

# 结构损伤识别的柔度灵敏度方法\*

杨秋伟<sup>1</sup>, 刘济科<sup>2</sup>

(1. 绍兴文理学院 土木工程系, 浙江 绍兴 312000;  
2. 中山大学 应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

**摘要:** 提出了结构损伤识别的柔度灵敏度方法。首先根据 Neumann 级数展开来推导结构柔度矩阵关于单元刚度损伤参数的灵敏度公式, 以此为基础建立结构的损伤识别方程, 通过矩阵拉直运算将矩阵方程转化为线性方程组来求解各单元损伤参数。指出了柔度矩阵灵敏度方法优于特征对灵敏度方法的几个显著特点。最后用一个桁架结构模型对所提方法作了验证。

**关键词:** 损伤识别; 模态参数; 柔度; 灵敏度

**中图分类号:** O32; TH113.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2010) 01-0016-04

## Damage Identification by the Sensitivity Analysis of Structural Flexibility

YANG Qiuwei<sup>1</sup>, LIU Jike<sup>2</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China;  
2. Department of Mechanics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** Structural damage identification based on the sensitivity technique of structural flexibility is studied. Using the Neumann series expansion, the flexibility sensitivity of the structure is firstly derived to obtain the damage detection equation. Then all the elemental damage parameters can be easily calculated by manipulating the matrix equation into a set of linear equations. Two significant advantages of the proposed flexibility sensitivity method are pointed out. The first one is that the computation of structural flexibility sensitivity is very simple and then the presented method is easily to implement. The second one is that the number of independent linear equations of the proposed method is greater than that of the previous eigenparameter sensitivity technique in most case. So damage detection results obtained by the proposed scheme will be more accurate than that obtained by the eigenparameter perturbation method. A 31-bar structure is used as a numerical example to validate the presented flexibility sensitivity method and the results are satisfactory even if noise is present. It has been shown that the proposed approach is more effective than the eigenparameter sensitivity technique and may be a promising method for structural damage detection.

**Key words:** damage identification; modal parameter; flexibility; sensitivity

利用结构振动模态参数的改变来识别结构损伤的方法已成为众多工程界共同关注的热点<sup>[1-3]</sup>。由于模态测试中只能获得少数低阶频率和不完整的振型, 如何利用这些不完备的模态数据来识别结构损

伤已成为目前工程实践中的一项迫切任务。为了使测试自由度数与有限元模型自由度数一致, 许多种方法都采用振型扩展或模型缩聚来达到此目的<sup>[4-8]</sup>, 但这两种做法都会给识别结果带来额外的

\* 收稿日期: 2008-12-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10772202, 10972241); 浙江省教育厅科研计划资助项目 (20070503); 广东省自然科学基金资助项目 (07003680, 01000014)

作者简介: 杨秋伟 (1979 年生), 男, 副教授; 通讯作者: 刘济科; E-mail: jikelu@hotmail.com

误差<sup>[9-10]</sup>。频率或振型灵敏度方法具有能够直接使用不完备模态数据来识别结构损伤的优点<sup>[11-12]</sup>, 即用灵敏度方法建立损伤识别方程时不需要进行模型缩聚或者振型扩展, 从而避免了给识别结果带来额外的误差。但频率灵敏度法存在着不适用于对称结构且已知的频率信息量过少的缺点<sup>[13]</sup>。振型灵敏度方法比频率灵敏度方法能提供更多的已知信息量, 且能适用于对称结构, 但也存在以下缺点: 振型灵敏度的计算公式较复杂, 需要花费很大的计算量; 实际计算中需要截断高阶模态, 这会导致计算精度的降低; 由于未加入频率信息, 对未测量区域的损伤情况难以评估。

鉴于特征对灵敏度方法存在的上述缺点, 本文提出了柔度矩阵灵敏度方法。由于结构的柔度矩阵中包含了频率与振型两种信息, 所以该方法既能适用于对称结构, 同时又能建立起比特征对灵敏度方法更多的方程来求解未知的损伤参数, 对未测量区域的损伤情况也能作出一定程度的评估。采用 Neumann 级数展开推导的柔度矩阵灵敏度公式形式简单, 易于计算。通过矩阵的拉直运算将矩阵形式的损伤识别方程转化为线性方程组, 便于求解各单元损伤参数。以一个 31 单元的桁架结构为例对本文方法作了验证, 结果表明本文方法是简单而可靠的, 能够在测量不完整和有误差的情况下较好地识别出结构损伤。

## 1 柔度矩阵灵敏度方法

我们首先来推导结构柔度矩阵关于单元刚度损伤参数的灵敏度公式。由于结构的损伤通常都是由于结构刚度的减小所引起的, 所以一般假设损伤前后结构的质量矩阵不变, 损伤只表现为结构刚度矩阵的变化。考虑一个自由度的结构系统, 设其损伤前的刚度矩阵为  $K$ , 相应的柔度矩阵  $F$  为

$$F = K^{-1} \quad (1)$$

若结构中仅第  $i$  个单元体发生损伤, 刚度损伤参数设为  $\alpha_i$ , 那么损伤后结构的柔度矩阵  $F_d$  为

$$F_d = (K - \alpha_i K_i)^{-1} \quad (2)$$

其中  $K_i$  为第  $i$  个单元体的刚度矩阵。方程 (2) 可按 Neumann 级数展开为

$$F_d = K^{-1} + \alpha_i K^{-1} K_i K^{-1} + \alpha_i^2 K^{-1} K_i K^{-1} K_i K^{-1} + \dots \quad (3)$$

将方程 (1) 代入方程 (3) 中并忽略高阶项可得

$$\Delta F = \alpha_i F K_i F \quad (4)$$

其中  $\Delta F$  表示柔度矩阵的变化量, 即

$$\Delta F = F_d - F \quad (5)$$

由方程 (4) 可知, 结构柔度矩阵对第  $i$  个单元体的一阶灵敏度为

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = F K_i F \quad (6)$$

由方程 (6) 可见, 计算结构柔度矩阵的一阶灵敏度只需要结构损伤前的柔度矩阵和各单元体的刚度矩阵即可, 公式形式简单, 耗费的计算量也比计算振型灵敏度时花费的计算量要小得多, 这对于监测那些自由度数目巨大的大型工程结构是十分有利的。

现在我们来建立结构损伤识别的方程。根据线性叠加原理, 若  $N$  个单元体发生损伤, 则柔度矩阵改变量的一阶近似为

$$\Delta F = \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \quad (7)$$

众所周知,  $\Delta F$  可由结构损伤前后的前几阶模态比较精确地获得, 即

$$\Delta F = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_{dj}} \varphi_{dj} \varphi_{dj}^T - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j \varphi_j^T \quad (8)$$

其中  $\lambda_j$ ,  $\varphi_j$  和  $\lambda_{dj}$ ,  $\varphi_{dj}$  分别表示损伤前后结构的第  $j$  阶特征对。在由方程 (6) 和 (8) 分别求出柔度矩阵对各单元的灵敏度和近似的柔度矩阵变化量以后, 通过求解方程 (7) 便可获得各单元的损伤参数值, 据此便可判定损伤的位置和程度。由以上分析可见, 用柔度矩阵灵敏度法来进行损伤识别时, 由于计算柔度矩阵变化量  $\Delta F$  时同时用到了频率和振型两种信息, 所以该方法结合了频率灵敏度法和振型灵敏度法的优点, 既可以充分利用模态测试信息和直接使用不完整的测量振型, 同时又适用于对称结构且对未布置测点区域的损伤情况亦可作出监测。

对于矩阵方程 (7) 的求解方法详述如下:

由于方程 (7) 是矩阵方程, 我们通过矩阵拉直运算将其转化为线性方程组来求解。矩阵的拉直是指将矩阵的每行向量按序写成一列再转置成为一个列向量,  $n \times n$  维矩阵拉直后即成为  $n^2$  维向量。以矩阵  $\Delta F$  为例, 设其第  $(j, k)$  个元素用  $\Delta f_{jk}$  表示, 那么该矩阵的拉直  $\overline{\Delta F}$  为

$$\overline{\Delta F} = [\Delta f_{11} \cdots \Delta f_{1n} | \Delta f_{21} \cdots \Delta f_{2n} | \cdots | \Delta f_{n1} \cdots \Delta f_{nn}]^T \quad (9)$$

对方程 (7) 两边采用拉直运算可得到线性方程组如下

$$\overline{\Delta F} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \overline{\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}} \quad (10)$$

其中向量  $\overline{\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}}$  表示相应矩阵的拉直。令

$$S = \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha_N} \right] \quad (11)$$

$$\{a\} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T \quad (12)$$

那么由方程 (10) 便可求得各损伤参数为

$$\{a\} = S^+ \Delta \bar{F} \quad (13)$$

最后我们来分析一下采用柔度矩阵灵敏度法和特征对灵敏度法分别能建立多少个独立的方程来求解这  $N$  个未知的损伤参数  $\{a\}$ 。假设模态测试中布置了  $r$  个传感器来测量振型, 总共测量了结构的前  $m$  阶模态, 显然, 仅采用频率灵敏度法时最多只能建立  $m$  个方程, 仅采用振型灵敏度法时最多能建立  $m \times r$  个方程。而使用柔度矩阵灵敏度法时, 根据方程 (10), 当采用不完整的振型 ( $r$  维) 来计算时, 虽然向量  $\Delta \bar{F}$  是  $r^2$  维, 但由于柔度矩阵的对称性, 其中只有  $\frac{r \times (r+1)}{2}$  个独立方程。工程实践中, 一般  $r$  远大于  $m$ , 所以绝大多数情况下  $\frac{r \times (r+1)}{2}$  都大于或远大于  $m \times r$ , 这意味着由柔度矩阵灵敏度法所获得的独立方程数目比由特征对灵敏度法获得的独立方程数目多, 这对于求解大量未知的损伤参数  $\{a\}$  是很有利的。

## 2 算例

以图 1 所示的桁架结构为例来验证上述方法的可行性, 其基本参数如下:  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $A = 0.004 \text{ m}^2$ 。只采用前 4 阶模态来计算, 损伤后的振型施加了 5% 的噪声来模拟测量误差。假设两种损伤情况: (1) 单元 13 刚度损伤 15%; (2) 单元 13 和 15 刚度分别损伤 10% 和 15%。分别讨论测量振型完整和不完整时应用柔度矩阵灵敏度法的损伤识别结果, 其中测量振型不完整情况是指结构中仅前 10 个自由度被测量 (即节点 1~5 所对应的自由度)。

对于第 1 种损伤情况, 运用柔度矩阵灵敏度法, 采用完整测量振型和不完整测量振型下的损伤识别结果如图 2 所示。由图 2 可以看出, 当采用完整的测量振型时, 用柔度矩阵灵敏度法可以得到精度很高的识别结果, 可以清晰地判定单元 13 是损伤单元, 损伤程度的计算值为  $\alpha_{13} = 0.1506$ , 这与假设值 0.15 很接近。而采用不完整测量振型时识别精度有所降低, 但仍然可以确定单元 13 发生损伤, 相应地损伤程度计算值为  $\alpha_{13} = 0.1996$ 。

对于第 2 种损伤情况, 完整测量振型和不完整测量振型条件下的计算结果如图 3 所示。由图 3 可

见, 无论是采用完整测量振型还是采用不完整的测量振型均可以判定出单元 13 和 15 发生损伤, 采用完整测量振型时损伤程度的计算值分别为  $\alpha_{13} = 0.0929$  和  $\alpha_{15} = 0.1704$ 。当采用不完整测量振型时损伤程度的计算值分别为  $\alpha_{13} = 0.1399$  和  $\alpha_{15} = 0.143$ 。

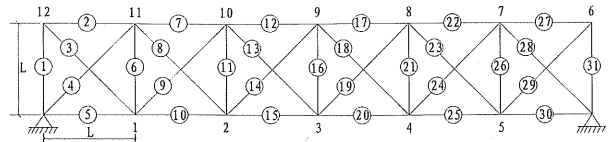


图 1 桁架结构

Fig. 1 Truss structure

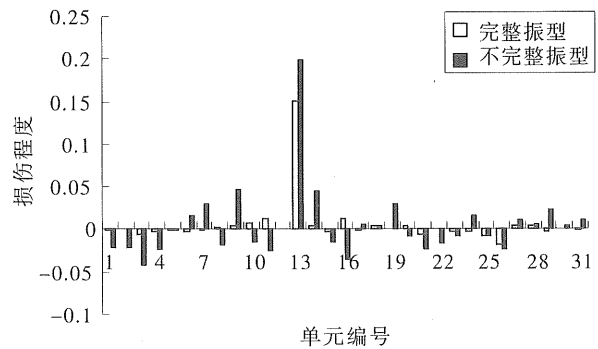


图 2 单元 13 损伤时的识别结果

Fig. 2 Damage detection results when element 13 is damaged.

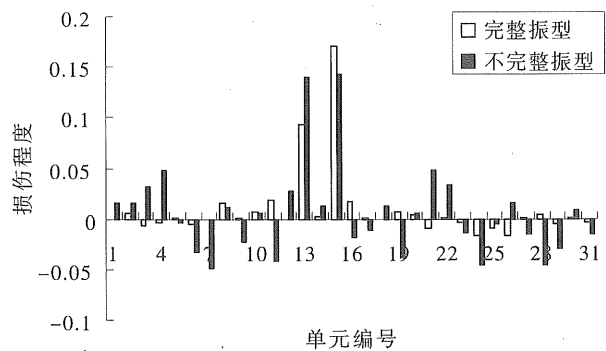


图 3 单元 13 和 15 损伤时的识别结果

Fig. 3 Damage detection results when elements 13 and 15 are damaged

## 3 结论

利用 Neumann 级数展开推导了结构柔度矩阵灵敏度公式, 以此为基础建立结构损伤识别方程来求解各单元损伤参数。分析并指出了柔度矩阵灵敏度方法优于特征对灵敏度方法的几个显著特点。算例结果表明了柔度灵敏度方法的可行性。当然, 对

于损伤检测方法而言, 实验验证是重要的, 作者将在后续工作中进一步研究。

#### 参考文献:

- [1] 杨秋伟. 基于振动的结构损伤识别方法研究进展[J]. 振动与冲击, 2007, 26 (10): 86 - 91.
- [2] 刘济科, 杨秋伟. 基于残余力向量的结构损伤识别两步法[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2004, 43(4): 1 - 4.
- [3] YANG Q W, LIU J K. Damage identification by the eigenparameter decomposition of structural flexibility change[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 78 (4): 444 - 459.
- [4] YANG Q W, LIU J K. Structural damage identification based on residual force vector[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 305: 298 - 307.
- [5] SHI Z Y, LAW S S, ZHANG L M. Structural damage detection from modal strain energy change[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2000, 126 (12): 1216 - 1223.
- [6] 杨秋伟, 刘济科. 损伤识别一种改进的残余力向量法[J]. 固体力学学报, 2006, 27 (1): 83 - 85.
- [7] 杨秋伟, 刘济科. 一种改进的模型缩聚方法[J]. 力学与实践, 2006, 28 (2): 71 - 72.
- [8] 刘济科, 杨秋伟. 结构损伤识别中的模型缩聚问题[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2006, 45(1): 1 - 4.
- [9] ZIMMERMAN D C, KAOUK M. Structural damage detection using a minimum rank update theory[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1994, 116 (2): 222 - 231.
- [10] JAMES G, ZIMMERMAN D, CAO T. Development of a coupled approach for structural damage detection with incomplete measurements[J]. AIAA Journal, 1998, 36 (12): 2209 - 2217.
- [11] MESSINA A, WILLIAMS E J, CONTURSI T. Structural damage detection by a sensitivity and statistical-based method[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 216 (5): 791 - 808.
- [12] SHI Z Y, LAW S S, ZHANG L M. Damage localization by directly using incomplete mode shapes[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126 (6): 656 - 660.
- [13] YANG Q W, LIU J K. A coupled method for structural damage identification[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 296: 401 - 405.