第49卷 第1期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 49 No. 1
2010年 1月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Jan. 2010

量化单一带标公式的消解*

金继伟，赵希顺
（中山大学逻辑与认知研究所，广东 广州 510275）

摘　要：在引入量化单一带标公式的概念后，给出其消解算法，并证明该消解算法是健全的和拒绝性完备的。因此该算法可用于对量化单一带标公式进行理论上的研究，同时也可用于在实际应用中解决这类公式的可满足性问题。最后，根据消解算法，得出一个可以在多项式时间内判定可满足性的量化单一带标公式的子类。

关键词：量化单一带标公式；消解；可满足性；多项式时间可判定
中图分类号：O142　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2010）01－0020－04

Resolution for Quantified Monosigned Formulae

JIN Jiwei, *ZHAO Xishun*
(Institute of Logic and Cognition, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: After the introduction of quantified monosigned formulae, the resolution for them is investigated and proved to be sound and refutational complete. This kind of resolution can be used not only for theoretical studies but also for practical applications. As a result, a subclass of quantified monosigned formulae which can be solved the satisfiability problem in polynomial time is recognized.

Key words: quantified monosigned formulae; resolution; satisfiability; in polynomial time

布尔公式的可满足性问题（SAT）是最早的NP完全问题之一，并且具有重要的实际应用意义，因此它很早就引起计算机科学家们的关注，并被广泛研究，产生了很多积极的成果[1-3]。于此同时，各种SAT问题的推广也不断被提出，其中比较重要的是约束可满足性问题（CSP）和带标公式（signed formulae）的可满足性问题[4-5]。虽然CSP和SAT都是NP完全的，但由于SAT是CSP的特例，CSP的算法复杂度比SAT要高，于是人们又提出带标公式作为SAT和约束可满足问题的折衷解决方案。带标公式在表达上比布尔公式更灵活，在可满足性问题的计算复杂性方面又比CSP低，因此吸引了一些计算机科学家的关注。近年来人们对带标公式的研究取得了一些进展和成果[6-9]。

对公式进行量化扩展是很自然的事情，早些年人们已经将SAT扩展到QBF（量化布尔公式）。最近，同样的扩展也发生在CSP上，一些人将其扩展为QCSP（量化约束可满足性问题）。扩展后的公式具有更强的表达能力，同时这样的扩展也提高了公式的计算复杂性，从NP完全到PSPACE完全。

把带标公式扩展为量化带标公式也是很自然的想法，量化带标公式在表达上比QBF更能体现出原问题的结构特点（目前人们对原问题的结构特点越来越重视）。计算复杂度上又没有QCSP那么高。有些人工智能领域的问题，比如博弈染色问题，用量化带标公式来表示比用QBF和QCSP来表示更合适。鉴于这些优点，同时又因为目前国内外对量化带标公式的研究还很少，我们对量化带标公式做了一系列研究工作。在本文中，我们将对其做进一步的研究。

带标公式虽然在可满足性问题的计算上比CSP简单些，但是如果对其不做任何限制的话，它的可满足性问题仍然比较难解决。目前的研究工作大都

* 收稿日期：2009－01－05
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60970040，14010638）
作者简介：金继伟（1977年生），男，博士生；E-mail：jinjiwei2004@gmail. com

集中在三类具有一定限制的带标公式上：正规带标公式（regular signed formula）、单一带标公式（monosigned formula）和反单一带标公式（negative monosigned formula）。我们已经对正规带标公式和反单一带标公式进行了量化扩展，本文主要研究单一带标公式的量化扩展。

文本的重点是研究量化单一带标公式的消解算法。消解最早在文献［10］中被提出，应用于布尔 CNF 公式，而后文献［11］又引入应用于量化布尔公式的量化消解。近年来，应用于带标公式的消解也被提出并取得一些积极成果[8,12]。本文将应用于带标公式的消解算法扩展到应用于量化单一带标公式，证明它是健全的和拒绝性完备的。因此该算法可同时用于理论研究和实际应用。最后，作为应用消解算法的理论结果，本文给出一个可在多项式时间内判定其可满足性问题的量化单一带标公式的子类。

1　量化单一带标公式

本节将给出量化单一带标公式的定义和一些相关术语，并证明它的一些基本的性质。

称一个可数无限集 VA 为变量的集合，DOM 为变量集合中变量的值域的并集，也就是说对于任意 $v \in VA$，都有一个非空值域 $D_v \subseteq DOM$，这里我们要求 $|D_v| \geqslant 2$。

对于任意 $v \in VA$ 和任意 $i \in D_v$，$i{:}v$ 被称作是一个单一文字（简称文字），i 是该文字的标志。文字 $i{:}v$ 的非正式意思是 v 要取值为 i。文字的析取称为子句，子句的合取称为（单一带标）公式。在某些文献中，用集合的方式表示子句和公式，即把子句看成文字的集合，公式看成子句的集合，本文在不引起误解的情况下，同时采用这两种表示方式。

一个（部分）赋值 φ 是一个由变量到其值域的映射。对于每个变量 $v \in \mathrm{dom}(\varphi)$，有 $\varphi(v) \in D_v$。

给定一个赋值 φ，有：

（1）对于文字 $i{:}v$：如果 $v \in \mathrm{dom}(\varphi)$ 并且 $\varphi(v) = i$（$\varphi(v) \neq i$），我们称 $i{:}v$ 是真的或 $i{:}v = 1$（$i{:}v$ 是假的或 $i{:}v = 0$）。

（2）对于一个子句 C，如果存在一个文字 $i{:}v \in C$ 并且 $i{:}v = 1$，我们称 C 是真的（$C = 1$）；如果 C 中所有的文字都是假的，我们称 C 是假的（$C = 0$）。

（3）对于一个公式 F，如果它的所有子句都是真的，我们称 F 是真的（$F = 1$）；如果存在一个子句 C 是假的，我们称 F 是假的（$F = 0$）。

给出一个公式 F，如果存在一个赋值使得 F 为真，我们就说 F 是可满足的；否则，F 是不可满足的。

赋值同时也可以用于精简公式。给定一个赋值 φ 和一个公式 F，$\varphi * F$ 表示首先删除 F 中所有为真的子句，然后在剩下的子句中删除所有为假的文字而形成的公式。可以看出，如果 φ 令 F 为真，经过精简，$\varphi * F$ 将成为一个空公式$\top$；如果 φ 令 F 为假，经过精简 $\varphi * F$ 将包含空子句 $\perp$。为方便起见，当 $\mathrm{dom}(\varphi) = \{v\}$ 并且 $\varphi(v) = i$ 时，用 $F_{v=i}$ 来表示 $\varphi * F$。

下面我们给出量化单一带标公式的定义：

定义 1　量化单一带标公式是仅由下面规则形成公式：

（1）每一个（单一带标）公式都是量化单一带标公式。

（2）如果 Φ 是一个量化单一带标公式，v 是其中的一个变量，那么 $\forall v\Phi$ 和 $\exists v\Phi$ 也都是量化单一带标公式。

可以看出，量化单一带标公式（下文中简称量化公式）具有 $Q_1v_1\cdots Q_nv_n\alpha$ 的形式，这里 $Q_i \in \{\exists, \forall\}$，$v_i$（$i \in \{1, \cdots n\}$）是变量，$\alpha$ 是一个单一带标公式。我们用大写希腊字母如 Φ、Ψ 来表示量化公式。$Q_1v_1\cdots Q_nv_n$ 被称为前缀，α 被称为主公式。有时我们使用简写形式 $\Phi = Q\alpha$。紧跟在 $\exists$（$\forall$）后的变量被称作存在（全称）变量，由存在（全称）变量形成的文字被成为存在（全称）文字。对于量化公式 $\Phi = Q_1v_1\cdots Q_nv_n\alpha$，用 $\mathrm{var}(\Phi)$ 来表示 Φ 中的变量的集合。

给定一个量化公式 $\Phi = Q_1v_1\cdots Q_nv_n\alpha$，如果所有主公式中的变量都在前缀中出现，我们称 Φ 为闭公式。对于非闭公式 Φ，我们用 $\mathrm{free}(\Phi)$ 来表示自由变量（出现在主公式，却不出现在前缀中的变量）的集合。此外我们定义一个偏序“$<$”。对于两个约束变量 v_i，v_j，如果 $i < j$，我们称 v_i 小于（$<$）v_j，也就是说 v_i 在 v_j 的左边（前缀中）。自由变量永远小于任何约束变量。这个偏序也适用于文字。

给定一个量化公式 Φ 和一个赋值 φ，定义 Φ 的值如下：

定义 2　给定量化公式 Φ 和赋值 φ，$\mathrm{free}(\Phi) \subseteq \mathrm{dom}(\varphi)$。定义 Φ 的值，$V_\varphi(\Phi)$ 如下：

（1）如果 Φ 的前缀为空，也就是说 Φ 是一个

（非量化）公式 α，那么：

a. 若 $\varphi * \alpha = \top$，则 $V_\varphi(\Phi) = 1$；

b. 若 $\perp \in \varphi * \alpha$，则 $V_\varphi(\Phi) = 0$。

（2）如果 $\Phi = \exists v Q\alpha$，那么 $V_\varphi(\Phi) = \max\{V_\varphi(Q\alpha_{v=i}) : i \in D_v\}$；

（3）如果 $\Phi = \forall v Q\alpha$，那么 $V_\varphi(\Phi) = \min\{V_\varphi(Q\alpha_{v=i}) : i \in D_v\}$。

Φ 是可满足的当且仅当存在一个赋值 φ，使得 $V_\varphi(\Phi) = 1$。

从上面定义可以看出，给定一个赋值，量化公式中的约束变量并不会影响量化公式的值。并且闭公式在任何赋值下都具有一样的值：1（真）或者 0（假）。因此对于闭公式我们有时会用真或者假来代替可满足与不可满足。

假设一个量化公式 Φ 的自由变量为 $\{v_1, \cdots, v_n\}$，下面结论是显而易见的：

命题 1 Φ 是可满足的当且仅当 $\exists v_1 \cdots \exists v_n \Phi$ 是真的。

由于每个变量只能取有限的值，故判定量化公式的可满足性为 PSPACE 问题。同时 QBF 也可以看做是量化公式的特殊形式，故：

命题 2 量化公式的可满足性问题是 PSPACE 完全的。

定义 3 称两个量化公式 Φ 和 Ψ 是等价的，记做 $\Phi \approx \Psi$，当且仅当对于任何赋值 $\varphi(\mathrm{free}(\Phi) \cup \mathrm{free}(\Psi) \subseteq \mathrm{dom}(\varphi))$，我们都有：$V_\varphi(\Phi) = V_\varphi(\Psi)$。

下面命题说明对主公式的等价转换，不影响整个量化公式的值。

命题 3 给定前缀 Q，对于量化公式 Φ 和 Ψ 有：

$$\Phi \approx \Psi \Rightarrow Q\Phi \approx Q\Psi$$

与一般 QBF 公式类似，下面的命题也是显而易见的：

命题 4 给定量化公式 $\Phi = Q\alpha$，$C_1, \cdots, C_n$ 是 α 的子句。对每个 $i = 1, \cdots, n$，在 C_i 中删除所有不小于任何存在文字的全称文字，得到的新子句记做 C'_i。以下关系成立：

$$\Phi \approx Q((\alpha \setminus \{C_1, \cdots, C_n\}) \cup \{C'_1, \cdots, C'_n\})$$

2 量化单一带标公式的消解

我们在其他文献中研究了量化带标公式、量化正规带标公式和量化反单一带标公式的消解，本文在这一节引入量化单一带标公式的消解算法。

首先给出量化公式的消解的定义：

定义 4 给定一个量化公式 $\Phi = Q\alpha$，如果存在一个存在变量 v 和两个子句 $C_1 = D_1 \cup \{i:v\}$ 和 $C_2 = D_2 \cup \{j:v\} \in \alpha$，$i \neq j$，构造子句 R 如下：

（1）在 C_1 和 C_2 中删除所有不小于任何存在文字的全称文字，得到的新子句记做 $D'_1 \cup \{i:v\}$ 和 $D'_2 \cup \{j:v)\}$；

（2）构造新子句 $R = D'_1 \cup D'_2$。

如果 R 不是永真式，那么上面的操作就被称作一个量化消解步。R 被称作消解结果，C_1 和 C_2 被称作父子句。该消解步记做：$\Phi \vdash^1 R$。

在上面定义中，永真式指的是对某个变量 v 包含两个不同文字 $i:v, j:v$ 的子句，这样的子句不论怎样赋值都为真，因此对消解演算无用。

下面我们证明量化消解对量化公式而言是健全的和拒绝性完备的。

定理 1 给定一个量化公式 Φ，Φ 是不可满足的当且仅当通过使用一系列量化消解步，能够产生一个只包含全称文字的消解结果 R。

这里我们将空子句也称为只包含全称文字，下文我们将这样的子句称为全称子句。

证明 根据命题 3、命题 4 和一些单一带标公式消解的结论，例如文献[6]，从右向左方向明显成立，下面证明相反方向也成立。

施归纳于前缀的长度：

如果 Φ 的前缀为空，也就是说 $\Phi = \alpha$，这里 α 是一个（非量化）单一带标公式。文献[6]已经证明如果 α 不可满足，则可以通过消解的方法得到空子句，而该消解是量化消解的特殊形式。

如果 $\Phi = \exists v Q\alpha$。因为 Φ 不可满足，所以对于每一个 $i \in D_v = \{1, \cdots, n\}$，量化公式 $Q(\alpha_{v=i})$，记做 Φ_i，是不可满足的。从前文可以知道，Φ_i 是通过 $Q\alpha$ 这样得到的：

（1）删除所有包含 $i:v$ 的子句，并且

（2）在剩下的子句中，删除所有变量 v 形成的文字。

由归纳假设，根据量化消解算法，我们可以经由 Φ_i 得到一个全称子句 R_i。如果在这个量化消解过程中恢复那些从原量化公式中删除的文字，可以得到 R_i 或者 $\{i_1:v, \cdots, i_m:v\} \cup R_i$，这里所有的 $i_1, \cdots, i_m$ 均不等于 i。

如果前者成立，那本定理自然成立。所以我们假设对于每一个 $i \in D_v$，我们都得到 $\{i_1:v, \cdots, i_m:v\} \cup R_i$。容易看出，这些 $\{i_1:v, \cdots, i_m:v\}$，$i \in D_v$ 的交集为空，因此我们可以通过一系列量化消解步，消解掉 v 形成的文字，得到一个空子句。

如果 $\Phi = \forall vQ\alpha$，因为 Φ 是不可满足的，一定存在一个 $i \in D_v$ 使得量化公式 Φ_i 不可满足。这里 Φ_i 是通过和上面证明中相同的方式得到的。

由归纳假设可以得到一个只包含全称文字的子句 R_i。用同样的方法，我们可以得到 R_i 或者 $\{i_1:v,\cdots,i_m:v\} \cup R_i$。这两者都是全称子句。证毕。

量化消解是二元消解，也就是说参与消解的父子句有两个，而产生的消解结果是一个。这样的消解对于只包含两个文字的子句是封闭的，因为消解是在每个父子句中删除掉一个文字，然后结合两个父子句，这样形成的消解结果不可能超过两个文字。因此，有下面的定理：

定理 2　如果一个量化公式 Φ 中的所有子句最多只包含两个文字，那么它的可满足性是多项式时间可判定的。

证明　根据定理 1 可知，可以通过消解演算来判定量化公式的可满足性。

又根据上文的分析，公式 Φ 中的子句通过消解，得到的消解结果最多只包含两个文字。所有只包含两个文字的子句的数目，对于 Φ 中变量的个数而言，是可以限制在多项式级内的。也就是说，最多只要检查多项式级个子句，就可以判定是否可以消解出全称子句，也就是公式 Φ 是否可满足。证毕。

3　结束语

本文提出量化单一带标公式的概念，并给出其消解算法，证明该消解算法对于量化单一带标公式而言是健全的和拒绝性完备的。最后本文介绍了一个可以在多项式时间内判定其可满足性的量化单一带标公式的子类。

量化带标公式在表达上比量化布尔公式更灵活，同时又没有太多的提高计算复杂度，可以说是 QBF 和 QCSP 的折衷。如果用其来表示某些推理、博弈问题，在综合考虑到维护原问题结构方面和计算可行性方面，量化带标公式将比后两者更有优势。因此对其研究很有必要，这也是本文的动机之一。限于篇幅，本文只研究量化单一带标公式。量化单一带标公式和其他类型的公式之间的转化关系以及这些转化所花费的代价，将是我们下一步工作的重点。

参考文献：

[1] DAVIS M, LOGEMANN G, LOVELAND D. A machine program for theorem-proving[J]. Communications of the ACM, 1962, 5 (7): 394 – 397.

[2] COOK S A. The complexity of theorem proving procedures[C]. Proceedings of 3rd Ann. ACM Symp on Theory of Computing, 1971: 151 – 158.

[3] MARQUES J P, SAKALLAH K A. GRASP: A search algorithm for propositional satisfiability[J]. IEEE Transactions on Computers, 1999, 48(5): 506 – 521.

[4] ROSSI F, VENABLE B, WALSH T. Preferences in constraint satisfaction and optimization[J]. AI Magazine, 2008, 29(4): 58 – 68.

[5] HEBRARD E, O'SULLIVAN B, WALSH T. Distance constraints in constraint satisfaction[C]. Proceedings of IJCAI – 2007, 2007: 106 – 111.

[6] ANSOTEGUI C, BÉJAR R, CABISCOL A, LI C M, MANYÀ F. Resolution methods for many-valued CNF formulas[C]. Proceedings of the Fifth International Symposium on the Theory and Applications of Satisfiability Testing(SAT – 2002), 2002: 156 – 163.

[7] ANSOTEGUI C, MANYÀF. Mapping many-valued CNF formulas to boolean CNF formulas[C]. Proceedings of the 35th International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL'05), 2005: 290 – 295.

[8] BAAZ M, FERMÜLLER C. Resolution-basedtheorem proving for many-valued logics[J]. Journal of Symbolic Computation, 1995, 19: 353 – 391.

[9] BECKERT B, HÄHNLE R, MANYÀ F. The SAT problem of signed CNF formulas[J]. Labelled Deduction, Applied Logic Series, Kluwer, Dordrecht, 2000, 17: 61 – 82.

[10] ROBINSON J A. A machine oriented logic based on the resolutin principle[J]. Journal of the ACM, 1965, 12: 23 – 41.

[11] FLÖGEL A. Resolution für quantifizierte Boole'sche formeln[D]. Dissertation, Universität Paderborn 1993.

[12] KULLMANN O. Constraint satisfaction problem in clausal form: Autarkies, minimal unsatisfiability, and applications to hypergraph inequalities[C]. In Nadia Creignou, Phokion Kolaitis, and Heribert Vollmer, editors, Complexity of Constraints, number 06401 in Dagstuhl Seminar Proceedings, IBFI, Schloss Dagstuhl, Germany, 2006.