

一种改进的精细 - 龙格库塔法^{*}

富明慧, 梁华力

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 提出了求解非线性动力学方程的一种改进的精细龙格库塔法。首先对于线性问题, 利用等步长的 Newton-Cotes 积分公式计算非齐次方程 Duhamel 积分形式的特解。由于在此过程中提出了一种简便的算法, 与常规的同精度数值积分法相比, 能较大幅度地降低计算量和存储量。然后将上述方法推广到非线性问题, 对于各积分点上未知的状态参量, 参照龙格库塔法的几何解释进行一次预估。与已有的精细龙格库塔法相比, 在精度和效率上均有较大程度的改善。算例结果充分证明了该方法的有效性。

关键词: 非线性动力学方程; 精细积分法; 龙格库塔法; 指数矩阵运算; 数值积分

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2009) 05-0001-05

An Improved Precise Runge-Kutta Integration

FU Minghui, LIANG Huali

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: An improved precise Runge-Kutta integration is presented for solving nonlinear dynamical system. First of all, Newton-Cotes integral formula is used to calculate the special solution of nonhomogeneous equation in Duhamel integral form for linear system. Since a simple and convenient calculational method is advanced, the handling technique can reduce the whole gross of computation and storage comparing to common numerical integration methods with the same precision. Then the technique is extended to nonlinear system and unknown state parameters are forecasted consulting to the geometrical explanation of Runge-Kutta method. The method has better precision and efficiency to a relatively high extent than the existed precision Runge-Kutta method and the result of the numerical examples substantiates the availability adequately.

Key words: nonlinear dynamical equation; precise time-step integration method; Runge-Kutta integration; calculation technique of matrix exponential; numerical integration

钟万勰^[1]提出的精细积分法由于具有高精度和高效率的优点, 在结构动力方程的求解中获得了日益广泛的应用。对于线性动力问题, 精细积分法的研究工作较多, 进展较快, 目前已经提出了多种精细积分法。按非齐次方程特解的解法大致可分为以下四种: 矩阵求逆法^[1-3]、增维积分法^[4]、数值积分法^[5-7]和广义精细积分法^[8-9]。

相比之下, 有关非线性动力问题的精细积分法研究尚处于起步阶段。赵秋玲^[10]将非线性项做泰勒展开, 并仅保留线性部分, 然后用精细积分法求

解。裘春航等^[11]对该法做了进一步发展, 将 $f(v, t)$ 非线性项展开成高次多项式, 并提出避免求非齐次项各阶导数的方法。张润安^[12]给出了用迭代法求解非线性动力学方程的精细积分方法。梅树立等^[13]将同伦摄动法与精细积分法相结合, 得到了非线性方程的各阶近似解。富明慧等^[14]提出了求解非线性动力方程的广义精细积分法。

文献 [15] 提出了一种精细龙格库塔法, 它结合了精细积分法和龙格库塔法的优点, 因此是一种好的构思。但由于该文中仅是将龙格库塔法的有

* 收稿日期: 2008-10-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10672194); 广东省自然科学基金资助项目 (031552)

作者简介: 富明慧 (1966 年生), 男, 教授, 博士生导师; E-mail: stsfmh@mail.sysu.edu.cn

关公式直接移植到 Duhamel 积分中, 忽略了动力学方程的特点, 因此精度和效率均不十分理想。

本文根据动力学方程的特点, 重新建立了精细龙格库塔法。它不是将龙格库塔法的公式简单地移植到特解的数值积分中, 而是利用龙格库塔法的几何含义, 对数值积分点处未知的状态参量进行预估, 从而得到了精度更高的精细龙格库塔法。算例结果充分证明了本文方法的有效性。

1 精细积分一种通用格式及简便算法

考虑如下结构动力学初值问题:

$$\begin{cases} M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(t) \\ X(0) = X_0, \dot{X}(0) = \dot{X}_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 M 、 C 和 K 分别为质量阵、阻尼阵和刚度阵, X 为位移向量, F 为载荷向量, X_0 , $\dot{X}_0$ 为初位移向量和初速度向量。

在哈密顿体系中, 式 (1) 可改写为:

$$\begin{cases} \dot{v} = Hv + r(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (2)$$

将时间域以步长 τ 均匀离散, 则方程 (2) 在 $t_{i+1} = (i+1)\tau$ 时刻的解可表达为^[5-7]:

$$v_{i+1} = T(\tau)v_i + v_{i+1}^*, v_{i+1}^* = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{H(t_{i+1}-s)} r(s) ds \quad (3)$$

其中 $v_i = v(t_i)$, v_{i+1}^* 是方程一个特解, $T(\tau) = e^{H\tau}$ 。

将特解的积分区域 $[t_i, t_{i+1}]$ 分成 n 等份, 并采用 Newton-Cotes 数值积分公式, 则式 (3) 可化为:

$$v_{i+1} = T(\tau)v_i + \tau \sum_{j=0}^n C_j^{(n)} [T(\tau/n)]^{n-j} r(t_i + j\tau/n) \quad (4)$$

其中 $C_j^{(n)}$ 是 Cotes 系数, $T(\tau/n) = e^{H\tau/n}$ 。

在精细积分的许多文献中, 如文献 [5-6], 均采用了形如式 (4) 的数值积分格式。但上式中包含矩阵 $T(\tau/n)$ 及其高次幂, 若直接按此式计算特解是不方便的, 因为将这些幂矩阵全部计算出来, 需要做 n 次矩阵乘法, 并且需要存储 n 个矩阵。为此本文对式 (4) 做了简化, 下面以 $n=2$ 为例说明这一过程。

不难验证 $n=2$ 时式 (4) 可改写为:

$$v_{i+1} = T(\tau/2) \{ T(\tau/2) [v_i + (\tau/6)r_0] + (4\tau/6)r_1 \} + (\tau/6)r_2 \quad (5)$$

如果将式 (4) 中的 $T(\tau)$ 项合并, 则当 $n=2$ 时, 式 (4) 与式 (5) 所做的向量加法次数及矩阵与向量的乘法次数完全相同。但式 (5) 中仅包含一个指数矩阵 $T(\tau/2)$, 无需计算和存储其它高次幂矩阵, 故与式 (4) 相比, 式 (5) 的计算量

及存储量均得到了降低。

类似地, 也可得到 n 为其它数的公式。矩阵 $T(\tau/n)$ 可按文献 [1] 的精细算法求出。值得注意的是, 与计算通常的传递矩阵 $T(\tau)$ 相比, 计算 $T(\tau/n)$ 需要更少的循环次数。例如当 $n=2$ 时循环次数可减少 1 次; 当 $n=4$ 时, 循环可减少 2 次, 等等。应该指出, 上述简化方法也适用于其它等步长数值积分公式, 但不适用于非等步长积分公式, 如高斯积分公式。

2 龙格库塔法及其几何解释

龙格库塔法是求解非线性问题的一种十分有效的方法。它具有计算量小, 精度高的优点。下面以四阶龙格库塔法为例说明其求解过程。

考虑如下一阶常微分方程组

$$\dot{y} = g(y, t) \quad (6)$$

其解可表达为:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(y, t) dt \quad (7)$$

其中 τ 为时间步长, $t_n = n\tau$ 。如果用 Simpson 公式 (相当于 $n=2$ 的 Newton-Cotes 公式) 计算上式的积分项, 则有

$$y_{n+1} = y_n + (\tau/6) [g(y_n, t_n) + 4g(y_{n+1/2}, t_{n+1/2}) + g(y_{n+1}, t_{n+1})] \quad (8)$$

利用上式进行求解的关键在于如何有效地预估未知量 $y(t)$ 在积分点处的值。

下面分析龙格库塔法的做法。不妨以四阶龙格库塔法为例, 其公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (\tau/6) (K_1 + 2K_2 + 2K'_2 + K_3) \\ K_1 = g(y_n, t_n) \\ K_2 = g[y_n + (\tau/2) K_1, t_n + \tau/2] \\ K'_2 = g[y_n + (\tau/2) K_2, t_n + \tau/2] \\ K_3 = g(y_n + \tau K'_2, t_{n+1}) \end{cases} \quad (9)$$

为了便于叙述, 我们将通常龙格库塔法中的符号略做修改, 如将 K_3 记作 K'_2 , 将 K_4 记作 K_3 。上式可以理解为按式 (8) 进行计算, 其中 $g(y_n, t_n) = K_1$, $g(y_{n+1/2}, t_{n+1/2}) = (K_2 + K'_2)/2$, $g(y_{n+1}, t_{n+1}) = K_3$ 。从几何含义上看, K_i 既是曲线 $y = y(t)$ 在相关积分点的斜率, 同时也是被积函数在该点的函数值。

式 (9) 的计算过程为: 首先以第一积分点的函数值 K_1 为斜率, 从第一积分点 (y_n, t_n) 出发, 前进半个步长, 得到第二积分点处未知量 $y_{n+1/2}$ 的预估值及 $g(y_{n+1/2}, t_{n+1/2})$ 的近似值 K_2 ; 然后以 K_2 为斜率, 从第一积分点出发, 前进半个步长, 重新计

算出第二积分点处未知量 $y_{n+1/2}$ 的预估值及 $g(y_{n+1/2}, t_{n+1/2})$ 的近似值 K'_2 , 并以 $(K_2 + K'_2)/2$ 作为函数 $g(y, t)$ 在第二积分点处的平均值; 最后, 以 K'_2 为斜率, 从第一积分点出发, 前进一个步长, 计算出第三积分点未知量的预估值 y_{n+1} 及 $g(y_{n+1}, t_{n+1})$ 的近似值 K_3 。预估出未知量在所有积分点的值后, 就可以按式 (8) 计算了。正确理解龙格库塔法的几何含义, 对下面的改进精细龙格库塔法的构造是十分重要的。

3 改进精细龙格库塔法

下面考虑结构非线性动力方程:

$$\dot{v} = Hv + r(v, t) \quad (10)$$

用步长 τ 将时间域均匀离散, 则有

$$v_{i+1} = T(\tau)v_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{H(t_{i+1}-s)} r(v, s) ds \quad (11)$$

类似于式 (4), 采用 Newton-Cotes 数值积分后, 上式化为

$$v_{i+1} = T(\tau)v_i + \tau \sum_{j=0}^n C_j^{(n)} [T(\tau/n)]^{n-j} r[v(t_i + j\tau/n), t_i + j\tau/n] \quad (12)$$

注意到方程 (10) 与方程 (6) 在形式上是完全不同的, 被积函数在积分点处的函数值不再是曲线 $v = v(t)$ 的斜率, 因此不宜直接“移植”龙格库塔法的公式, 而只能借鉴龙格库塔法的思想对各积分点处的未知量 v 进行预估。

仍以 $n = 2$ 的情况为例, 并借鉴四阶龙格库塔法的思想, 则式 (12) 的计算可归结为以下公式:

$$\begin{cases} v_{i+1} = T(\tau/2) \{ T(\tau/2) [v_i + (\tau/6)K_1] + \\ (\tau/3)(K_2 + K'_2) \} + (\tau/6)K_3, \\ K_1 = r(v_i, t_i), \bar{K}_1 = Hv_i + K_1, \\ K_2 = r[v_i + (\tau/2)\bar{K}_1, t_i + \tau/2], \\ \bar{K}_2 = H[v_i + (\tau/2)\bar{K}_1] + K_2, \\ K'_2 = r[v_i + (\tau/2)\bar{K}_2, t_i + \tau/2], \\ \bar{K}'_2 = H[v_i + (\tau/2)\bar{K}_2] + K'_2, \\ K_3 = r(v_i + \tau\bar{K}_2, t_{i+1}) \end{cases} \quad (13)$$

上式中 K_i 表示 $r(v, t)$ 在各积分点处的函数值, 而 $\bar{K}_i$ 表示曲线 $v = v(t)$ 在第 i 个积分点的斜率。

式 (13) 的计算步骤是: 首先以 $\bar{K}_1$ 为斜率, 从第一积分点出发, 前进半个步长, 得到第二积分点处未知量 $v_{i+1/2}$ 的预估值及 r 的近似值 K_2 ; 然后以 $\bar{K}_2$ 为斜率, 从第一积分点出发, 前进半个步长, 重新计算出第二积分点处未知量 $v_{i+1/2}$ 的预估值及 r 的近似值 K'_2 , 并以 $(K_2 + K'_2)/2$ 作为函数 $r(v, t)$ 在第二积分点处的平均值; 最后, 以 $\bar{K}_2$ 为斜率, 从第一积分点出发, 前进一个步长, 计算出第三积分点未知量的预估值 v_{i+1} 。类似地, 也可在更高阶的龙格库塔法的基础上建立精细龙格库塔法。

4 算例

算例 1:

考察微分方程组 $\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 - x_2 = t^2 e^{-t} \\ \ddot{x}_2 - x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$, 其初

始条件为 $\begin{cases} x_1(0) = 2.5 \\ x_2(0) = 1 \\ \dot{x}_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2(0) = 1 \end{cases}$ 。在该问题中, 其对应的

H 矩阵是不可逆的, 因而矩阵求逆的方法不适用。本文将用四阶四级龙格库塔法 (RK44)、对非齐次项进行三次样条拟合的广义精细积分方法 (GPTSIM) 和 5 点 Cotes 积分公式 (CPTI) 计算, 并将它们的结果与精确解相比较。表 1 和表 2 分别表示当时时间步长取 0.5 和 0.1 时的计算结果。

从表 1、2 可以看出, 相对于四阶四级龙格库塔法和广义精细积分法 (对非齐次项采用三次样条拟合), 基于 Cotes 积分公式的精细积分法有更高的精度。当 $\tau = 0.5$ 时, 它有 7 位有效数字; 当 $\tau = 0.1$ 时, 它能保证有 9 至 11 位有效数字。即基于 Cotes 积分的精细积分法的精度是令人满意的。

算例 2:

表中黑体数字表示与精确解不相吻合的部分。考察非线性周期系统响应问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2.25x_1 - (x_1 - 1.5\sin t)^3 + 2\sin t \\ x_1(0) = 0.0, \quad x_2(0) = 1.59929 \end{cases}$$

表 1 $\tau = 0.5$ 时的计算结果

Table 1 Numerical results for $\tau = 0.5$

Time/s	$t=3$	$t=5$	$t=7$	$t=9$
RK44	5.322 334 025 338 68	9.371 578 309 710 95	12.222 473 750 672 3	17.437 562 261 786 6
GPTSIM	5.328 108 096 102 87	9.373 003 819 811 20	12.228 984 563 864 7	17.450 945 777 277 7
CPTI	5.325 872 867 897 16	9.367 693 683 366 54	12.222 471 741 064 6	17.442 124 971 359 2
Exact solution	5.325 872 188 115 75	9.367 693 183 991 85	12.222 470 904 262 1	17.442 123 972 570 3

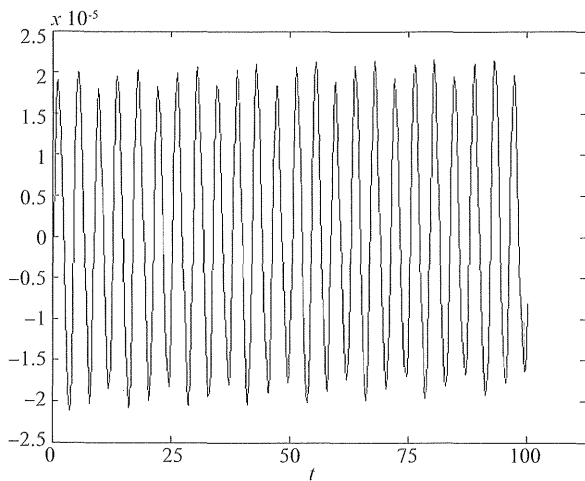
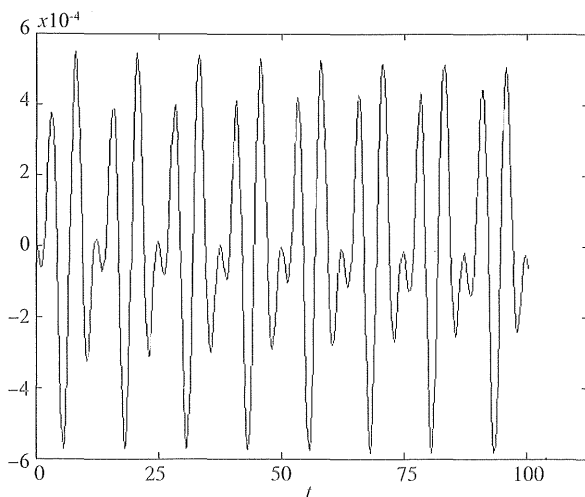
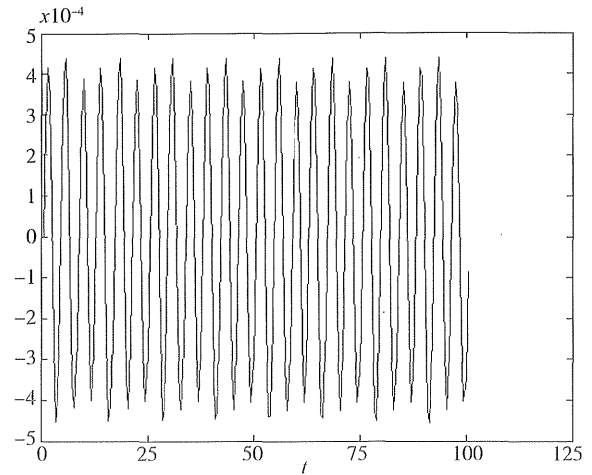
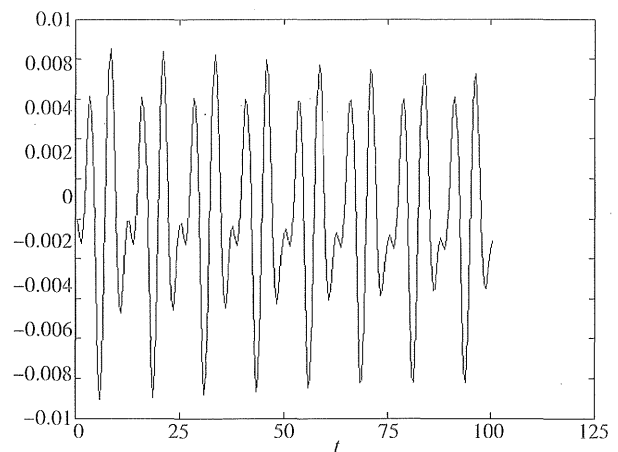
表 2 $\tau = 0.1$ 时的计算结果Table 1 Numerical results for $\tau = 0.1$

Time/s	$t=3$	$t=5$	$t=7$	$t=9$
RK44	5.325 863 290 540 11	9.367 706 324 436 58	12.222 459 903 710 5	17.442 131 349 291 3
GPTSIM	5.325 873 009 907 31	9.367 695 360 665 23	12.222 473 181 873 3	17.442 127 406 200 9
CPTI	5.325 872 188 160 35	9.367 693 184 024 06	12.222 470 904 317 5	17.442 123 972 634 7
Exact solution	5.325 872 188 115 75	9.367 693 183 991 85	12.222 470 904 262 1	17.442 123 972 570 3

其精确解为

$$\begin{cases} x_1(t) = 1.59941\sin t - 0.00004\sin 3t \\ x_2(t) = 1.59941\cos t - 0.00012\cos 3t \end{cases}$$

采用式 (13) 的改进精细龙格库塔法 (IPRK) 和四阶龙格库塔法 (RK44) 分别对时间步长为 0.25, 0.5 进行计算, 并给出变量 x_1 的绝对误差随时间的变化图, 计算至 100 s。结果见图 1-4。

图 1 $\tau = 0.25$ 时变量 x_1 的误差 (IPRK)Fig. 1 The error of x_1 for $\tau = 0.25$ (IPRK)图 2 $\tau = 0.25$ 时变量 x_1 的误差 (RK44)Fig. 2 The error of x_1 for $\tau = 0.25$ (RK44)图 3 $\tau = 0.5$ 时变量 x_1 的误差 (IPRK)Fig. 3 The error of x_1 for $\tau = 0.5$ (IPRK)图 4 $\tau = 0.5$ 时变量 x_1 的误差 (RK44)Fig. 4 The error of x_1 for $\tau = 0.5$ (RK44)

上面各图中横坐标为时间, 纵坐标为各种方法的计算误差。图 1、2 是 $\tau = 0.25$ 时的计算结果。从图中可以看出, 改进精细龙格库塔法的精度与四阶龙格库塔法相比, 要提高一个数量级。图 3、4 是 $\tau = 0.5$ 时的计算结果。此时, 改进精细龙格库塔法的精度比四阶龙格库塔法的精度要提高两个数量级。这说明, 在时间步长较大的情况下, 改进精细龙格库塔法依然能够保证有较好的精度。

5 结 论

本文研究了结构动力学非线性问题的精细积分方法,并得出以下结论:①对 Duhamel 积分形式特解的数值积分算法进行了改进,在保持精度的前提下降低了计算量和存储量;②借鉴龙格库塔法的思想,对 Duhamel 积分中的未知量进行预估,并提出了一种改进的精细龙格库塔法;③算例的结果证明,本文提出的改进精细龙格库塔法是十分有效的。

参考文献:

- [1] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131-135.
ZHONG W X. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 131-135.
- [2] 林家浩, 钟万勰, 张文首. 结构非平稳随机响应方差矩阵的直接精细积分计算[J]. 振动工程学报, 1999, 12(1): 1-8.
LIN J H, ZHONG W X, ZHANG W S. Precise integration of the variance matrix of structural non stationary random responses [J]. Journal of Vibration Engineering, 1999, 12(1): 1-8.
- [3] 王忠, 王雅琳, 王芳. 任意激励下结构动力响应的状态方程精细积分法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(4): 419-422.
WANG Z, WANG Y L, WANG F. A high precise integration scheme for structural dynamics analysis under arbitrary excitation [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(4): 419-422.
- [4] GU Y X, CHEN B S, ZHANG H W, GUAN Z Q. Precise time-integration method with dimensional expanding for structural dynamic equations [J]. AIAA Journal, 2001, 39(12): 2394-2399.
- [5] 任传波, 贺光宗, 李忠芳. 结构动力学精细积分的一种高精度通用计算格式[J]. 机械科学与技术, 2005, 24(12): 1507-1509.
REN C B, HE G Z, LI Z F. A high-precision and general computational scheme in precise integration of structural dynamics [J]. Mechanical Science and Technology, 2005, 24(12): 1507-1509.
- [6] 储德文, 王元丰. 精细直接积分法的积分方法选择[J]. 工程力学, 2002, 19(6): 1.
CHU D W, WANG Y F. Integration formula selection for precise direct integration method [J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(6): 1.
- [7] 汪梦甫, 周锡元. 结构动力方程的更新精细积分方法[J]. 力学学报, 2004, 36(2): 191-195.
WANG M F, ZHOU X Y. Renewal precise time step integration method of structural dynamic analysis [J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(2): 191-195.
- [8] 谭述君, 钟万勰. 非齐次动力方程 Duhamel 项的精细积分[J]. 力学学报, 2007, 39(3): 374-381.
TAN S J, ZHONG W X. Precise integration method for Duhamel terms arising from non-homogenous systems [J]. Acta Mechanica Sinica, 2007, 39(3): 374-381.
- [9] 富明慧, 刘祚秋, 林敬华. 一种广义精细积分法[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 672-677.
FU M H, LIU Z Q, LIN J H. A generalized precise time step integration method [J]. Acta Mechanica Sinica, 2007, 39(5): 672-677.
- [10] 赵秋玲. 非线性动力学方程的精细积分算法[J]. 力学与实践, 1998, 20(6): 24-26.
ZHAO Q L. An accurate integration method for solving nonlinear dynamics problems [J]. Mechanics in Engineering, 1998, 20(6): 24-26.
- [11] 裘春航, 吕和祥, 鍾万勰. 求解非线性动力学方程的分段直接积分法[J]. 力学学报, 2002, 34(3): 369-378.
QIU C H, LÜ H X, ZHONG W X. On segmented direct-integration method for nonlinear dynamics equations [J]. Acta Mechanica Sinica, 2002, 34(3): 369-378.
- [12] 张洵安. 结构非线性动力学方程的精细积分算法[J]. 应用力学学报, 2000, 17(4): 164-168.
ZHANG X N. The precise integration algorithm for nonlinear dynamic equations of structures [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2000, 17(4): 164-168.
- [13] 梅树立, 张森文, 陆启韶. 基于精细积分技术的非线性动力学方程的同伦摄动法[J]. 计算力学学报, 2005, 22(6): 665-670.
MEI S L, ZHANG S W, LU Q S. A wavelet precise integration method for burgers equations based on homotopy technique [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2005, 22(6): 665-670.
- [14] 富明慧, 林敬华. 精细积分法在非线性动力学问题中的应用[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2008, 47(3): 1-5.
FU M H, LIN J H. Precise time step integration method in nonlinear dynamics [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sun Yatseni, 2008, 47(3): 1-5.
- [15] ZHANG S Y, DENG Z C, LI W C. A precise Runge-Kutta integration and its application for solving nonlinear dynamical systems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 184: 496-502.