第 49 卷 第 5 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 49 No. 5
2010 年 9 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Sep. 2010

时间尺度上二阶中立型时滞动力方程的振动性*

韩振来[1,2]，孙书荣[1]，张承慧[2]
（1. 济南大学 理学院，山东 济南 250022；
2. 山东大学 控制科学与工程学院，山东 济南 250061）

摘 要：借助时间尺度的有关理论和广义 Riccati 变换、积分平均技巧，研究了一类较为广泛的时间尺度上二阶中立型时滞 Emden-Fowler 动力方程的振动性，给出了该类方程振动的几个定理，所得结果推广和改进了已知文献中的有关结论，统一了相应的微分方程与差分方程振动性的有关结果，指出了其差异性。最后，给出了例子说明所得结果的适应性。

关键词：时间尺度；中立型时滞 Emden-Fowler 动力方程；振动性
中图分类号：O175.7 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2010）05-0021-04

Oscillation of Second-order Neutral Delay Dynamic Equations on Time Scales

HAN Zhenlai[1,2], *SUN Shurong*[1], *ZHANG Chenghui*[2]
（1. School of Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, China；
2. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China）

Abstract: By means of the theory on time scales, Riccati transformation technique and integral averaging technique, we consider oscillation of generalized second-order neutral delay Emden-Fowler dynamic equation on time scales, establish some oscillation theorems. These results extend and improve the results given, unify the results on oscillation of the second-order neutral delay Emden-Fowler differential equation and difference equation, point out the difference. An example is given to illustrate the results.

Key words: time scales; neutral delay Emden-Fowler dynamic equations; oscillation

关于时间尺度上时滞动力方程解的振动性研究目前已有一些研究成果[1-5]。然而，关于时间尺度上中立型时滞动力方程解的振动性研究刚开始，见文献［6-10］。

考虑下列形式的时间尺度上二阶中立型时滞动力方程

$$[r(t)\,|x^{\Delta}(t)|^{\gamma-1}x^{\Delta}(t)]^{\Delta}+q_1(t)\,|y(\delta_1(t))|^{\alpha-1}y(\delta_1(t))+q_2(t)\,|y(\delta_2(t))|^{\beta-1}y(\delta_2(t))=0,\quad t\in[t_0,\infty)_T \tag{1}$$

这里 $x(t)=y(t)+p(t)y(\tau(t))$，$[t_0,\infty)_T=[t_0,\infty)\cap T$ 是时间尺度区间。

在文献［7-9］中，对函数 f 要求满足条件 $|f(t,u)|\geqslant q(t)\,|u^{\gamma}|$。很明显，当 $f(t,u)=|u^{\gamma-1}|u$ 时，是不满足条件 $|f(t,u)|\geqslant q(t)\,|u^{\gamma}|$ 的。因此，文献［7-9］中的结论是不能应用到方程（1）的。方程（1）包含了其他很多重要的方程，研究方程（1）是非常有意义的。

为叙述方便，假设下面的条件成立：

(A_1) α,β 和 γ 是正常数，且满足 $0<\alpha<\gamma<\beta$；

(A_2) $p,q_1,q_2\in C_{rd}([t_0,\infty)_T,\mathbb{R}^+)$，$\mathbb{R}^+=[0,$

* 收稿日期：2009-10-09
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60774004，60904024）；山东省自然科学基金资助项目（Y2008A28）；济南大学博士基金资助项目（B0621，XBS0843）
作者简介：韩振来（1962 年生），男，教授；E-mail：hanzhenlai@163.com

$\infty)$, $0 \leqslant p < 1$, $r \in C_{rd}^1([t_0,\infty)_T,\mathbb{R}^+)$, $r^\Delta \geqslant 0$;

(A_3) $p \in C_{rd}([t_0,\infty)_T,\mathbb{R})$, $0 \leqslant p(t) \leqslant 1$;

(A_4) $\tau,\delta_1,\delta_2 \in C_{rd}([t_0,\infty)_T,T)$, $\tau(t) \leqslant t$, $\delta_1(t) \leqslant t$, $\delta_2(t) \leqslant t$, $t \in [t_0,\infty)_T$，且满足 $\lim_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$, $\lim_{t\to\infty}\delta_1(t)=\infty$, $\lim_{t\to\infty}\delta_2(t)=\infty$;

(A_5) $\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{1}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Delta t = \infty$。

另外，给出下面一些记号。令 $\mu = \min\left\{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma},\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right\}$, $\delta(t) = \min_{t\geqslant t_0}\{\delta_1(t),\delta_2(t)\}$,

$$Q_1(t) = \mu(q_1(t)(1-p(\delta_1(t)))^{\alpha})^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}\cdot (q_2(t)(1-p(\delta_2(t)))^{\beta})^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}\frac{\delta(t)^{\gamma}}{\sigma(t)}$$

1 基本引理

首先给出下面两个引理，其证明方法参见文献[6]。

引理1 若 $y(t)$ 是方程（1）的一个最终正解，则存在 $t_* \in [t_0,\infty)_T$，使得 $x(t) > 0$, $x^\Delta(t) \geqslant 0$, $t \in [t_*,\infty)_T$，而且

$$[r(t)\,|x^\Delta(t)|^{\gamma-1}x^\Delta(t)]^\Delta \leqslant -q_1(t)((1-p(\delta_1(t)))x(\delta_1(t)))^{\alpha} - q_2(t)((1-p(\delta_2(t)))x(\delta_2(t)))^{\beta} < 0,\quad t \in [t_*,\infty)_T \tag{2}$$

引理2 设

$$\int_{t_0}^{\infty} q_1(t)((1-p(\delta_1(t)))\delta_1(t))^{\alpha}\Delta t = \infty \tag{3}$$

或

$$\int_{t_0}^{\infty} q_2(t)((1-p(\delta_2(t)))\delta_2(t))^{\beta}\Delta t = \infty \tag{4}$$

成立。若 $y(t)$ 是方程（1）的最终正解，则 $x^{\Delta\Delta}(t) < 0$, $x(t) \geqslant tx^\Delta(t)$, $\frac{x(t)}{t}$ 是严格递减的。

2 结果与证明

定理1 设（3）式或（4）式成立。若

$$\limsup_{t\to\infty}\left[t\left(\frac{1}{r(t)}\int_t^{\infty} q_2(s)\cdot (1-p(\delta_2(s)))^{\beta}\left(\frac{\delta_2(s)}{s}\right)^{\beta}\Delta s\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right] = \infty \tag{5}$$

成立，则方程（1）是振动的。

证明 假设方程（1）有非振动的解 $y(t)$，不妨设最终为正，我们只考虑这种情况，因为当 $y(t)$ 最终为负时可类似证明。由引理1和引理2，存在 $t_* \in [t_0,\infty)_T$，当 $t \in [t_*,\infty)_T$ 时，有 $x(t) > 0$, $x^\Delta(t) \geqslant 0$, $x^{\Delta\Delta}(t) < 0$, $x(t) \geqslant tx^\Delta(t)$, $\frac{x(t)}{t}$ 是严格递减的。由（2）式，对 $T \geqslant t$, $T,t \in [t_*,\infty)_T$，有

$$\int_t^T q_2(s)(1-p(\delta_2(s)))^{\beta}(x(\delta_2(s)))^{\beta}\Delta s \leqslant -\int_t^T [r(s)(x^\Delta(s))^{\gamma}]^\Delta\Delta s = r(t)(x^\Delta(t))^{\gamma} - r(T)(x^\Delta(T))^{\gamma} \leqslant r(t)(x^\Delta(t))^{\gamma}$$

因此 $\left(\frac{1}{r(t)}\int_t^{\infty} q_2(s)(1-p(\delta_2(s)))^{\beta}(x(\delta_2(s)))^{\beta}\Delta s\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leqslant x^\Delta(t)$。所以

$$x(t) \geqslant tx^\Delta(t) \geqslant t\left(\frac{1}{r(t)}\int_t^{\infty} q_2(s)(1-p(\delta_2(s)))^{\beta}(x(\delta_2(s)))^{\beta}\Delta s\right)^{\frac{1}{\gamma}} \geqslant t\left(\frac{1}{r(t)}\int_t^{\infty} q_2(s)(1-p(\delta_2(s)))^{\beta}\left(\frac{\delta_2(s)}{s}x(s)\right)^{\beta}\Delta s\right)^{\frac{1}{\gamma}} \geqslant x^{\frac{\beta}{\gamma}}(t)\,t\left(\frac{1}{r(t)}\int_t^{\infty} q_2(s)(1-p(\delta_2(s)))^{\beta}\left(\frac{\delta_2(s)}{s}\right)^{\beta}\Delta s\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

即有 $t\left(\frac{1}{r(t)}\int_t^{\infty} q_2(s)(1-p(\delta_2(s)))^{\beta}\left(\frac{\delta_2(s)}{s}\right)^{\beta}\Delta s\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leqslant \left(\frac{1}{x(t)}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}-1}$。注意到 $\frac{\beta}{\gamma} > 1$，得

$$t\left(\frac{1}{r(t)}\int_t^{\infty} q_2(s)(1-p(\delta_2(s)))^{\beta}\cdot \left(\frac{\delta_2(s)}{s}\right)^{\beta}\Delta s\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leqslant \left(\frac{1}{x(t_*)}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}-1}$$

这与条件（5）矛盾。证毕。

注1 很明显，当 $0<\alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta$ 时，定理1的结论也是成立的。因此，定理1包含了Agarwal[1]中定理4.4的有关结果。

定理2 设（3）式或（4）式成立，$\gamma \geqslant 1$。若存在 $\rho,\eta \in C_{rd}^1([t_0,\infty)_T,\mathbb{R}^+)$，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\rho^{\sigma}(s)(Q_1(s)-\eta^\Delta(s)) - \rho^\Delta(s)\eta(s) - \frac{r(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{((\rho^\Delta(s))_+)^{\gamma+1}}{(\rho^{\sigma}(s))^{\gamma}}\left(\frac{\sigma(s)}{s}\right)^{\gamma^2}\right]\Delta s = \infty \tag{6}$$

成立，则方程（1）是振动的。这里 $(\rho^\Delta(s))_+ = \max\{\rho^\Delta(s),0\}$。

证明 假设方程（1）有非振动的解 $y(t)$，不妨设最终为正，我们只考虑这种情况，因为当 $y(t)$ 最终为负时可类似证明。由引理1和引理2，存在 $t_* \in [t_0,\infty)_T$，当 $t \in [t_*,\infty)_T$ 时，有 $x(t) > 0$, $x^\Delta(t) \geqslant 0$, $x^{\Delta\Delta}(t) < 0$, $x(t) \geqslant tx^\Delta(t)$, $\frac{x(t)}{t}$ 是

严格递减的。定义函数 $\omega(t)$ 如下

$$\omega(t)=\rho(t)\Big[\frac{r(t)\,|x^\Delta(t)|^{\gamma-1}x^\Delta(t)}{x^\gamma(t)}+\eta(t)\Big],\quad t\in[t_*,\infty)_T \tag{7}$$

于是 $\omega(t)>0$ 。由微分法，可以得到

$$\omega^\Delta=\frac{\rho^\Delta(t)}{\rho(t)}\omega(t)+\rho^\sigma(t)\Big[\frac{(r(t)(x^\Delta(t))^\gamma)^\Delta}{(x^\sigma(t))^\gamma}-\frac{r(t)(x^\Delta(t))^\gamma(x^\gamma(t))^\Delta}{x^\gamma(t)(x^\sigma(t))^\gamma}+\eta^\Delta(t)\Big] \tag{8}$$

由公式 $((x(t))^\gamma)^\Delta=\gamma\int_0^1[hx^\sigma+(1-h)x]^{\gamma-1}x^\Delta(t)\mathrm{d}h$，并注意到 $\gamma\geqslant1$，得

$$((x(t))^\gamma)^\Delta=\gamma\int_0^1[hx^\sigma+(1-h)x]^{\gamma-1}x^\Delta(t)\mathrm{d}h\geqslant\gamma(x(t))^{\gamma-1}x^\Delta(t)$$

考虑到（2）式，由（8）式得

$$\omega^\Delta\leqslant\frac{\rho^\Delta(t)}{\rho(t)}\omega(t)-\rho^\sigma(t)q_1(t)\cdot(1-p(\delta_1(t)))^\alpha\frac{(x(\delta_1(t)))^\alpha}{(x^\sigma(t))^\gamma}-\rho^\sigma(t)q_2(t)(1-p(\delta_2(t)))^\beta\frac{(x(\delta_2(t)))^\beta}{(x^\sigma(t))^\gamma}-\gamma\rho^\sigma(t)\frac{r(t)(x^\Delta(t))^{\gamma+1}}{x(t)(x^\sigma(t))^\gamma}+\rho^\sigma(t)\eta^\Delta(t) \tag{9}$$

由 Youngs 不等式 $|ab|\leqslant\frac{1}{p}|a|^p+\frac{1}{q}|b|^q,a,b\in\mathbb{R},p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，可以得到

$$\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}q_1(t)(1-p(\delta_1(t)))^\alpha\frac{(x(\delta_1(t)))^\alpha}{(x^\sigma(t))^\gamma}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}q_2(t)(1-p(\delta_2(t)))^\beta\frac{(x(\delta_2(t)))^\beta}{(x^\sigma(t))^\gamma}\geqslant$$
$$\Big[q_1(t)(1-p(\delta_1(t)))^\alpha\frac{(x(\delta_1(t)))^\alpha}{(x^\sigma(t))^\gamma}\Big]^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}\cdot\Big[q_2(t)(1-p(\delta_2(t)))^\beta\frac{(x(\delta_2(t)))^\beta}{(x^\sigma(t))^\gamma}\Big]^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}=$$
$$(q_1(t)(1-p(\delta_1(t)))^\alpha)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}\cdot(q_2(t)(1-p(\delta_2(t)))^\beta)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}\cdot\Big(\frac{(x(\delta_1(t)))^\alpha}{(x^\sigma(t))^\gamma}\Big)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}\Big(\frac{x(\delta_2(t)))^\beta}{(x^\sigma(t))^\gamma}\Big)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}\geqslant$$
$$(q_1(t)(1-p(\delta_1(t)))^\alpha)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}\cdot(q_2(t)(1-p(\delta_2(t)))^\beta)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}\Big(\frac{x(\delta(t))}{x^\sigma(t)}\Big)^\gamma$$

因为 $\frac{x(t)}{t}$ 是严格递减的，所以 $\frac{x(\delta(t))}{x^\sigma(t)}\geqslant\frac{\delta(t)}{\sigma(t)}$，$\frac{x(t)}{x^\sigma(t)}\geqslant\frac{t}{\sigma(t)}$，由（7）式和（9）式，得

$$\omega^\Delta(t)\leqslant\frac{\rho^\Delta(t)}{\rho(t)}\omega(t)-\mu\rho^\sigma(t)\cdot(q_1(t)(1-p(\delta_1(t)))^\alpha)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}\cdot(q_2(t)(1-p(\delta_2(t)))^\beta)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}\Big(\frac{\delta(t)}{\sigma(t)}\Big)^\gamma-\gamma\rho^\sigma(t)\frac{1}{(r(t))^{\frac{1}{\gamma}}}\Big(\frac{t}{\sigma(t)}\Big)^\gamma\cdot\Big(\frac{\omega(t)}{\rho(t)}-\eta(t)\Big)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}+\rho^\sigma(t)\eta^\Delta(t)$$

即

$$\omega^\Delta(t)\leqslant-\rho^\sigma(t)[Q_1(t)-\eta^\Delta(t)]+\frac{\rho^\Delta(t)}{\rho(t)}\omega(t)-\gamma\rho^\sigma(t)\frac{1}{(r(t))^{\frac{1}{\gamma}}}\Big(\frac{t}{\sigma(t)}\Big)^\gamma\cdot\Big|\frac{\omega(t)}{\rho(t)}-\eta(t)\Big|^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$$

因此，

$$\omega^\Delta(t)\leqslant-\rho^\sigma(t)[Q_1(t)-\eta^\Delta(t)]+\rho^\Delta(t)\eta(t)+(\rho^\Delta(t))_+\Big|\frac{\omega(t)}{\rho(t)}-\eta(t)\Big|-\gamma\rho^\sigma(t)\frac{1}{(r(t))^{\frac{1}{\gamma}}}\Big(\frac{t}{\sigma(t)}\Big)^\gamma\Big|\frac{\omega(t)}{\rho(t)}-\eta(t)\Big|^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$$

令 $\lambda=1+\frac{1}{\gamma}$，$A=\gamma^{\frac{1}{\lambda}}(\rho^\sigma)^{\frac{1}{\lambda}}\cdot\frac{1}{(r(t))^{\frac{1}{\gamma+1}}}\Big(\frac{t}{\sigma(t)}\Big)^{\frac{\gamma^2}{\gamma+1}}\Big|\frac{\omega(t)}{\rho(t)}-\eta(t)\Big|$，

$$B=(\rho^\Delta(t))_+^\gamma\Big(\frac{\gamma}{\gamma+1}\Big)^\gamma\frac{(r(t))^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}}{\gamma^{\frac{\gamma^2}{\gamma+1}}(\rho^\sigma)^{\frac{\gamma^2}{\gamma+1}}}\Big(\frac{\sigma(t)}{t}\Big)^{\frac{\gamma^3}{\gamma+1}}$$

由不等式 $\lambda AB^{\lambda-1}-A^\lambda\leqslant(\lambda-1)B^\lambda,\lambda\geqslant1,A\geqslant0,B\geqslant0$，得

$$\omega^\Delta(t)\leqslant-\rho^\sigma(t)[Q_1(t)-\eta^\Delta(t)]+\rho^\Delta(t)\eta(t)+\frac{r(t)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{((\rho^\Delta(t))_+)^{\gamma+1}}{(\rho^\sigma(t))^\gamma}\Big(\frac{\sigma(t)}{t}\Big)^{\gamma^2}$$

对上式从 t_* 到 t 积分，得

$$\omega(t)-\omega(t_*)\leqslant-\int_{t_*}^t\Big(\rho^\sigma(s)[Q_1(s)-\eta^\Delta(s)]-\rho^\Delta(s)\eta(s)-\frac{r(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{((\rho^\Delta(s))_+)^{\gamma+1}}{(\rho^\sigma(s))^\gamma}\Big(\frac{\sigma(s)}{s}\Big)^{\gamma^2}\Big)\Delta s$$

因此，

$$\int_{t_*}^t\Big(\rho^\sigma(s)[Q_1(s)-\eta^\Delta(s)]-\rho^\Delta(s)\eta(s)-\frac{r(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{((\rho^\Delta(s))_+)^{\gamma+1}}{(\rho^\sigma(s))^\gamma}\Big(\frac{\sigma(s)}{s}\Big)^{\gamma^2}\Big)\Delta s\leqslant$$

$$\omega(t_*) - \omega(t) \leqslant \omega(t_*)$$

这与（6）式矛盾。证毕。

注2 当$0 < \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$时，定理2的结论也是成立的。只不过是我们可以约定，当$0 < \alpha = \gamma = \beta$时，取$\eta = 2$；当$0 < \alpha = \gamma \neq \beta$或$0 < \alpha \neq \gamma = \beta$时，取$\eta = 1$。在这种约定下，当$0 < \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$时，下面的定理都是成立的。

定理3 设（3）式或（4）式成立，$0 < \gamma < 1$。若存在$\rho, \eta \in C_{rd}^1([t_0, \infty)_T, \mathbb{R}^+)$，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\Big[\rho^\sigma(s)(Q_1(s) - \eta^\Delta(s)) - \rho^\Delta(s)\eta(s) - \frac{r(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{((\rho^\Delta(s))_+)^{\gamma+1}}{(\rho^\sigma(s))^\gamma}\Big(\frac{\sigma(s)}{s}\Big)^\gamma\Big]\Delta s = \infty$$

成立，则方程（1）是振动的。这里$(\rho^\Delta(s))_+ = \max\{\rho^\Delta(s), 0\}$。

注3 由定理2和定理3得知，当$\gamma \geqslant 1$或$0 < \gamma < 1$时，方程（1）的振动条件是不同的。但是，当时间尺度$T = \mathbb{R}$时，相对应的振动条件却是相同的。

3 例 子

考虑时间尺度上二阶中立型时滞动力方程

$$[\,|x^\Delta(t)|x^\Delta(t)]^\Delta + q_1(t)|y(\delta_1(t))|^{\alpha-1}y(\delta_1(t)) + q_2(t)|y(\delta_2(t))|^{\beta-1}y(\delta_2(t)) = 0, t \in [t_0, \infty)_T$$

这里$x(t) = y(t) + p(t)y(\tau(t))$，取$0 < \alpha < \gamma = 2 < \beta$，$r(t) = 1, 0 \leqslant p(t) < 1$，$a > 0$，

$$q_1(t)((1 - p(\delta_1(t)))\delta_1(t))^\alpha = \frac{a}{t(\delta_1(t))},$$

$$q_2(t)((1 - p(\delta_2(t)))\delta_2(t))^\beta = \frac{bt^{\beta-1}}{\sigma(t)(\delta_2(t))^\beta},$$

$b > 0$，则有

$$\int_{t_0}^{\infty} q_1(t)((1 - p(\delta_1(t)))\delta_1(t))^\alpha\Delta t = \int_{t_0}^{\infty}\frac{a}{t}\Delta t = \infty$$

即（3）式成立。又

$$\limsup_{t\to\infty}\Big[t\Big(\frac{1}{r(t)}\int_t^\infty q_2(s)\cdot(1 - p(\delta_2(s)))^\beta\Big(\frac{\delta_2(s)}{s}\Big)^\beta\Delta s\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big] = \limsup_{t\to\infty}\Big[t\Big(\int_t^\infty\frac{b}{s\sigma(s)}\Delta s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] = \limsup_{t\to\infty}\sqrt{bt} = \infty$$

即（5）式成立。由定理1，得知该方程振动。

参考文献：

[1] AGARWAL R P, BOHNER M, SAKER S H. Oscillation of second order delay dynamic equations [J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 2005, 13(1):1－18.

[2] ZHANG B G, ZHU S L. Oscillation of second order nonlinear delay dynamic equations on time scales [J]. Computers Math Applic, 2005, 49(4):599－609.

[3] SAHINER Y. Oscillation of second-order delay differential equations on time scales [J]. Nonlinear Analysis, TMA, 2005, 63(5/6/7):1073－1080.

[4] HAN Z L, SUN S R, SHI B. Oscillation criteria for a class of second order Emden-Fowler delay dynamic equations on time scales [J]. J Math Anal Appl, 2007, 334(2): 847－858.

[5] 韩振来，时宝，孙书荣. 时间尺度上二阶时滞动力方程的振动性 [J]. 中山大学学报：自然科学版，2007，46(6): 10－14.

[6] 孙书荣，韩振来，张承慧. 时间尺度上二阶 Emden-Fowler 中立型时滞动力方程的振动准则 [J]. 上海交通大学学报，2008，42(12):2070－2075.

[7] AGARWAL R P, O'REGAN D, SAKER S H. Oscillation criteria for second order nonlinear neutral delay dynamic equations [J]. J Math Anal Appl, 2004, 300(1): 203－217.

[8] SAKER S H. Oscillation of second-order nonlinear neutral delay dynamic equations on time scales [J]. J Comp Appl Math, 2006, 187(2): 123 － 141.

[9] WU H W, ZHUANG R K, MATHSEN R M. Oscillation criteria for second-order nonlinear neutral variable delay dynamic equations [J]. Appl Math Comput, 2006, 178(2): 321－331.

[10] ZHU Z Q, WANG Q R. Existence of nonoscillatory solutions to neutral dynamic equations on time scales [J]. J Math Anal Appl, 2007, 335(2): 751－762.