多孔介质材料的损伤效应函数问题研究*

薛新华[1]，张我华[2]
（1. 四川大学 水力学与山区河流开发保护国家重点实验室//水利水电学院，四川 成都 610065；
2. 浙江大学 软弱土与环境土工教育部重点实验室，浙江 杭州 310027）

摘 要：损伤效应函数反映了损伤对相互独立的弹性常数间的不同影响，其详细表达式依赖于损伤的几何特征且可以由细观损伤力学知识得到。首先给出多孔介质材料的损伤与孔隙度之间的关系，然后推导出各向同性损伤材料的双标量损伤变量的基本方程表达式。接着从损伤和孔隙度的关系角度出发，探讨了多孔介质材料的孔隙度和损伤对损伤效应函数的影响等目前尚不清楚的问题。研究结论对损伤力学问题的进一步研究能起到一定的参考和借鉴作用。

关键词：各向同性弹性损伤；损伤效应函数；多孔介质；孔隙度
中图分类号：O346.5 **文献标识码**：A **文章编号**：0529-6579（2009）06-0054-04

Study on the Probles of Damage Effective Functions in Porous Media Materials

XUE Xinhua[1], *ZHANG Wohua*[2]
（1. State Key Laboratory of Hydraulics and Moutain River Engineering//College of Water Resources and Hydropower, Sichuan University, Chengdu 610065, China;
2. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China）

Abstract: Damage effective functions reflect the affections related the damage variables to the elastic constants independent of each other of the materials, and its detailed expressions were defined by the geometric features and could be derived from the micro-mechanical damage theories. Firstly, the relationship between the porosity rate and damage variables of the porous materials were given, and then the double scalar damage variables expressions of the isotropic elastic damage were derived. Then, the different influence to damage effective functions by the porosity rate and damage variable in porous media materials was discussed and some valuable conclusions were derived from the point of the relationship between the porosity rate and damage variable. It is shown that the conclusions are beneficial to the further research on the damage mechanics theory.

Key words: isotropic elastic damage; damage effective functions; porous media; porosity rate

一般工程材料的内部细微结构都含有缺陷（微裂纹、微空洞等）。在外界因素作用下，这些缺陷将发生演化，在宏观层次上即表现为材料力学性能的劣化直至最终材料单元的破坏，过程中的任一状态称为损伤状态。显然，损伤将直接影响工程材料的强度和结构的寿命，是工程设计中的关键问题之一[1]。Kachanov[2]的古典损伤力学是建立在有效应力和应变等效假定基础上的。有效应力和应变

* 收稿日期：2008-12-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目（50379046）
作者简介：薛新华（1977年生），男，博士；E-mail：ouqdxxh@163.com

等效的假定一方面促进了损伤力学的发展；另一方面，也逐渐暴露出其理论的缺陷性与局限性。例如，在早期的一些文献[1,3]中，应变等效假定认为有效拉梅弹性常数 $\lambda^{*}=\lambda(1-\Omega)$ 和 $\mu^{*}=\mu(1-\Omega)$ 在损伤发展过程中与 $(1-\Omega)$ 成正比，而有效泊松比保持不变。然而，上述假定与实际材料中观察到的损伤情况并不一致，而且也与细观损伤力学得出的一些结论不相符[4-5]。因此，克服以往理论存在的局限性，在更严格的理论基础上探索损伤本构关系的新途径，对损伤力学的理论发展及应用具有十分重要的意义。

当采用损伤变量描述各向同性弹性材料的损伤状态时，连接损伤的宏观效应与细观物理机制之间关联的就是所谓的“损伤效应函数”，它反映了损伤对相互独立的弹性常数间的不同影响，其详细表达式依赖于损伤的几何特征且可以由细观损伤力学知识得到。对于孔隙度和损伤对材料的“损伤效应函数”的影响是否一致的问题，目前尚不清楚。本文从多孔介质材料的损伤与孔隙度之间的关系角度出发，对该问题进行了探讨，希望能对损伤力学问题的进一步研究起到一定的参考和借鉴作用。

1　多孔介质孔隙度与损伤的关系

工程中的地质材料不管是土壤还是岩石，在微观结构上都具有孔隙、微裂纹等特征，且在孔隙或微裂纹内往往还含有液体或气体，属于典型的含液多孔介质[6-7]。从多孔介质角度考虑材料的损伤变化，可根据孔隙度的定义，将损伤变量写为[6]：

$$\Omega=\frac{\varphi_0-\varphi}{\varphi_0-\varphi_s} \tag{1}$$

式中，Ω 为材料的损伤变量；φ_0、φ_s 分别为材料的初始孔隙度和破坏（或充分扰动）时的孔隙度，由试验测定。当材料完全破坏时，即 $\varphi=\varphi_s$ 时，损伤变量 $\Omega=1$；当材料没有损伤，即 $\varphi=\varphi_0$ 时，损伤变量 $\Omega=0$。

2　各向同性双标量损伤理论[8]

根据经典弹性力学知识，各向同性材料的弹性刚度矩阵 $[D]$ 可以用拉梅常数 λ 写成下式，即

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{2}$$

式中，无损材料的刚度矩阵 $[D]$ 为对称的 4 阶张量，可以用张量形式表示如下

$$D_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{3}$$

引入损伤影响张量 $[\Psi]$，则损伤材料和无损材料的刚度矩阵之间存在如下关系：

$$[D^{*}]=[D][\Psi] \tag{4}$$

利用张量知识，$[\Psi]$ 可以用两个相互独立的变量 ψ_1 和 ψ_2 表示如下

$$[\Psi_{klmn}]=[\psi_1\delta_{kl}\delta_{mn}+\psi_2\delta_{kl}\delta_{mn}] \tag{5}$$

因此，损伤材料的刚度矩阵可以表示为

$$D^{*}_{ijkl}=[(\psi_1+\psi_2)\lambda+2\mu\psi_1]\delta_{ij}\delta_{kl}+2\mu\psi_2\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{6a}$$

或

$$[D^{*}_{ijkl}]=[\lambda^{*}\delta_{ij}\delta_{kl}+2\mu^{*}\delta_{ik}\delta_{jl}] \tag{6b}$$

式中，$\lambda^{*}=(\psi_1+\psi_2)\lambda+2\mu\psi_1$，$\mu^{*}=\mu\psi_2$，称为各向同性损伤材料的有效拉梅常数。

目前工程中常用的弹性材料参数主要有弹性模量 E、泊松比 v、剪切模量 μ 和体积模量 K 等。根据工程中有效弹性系数来描述损伤状态的四个损伤参数 Ω_E、Ω_v、Ω_μ 和 Ω_K 分别定义如下

$$\Omega_E=1-E^{*}/E,\ \Omega_\nu=1-\nu^{*}/\nu,$$
$$\Omega_\mu=1-\mu^{*}/\mu,\ \Omega_K=1-K^{*}/K \tag{7}$$

无损材料和损伤材料的弹性参数之间的关系为

$$\lambda=\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E},\ \lambda^{*}=\frac{\mu^{*}(E^{*}-2\mu^{*})}{3\mu^{*}-E^{*}} \tag{8}$$

因此，有效弹性刚度矩阵可以写成下式

$$[D^{*}_{ijkl}]=2\mu^{*}\left[\frac{E^{*}-2\mu^{*}}{6\mu^{*}-2E^{*}}\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}\right] \tag{9}$$

同理，将 ψ_1 和 ψ_2 及式（8）代入式（5）可以得到

$$[\Psi_{ijmn}]=\frac{\mu^{*}}{\mu}\left[\frac{3(E^{*}/E-\mu^{*}/\mu)}{3\mu^{*}/\mu-E^{*}/\mu}\delta_{ij}\delta_{mn}+\delta_{im}\delta_{jn}\right] \tag{10}$$

因此，损伤影响张量 $[\Psi]$ 和双标量损伤变量 Ω_E、Ω_μ 之间的关系可以写为

$$[\Psi_{ijmn}]=(1-\Omega_\mu)\cdot\left[\frac{\Omega_E-\Omega_\mu}{\frac{E}{3\mu}(1-\Omega_E)-(1-\Omega_\mu)}\delta_{ij}\delta_{mn}+\delta_{im}\delta_{jn}\right] \tag{11}$$

其余的表达式类似，在此不一一赘述。

3　分析与讨论

由细观损伤力学的研究结果可知[4-5]，损伤对两个弹性拉梅常数 λ 和 μ 有着不同的影响，它们分别按各自的规律 $\psi_\lambda(\Omega)$ 和 $\psi_\mu(\Omega)$ 随损伤变量 Ω 演变。$\psi_\lambda(\Omega)$ 和 $\psi_\mu(\Omega)$ 分别是描述损伤对材料两个独立弹性常数影响的函数，称为损伤效应函数，可由细观损伤力学的解答或试验确定。虽然文献[9-11]中已经对损伤效应函数进行过卓有成效的研究，但没有考虑多孔介质中损伤与孔隙度对损伤

效应函数的影响。因此，本文从这个角度出发，以二维随机分布的微圆孔损伤材料为例对该问题进行了探讨。

对于二维随机分布的微圆孔损伤材料，Kachanov 利用 Mori – Tanaka 的方法，得出了材料的有效弹性模量公式如下[12]：

$$\frac{E^*}{E} = \frac{1-\phi}{1+2\phi}, v^* = \frac{\phi+v-\phi v}{1+2\phi} \tag{12}$$

式中，E 和 v 分别是无损材料的弹性模量和泊松比；E^*、v^* 分别是材料损伤后的有效值；ϕ 是材料的孔隙度。

如果损伤变量 Ω 直接定义为孔隙度 ϕ，即 $\Omega = \phi$，利用拉梅常数 λ、μ 和工程弹性模量 E 和 v 之间的关系，可以得出二维随机分布的微圆孔损伤问题的损伤效应函数 $\psi_\lambda(\Omega)$ 和 $\psi_\lambda(\Omega)$ 表达式如下：

$$\psi_\lambda(\Omega) = \frac{(1-\Omega)(\Omega+v-\Omega v)(1+v)(1-2v)}{v(1+3\Omega+v-\Omega v)(1-2v+2\Omega v)} \tag{13a}$$

$$\psi_\mu(\Omega) = \frac{1-\Omega+v-\Omega v}{1+3\Omega+v-\Omega v} \tag{13b}$$

式（13）实际上是在 $\Omega=\phi$ 的假设下得到的，而实际情况则不然，损伤变量是根据面积定义的，孔隙度是根据体积定义的。显然，两者之间是不能简单划等号的。对多孔介质材料而言，孔隙度和损伤变量之间存在式（1）的关系。对式（1）进行简单的数学变换，可以得到：

$$\phi = (1-\Omega)\cdot\phi_0 + \Omega\cdot\phi_s \tag{14}$$

因此，多孔介质材料的损伤效应函数表达式为：

$$\psi_\lambda(\Omega) = \frac{(1-\phi)(\phi+v-\phi v)(1+v)(1-2v)}{v(1+3\phi+v\text{-}\phi v)(1-2v+2\phi v)} \tag{15a}$$

$$\psi_\mu(\Omega) = \frac{1-\phi+v-\phi v}{1+3\phi+v-\phi v} \tag{15b}$$

根据经典损伤力学中的应变等效假定，无论何种材料及损伤，对损伤效应函数而言，总存在如下关系，即 $\psi_\lambda(\Omega) = \psi_\mu(\Omega) = 1-\Omega$，对于二维随机分布的微圆孔损伤，当取 $v=1/3$ 时，作出损伤效应函数的曲线图，见图1。由图1可知，损伤效应函数曲线是非线性的，而应变等效假定得出的结果是线性的，两者并不相等，即 $\psi_\lambda(\Omega) = \psi_\mu(\Omega) = (1-\Omega)/(1+2\Omega) \neq 1-\Omega$。

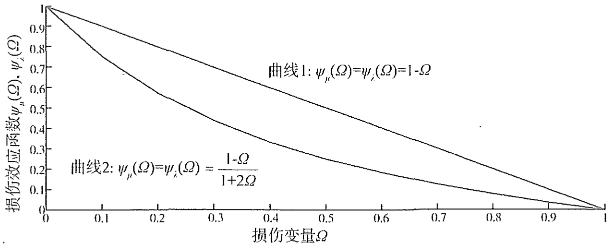

图1 二维随机分布的微圆孔损伤模型与应变等效假定损伤模型中的损伤效应函数比较

Fig. 1 Comparison of damage effective functions between damages defined in the case of 2-D circular micro-void damage and defined by the strain equivalence hypothesis

当取 $v=1/3$（$v\neq1/3$ 时还要复杂，在此不做讨论）时，对多孔介质材料的损伤效应函数分以下几种情况进行讨论。

（1）$\phi_0 = 1$，$\phi_s = 1$，$0 \leqslant \Omega \leqslant 1$ 时，损伤效应函数见图2所示

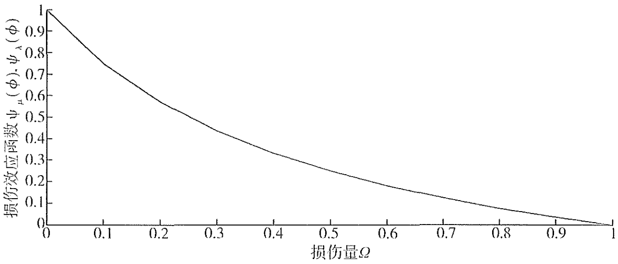

图2 多孔介质材料的损伤效应函数图

Fig. 2 Curves of damage effective functions in porous media materials

（2）$0 \leqslant \varphi_0 = \varphi_s \leqslant 1$，$0 \leqslant \Omega \leqslant 1$ 时，损伤效应函数与图2相同。

（3）$0 \leqslant \varphi_0 < \varphi_s \leqslant 1$，$0 \leqslant \Omega \leqslant 1$ 时，损伤效应函数见图3－6所示。由图2－6可知，多孔介质材料的损伤效应函数并非简单的线性关系，而是呈现非常复杂的关系。

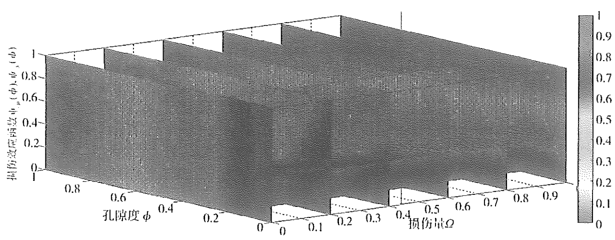

图3 多孔介质材料的损伤效应函数切片图

Fig. 3 Sectional graphs of damage effective functions in porous media materials

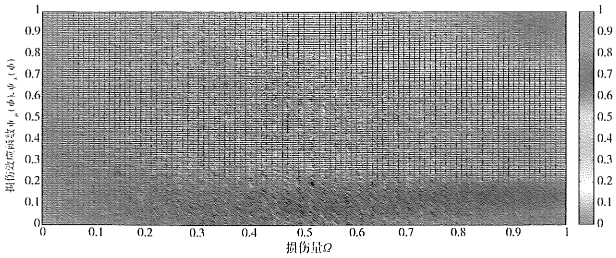

图 4　多孔介质材料的损伤效应函数与损伤变量关系图

Fig. 4　Curve of damage effective functions and damage variable in porous media materials

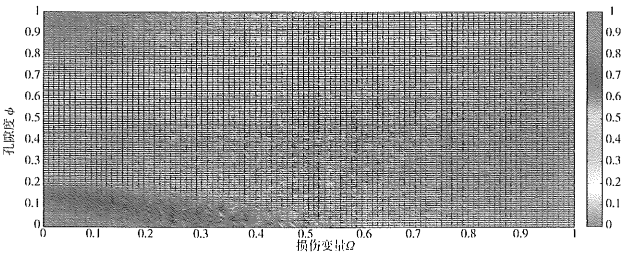

图 5　多孔介质材料的孔隙度与损伤变量关系图

Fig. 5　Curve of porous rate and damage variable in porous media materials

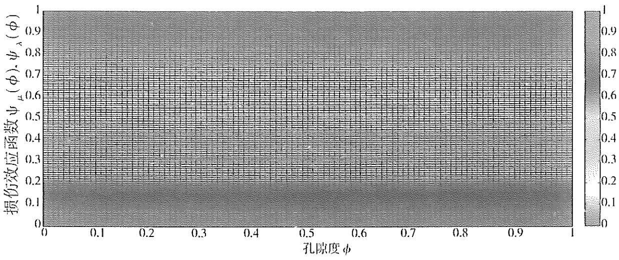

图 6　多孔介质材料的损伤效应函数与孔隙度关系图

Fig. 6　Curve of damage effective functions and porous rate in porous media materials

4　结　语

损伤效应函数反映了损伤对相互独立的弹性常数的不同影响，其详细表达式依赖于损伤的几何特征且可以由细观力学知识得到。本文从多孔介质材料的损伤与孔隙度之间的关系角度出发，以二维随机分布的微圆孔损伤材料为例，探讨了多孔介质中连接损伤的宏观效应与细观物理机制之间关联的损伤效应函数问题，得出了一些有益的结论，希望能对损伤力学问题的进一步研究起到一定的参考和借鉴作用。

参考文献：

[1]　高蕴昕,郑泉水,余寿文. 各向同性弹性损伤的双标量描述[J]. 力学学报,1996,28(5):542-549.
GAO Yunxin, ZHENG Quanshui, YU Shouwen. Double-scalar formulation of isotropic elastic damage [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1996, 28(5):542-549.

[2]　KACHANOV L M. Introduction to continuum damage Mechanics [M]. The Netherlands: Martinus Nijhoff Dordrecht, 1986.

[3]　RABIER P J. Some remarks on damage mechanics [J]. Int J Engng Sci, 1989, 27(1):29-54.

[4]　FARES N. Effective stiffness of cracked elastic solids [J]. J. Appl. Mech. Rev., 1992, 45:336-345.

[5]　KACHANOV M, TSUKROV I., SHAFIRO B. Effective modulic of solids with cavities of various shapes [J]. J. Appl Mech. Rev., 1994, 47:151-174.

[6]　戴永浩. 非饱和板岩细观试验与本构模型研究[D]. 武汉:中国科学院武汉岩土力学研究所,2006.

[7]　张洪武,周雷,黄辉. 含液各向异性多孔介质应变局部化分析[J]. 岩土力学,2004,25(5):675-680.
ZHANG Hongwu, ZHOU Lei, HUANG Hui. Strain localization analysis of anisotropic saturated and partially saturated porous media[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(5):675-680.

[8]　TANG C Y, SHEN W, PPENG L H, et al., Characterization of isotropic damage using double scalar variables [J]. International Journal of Damage Mechanics, 2002, 11: 3-25.

[9]　唐雪松,蒋持平,郑健龙. 各向同性弹性损伤本构方程的一般形式[J]. 应用数学和力学,2001,22(12):1317-1323.
TANG Xuesong, JIANG Chiping, ZHENG Jianlong. General expressions of constitutive equations for isotropic elastic damaged materials [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(12):1317-1323.

[10]　唐雪松,蒋持平,郑健龙. 弹性损伤的一般理论[J]. 北京航空航天大学学报,2001,27(1):69-72.
TANG Xuesong, JIANG Chiping, ZHENG Jianlong. A general theory for elastic damage [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2001, 27(1):69-72.

[11]　唐雪松,蒋持平,郑健龙. 弹性损伤材料的应力-应变关系与损伤演化方程[J]. 长沙交通学院学报,1999,15(4):8-13.
TANG Xuesong, JIANG Chiping, ZHENG Jianlong. Stress-strain constitutive relation and damage evolution equation for elastic damaged materials[J]. Journal of Changsha Communications university, 1999, 15(4):8-13.

[12]　KACHANOV M. On the effective modulic of solids with cavities and cracks [J]. Int. J Fracture, 1993, 59:17-21.