$，则 $(BC[t_0,\infty)_T,\|\cdot\|)$ 为一个 Banach 空间。

定义 $BC[t_0,\infty)_T$ 的一个闭凸有界子集 Ω：

$$\Omega=\left\{x=x(t)\in BC[t_0,\infty)_T:\ \frac{1-c_1-c_2}{2}\leqslant x(t)\leqslant 1,t\geqslant t_0\right\}$$

定义算子 $S_1,S_2:\Omega\to BC[t_0,\infty)_T$ 如下：

$$(S_1x)(t)=\begin{cases}\dfrac{3+c_1-3c_2}{4}-p(t)x(t-\tau),t\in[T_0,\infty)_T;\\(S_1x)(T_0),t\in[t_0,T_0]_T\end{cases}$$

$$(S_2x)(t)=\begin{cases}-\displaystyle\int_{t}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\Big(\sum_{i=1}^{m}Q_i(u)f_i(x(u-\sigma_i))\Big)\Delta u\Delta s,\\ \quad t\in[T_0,\infty)_T;\\(S_2x)(T_0),t\in[t_0,T_0]_T\end{cases}$$

（1）证 $\forall x,y\in\Omega,S_1x+S_2y\in\Omega$。对 $\forall x,y\in\Omega$，$t\in[T_0,\infty)_T$，有

$$(S_1x)(t)+(S_2y)(t)\leqslant\frac{3+c_1-3c_2}{4}-p(t)x(t-\tau)+\int_{t}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)||f_i(y(u-\sigma_i)|\Delta u\Delta s\leqslant$$

$$\frac{3+c_1-3c_2}{4}+c_2+\int_{T_0}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{M}{r(s)}\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\Delta u\Delta s\leqslant$$

$$\frac{3+c_1-3c_2}{4}+c_2+\frac{1-c_1-c_2}{4}=1,$$

$$(S_1x)(t)+(S_2y)(t)\geqslant$$

$$\frac{3+c_1-3c_2}{4}-p(t)x(t-\tau)-\int_t^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{1}{r(s)}\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\,|f_i(y(u-\sigma_i)|\,\Delta u\Delta s\geqslant$$

$$\frac{3+c_1-3c_2}{4}-c_1-\int_{T_0}^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{M}{r(s)}\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\,\Delta u\Delta s\geqslant$$

$$\frac{3+c_1-3c_2}{4}-c_1-\frac{1-c_1-c_2}{4}=\frac{1-c_1-c_2}{2}$$

于是对 $t\geqslant t_0$，均有 $\frac{1-c_1-c_2}{2}\leqslant(S_1x)(t)+(S_2y)(t)\leqslant1$. 故 $\forall x,y\in\Omega,S_1x+S_2y\in\Omega$。

（2）证 S_1 为 Ω 上的压缩映射。对 $\forall x,y\in\Omega$，$t\in[T_0,\infty)_T$ 有

$$|(S_1x)(t)-(S_1y)(t)|\leqslant|p(t)||x(t-\tau)-y(t-\tau)|\leqslant c_0\|x-y\|,\ c_0=\max\{c_1,c_2\}$$

所以 $\|S_1x-S_1y\|\leqslant c_0\|x-y\|$。又因为 $0<c_0<1$，故 S_1 为 Ω 上的压缩映射。

（3）证 S_2 全连续。先证 S_2 为连续的，设 $x_k=x_k(t)\in\Omega$，且 $x_k(t)\to x(t)(k\to\infty)$。
因为 Ω 为闭的，所以 $x=x(t)\in\Omega$，对 $t\in[T_0,\infty)_T$，有

$$|(S_2x_k)(t)-(S_2x)(t)|\leqslant$$

$$\int_t^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{1}{r(s)}\left(\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\,|f_i(x_k(u-\sigma_i)-f_i(x(u-\sigma_i))|\right)\Delta u\Delta s\leqslant$$

$$\int_{T_0}^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{1}{r(s)}\left(\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\,|f_i(x_k(u-\sigma_i))-f_i(x(u-\sigma_i))|\right)\Delta u\Delta s$$

由 f_i 的连续性可知：对 $i=1,2,\cdots,m$，当 $k\to\infty$ 时 $|f_i(x_k(t-\sigma_i))-f_i(x(t-\sigma_i))|\to0$。由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{k\to\infty}\|(S_2x_k)(t)-(S_2x)(t)\|=0$$

因此 S_2 连续。

下证 $S_2\Omega$ 为相对紧的。$S_2\Omega$ 一致有界显然，下证其等度连续。
对 $\forall\varepsilon>0$，取足够大 $T_2\in[T_0,\infty)_T$，使得

$$\int_{T_2}^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{M}{r(s)}\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\,\Delta u\Delta s<\varepsilon/2$$

则对 $\forall x\in\Omega,t_1,t_2\in[T_2,\infty)_T$，有

$$|(S_2x)(t_1)-(S_2x)(t_2)|=$$

$$\left|\int_{t_1}^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{1}{r(s)}\left(\sum_{i=1}^{m}Q_i(u)f_i(x(u-\sigma_i))\right)\Delta u\Delta s-\int_{t_2}^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{1}{r(s)}\left(\sum_{i=1}^{m}Q_i(u)f_i(x(u-\sigma_i))\right)\Delta u\Delta s\right|\leqslant$$

$$\int_{t_2}^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{M}{r(s)}\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\,\Delta u\Delta s+\int_{t_1}^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{M}{r(s)}\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\,\Delta u\Delta s\leqslant$$

$$2\int_{t_2}^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{M}{r(s)}\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\,\Delta u\Delta s<\varepsilon$$

对 $\forall x\in\Omega,t_1,t_2\in[T_0,T_2+1]_T$，有

$$|(S_2x)(t_2)-(S_2x)(t_1)|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\int_s^{\infty}\frac{1}{r(s)}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\,|f_i(x(u-\sigma_i))|\right)\Delta u\Delta s\leqslant$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_s^{\infty}\frac{M}{r(s)}\sum_{i=1}^{m}|Q_i(u)|\,\Delta u\Delta s$$

则存在 $\delta>0$，使得 $0<t_2-t_1<\delta$ 时 $|(S_2x)(t_2)-(S_2x)(t_1)|<\varepsilon$。
对 $\forall x\in\Omega,t_1,t_2\in[t_0,T_0]_T$，显然有 $|(S_2x)(t_2)-(S_2x)(t_1)|=0<\varepsilon$。

综上可得 $S_2\Omega$ 为相对紧的，从而 S_2 全连续。

根据引理 1，存在 $x_0\in\Omega$，使得

$$S_1x_0+S_2x_0=x_0$$

说明 x_0 为方程（1）的一个有界非振动解。

注　当 $T=\mathbb{R}$ 时，上述定理 1 即为文［12］中的定理 1，也改进、推广了文［11］中相应的结论。

作为定理 1 的应用，我们考虑两个特殊时标下其推论。当 $T=\mathbb{N}_0$（正整数集）时，此时 $\sigma(t)=t+1,\mu(t)=1,x^{\Delta}(t)=\Delta x(t)=x(t+1)-x(t)$，且方程（1）化为：

$$\Delta(r(t)(\Delta[x(t)+p(t)x(t-\tau)]))+\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)f_i(x(t-\sigma_i))=0,\ t\in\mathbb{N}_0\qquad(4)$$

其中 $m\geqslant1$ 为整数，τ、σ_i 为非负整数；$r,p,Q_i\in C_{rd}(\mathbb{N}_0,\mathbb{R})$，$r(t)>0$，$f_i\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$i=1,\cdots,m$。

推论 1　假设存在非负常数 c_1 和 c_2，使得 $c_1+c_2<1$，$-c_2\leqslant p(t)\leqslant c_1$，且

$$\sum_{t=t_0}^{\infty}\sum_{s=t_0}^{t-1}\frac{|Q_i(t)|}{r(s)}<\infty,i=1,2,\cdots,m$$

则（4）存在有界非振动解。

当 $T=h\mathbb{N}_0$，$h>0$ 时，此时 $\sigma(t)=t+h$，$\mu(t)=h,x^{\Delta}(t)=\Delta_hx(t)=\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$，

且方程（1）化为：

$$\Delta_h(r(t)(\Delta_h[x(t)+p(t)x(t-\tau)]))+\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)f_i(x(t-\sigma_i))=0,\ t\in h\mathbb{N}_0 \quad (5)$$

其中 $m\geqslant 1$ 为整数，$\tau,\sigma_i\in h\mathbb{N}_0$ 为常数；$r,p,Q_i\in C_{rd}(h\mathbb{N}_0,\mathbb{R})$，$r(t)>0$，$f_i\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$i=1,\cdots,m$。

推论2 假设存在非负常数 c_1 和 c_2，使得 $c_1+c_2<1$，$-c_2\leqslant p(t)\leqslant c_1$，且

$$\sum_{j=\frac{t_0}{h}}^{\infty}\sum_{k=\frac{t_0}{h}}^{j-1}\frac{|Q_i(jh)|}{r(kh)}<\infty,\ i=1,2,\cdots,m$$

则（5）存在有界非振动解。

参考文献：

[1] HILGER S. Analysis on measure chairs-a unified approach to continuous and discrete calculus [J]. Results Math, 1990, 18(1-2): 18-56.

[2] AGARWAL R, BOHNER M, O'REGAN D, PETERSON A. Dynamic equations on time scales: A survey [J], J Comput Appl Math, 2002, 141(1-2): 1-26.

[3] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic Equations on Time Scales [M]. Boston: Birkhäuser, 2001.

[4] BOHNER M, PETERSON A. Advances in Dynamic Equations on Time Scales [M]. Boston: Birkhäuser, 2003.

[5] MATHSEN R M, WANG Q R, WU H W. Oscillation for neutral dynamic functional equations on time scales [J]. J Difference Equ Appl, 2004, 10(7): 651-659.

[6] ZHU Z Q, WANG Q R. Frequency measures on time scales with applications [J]. J Math Anal Appl, 2006, 319(2): 398-409.

[7] ZHU Z Q, WANG Q R. Existence of nonoscillatory solutions to neutral dynamic equations on time scales [J]. J Math Anal Appl, 2007, 335(2): 751-762.

[8] HUANG H, WANG Q R. Oscillation of second-order nonlinear dynamic equations on time scales [J]. Dynam Systems Appl, 2008, 17(3-4): 551-570.

[9] YU Z H, WANG Q R. Asymptotic behavior of solutions of third-order nonlinear dynamic equations on time scales [J]. J Comput Appl Math, 2009, 225(2): 531-540.

[10] ZHU S M, LI Y H, RONG Z X. Region qualitative analysis of predator-prey systems on time scales [J]. Ann. Differential Equations, 2008, 24(1): 121-126.

[11] KULENOVIC M R S, HADZIOMERSPAHIC S. Existence of nonoscillatory solution of second order linear neutral delay equation [J]. J Math Anal Appl, 1998, 228(2): 436-448.

[12] ZHOU Y. Existence for nonoscillatory solutions of second-order nonlinear differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2007, 331(1): 91-96.

（上接第22页）

[3] 陈垌烽，张万昌. 概念性水文模型遗传算法多目标参数优选研究[J]. 水利水电技术，2007，38(6)：5-11.
CHEN J F, ZHANG W C. Study of multi-objective optimization for hydrologic model using generic algorithms [J]. Water Resources and Hydropower Engineering, 2007, 38(6): 5-11.

[4] YANG J, REICHERT P, ABBASPOUR K C. Hydrological modeling of the Chaohe in China: Statistical model formulation and Bayesian inference [J]. Journal of Hydrology, 2007, 340: 167-182.

[5] DUAN Q, SOROOSHIAN S, GUPTA V K. Effective and efficient global optimization for conceptual rainfall-runoff models [J]. Water Resources Research, 1992, 28(4): 1015- 1031.

[6] DUAN Q, SOROOSHIAN S, GUPTA V K. Optimal use of SCE-UA global optimization method for calibrating watershed models [J]. Journal of Hydrology, 1994, 158: 265- 284.

[7] 杨晓华，杨志峰，郦建强，等. 水文模型参数识别算法研究及展望[J]. 自然科学进展，2006，16(6)：657-661.
YANG X H, YANG Z F, LI J Q, et al. Development of parameters identification for hydrologic model [J]. Progress in Natural Science, 2006, 16(6): 657-661.

[8] 赵人俊，王佩兰. 新安江模型参数的分析[J]. 水文，1988 (6)：228.
ZHAO R J, WANG P L. Analysis of Xin-an-jiang model [J]. Journal of Hydrology, 1988 (6): 228.