关联函数解析式的另一种推导方法*

方锡岩，冯开喜，丘斯伟，张宏浩
（中山大学物理科学与工程技术学院，广东 广州 510275）

摘　要： 探讨了 d 维欧氏空间中自由标量场的关联函数，用两种不同的方法推导求得了它的解析表达式，其中第二种方法为该文提出。文献上一般只讨论了到 3 维以及更低维空间的结果，作者推广得到了任意维的结果。计算 3 维空间的关联函数的方法一般是在 3 维空间的球坐标下直接进行积分求解，该文也应用这种方法在 d 维空间的球坐标系下直接积分得到了推广的结果。另一方面，发现可以通过选取合适的坐标系可有效地降低积分动量的维数，同样可以求得关联函数的解析式来。两种方法虽然用到的技术不同，但经过复杂的运算之后所得到的结果是一致的，结果表明：任意维空间的自由标量场的关联函数与变形 Bessel 函数只差一个有理因子，其中变形 Bessel 函数的阶数是由空间的维数所决定。

关键词： 关联函数；积分维数约化；欧氏空间
中图分类号： O411.1　**文献标志码：** A　**文章编号：** 0529-6579（2010）03-0152-03

Another Derivation of Analytic Expression of Correlation Function

FANG Xiyan, FENG Kaixi, QIU Siwei, ZHANG Honghao
(School of Physics and Engineering, Sun Yet-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The analytic expression of correlation function of free scalar field in any dimensional Euclidean space is derived by two different methods, the second of which is proposed. The results in 3 and lower dimensional space are generally discussed in the literature, and the generalized result in arbitrary dimensional space is obtained. When studying the case in 3-dimensional space, people often do the integration directly in the 3-dimensional space using the sphere coordinates, and this method is also applied in this paper to get the generalized result. On the other hand, it is found that choosing the appropriate coordinate system can effectively reduce the integration variable dimension and finally arrive at the same result. The result shows that the correlation function of free scalar field in any dimensional space is related to the modified Bessel function, whose order is determined by the space dimension.

Key words: correlation function; reduction of integration variable dimension; Euclidean space

在量子场论和统计物理中，关联函数是非常重要的一个物理概念。在量子场论中，关联函数在微扰论的费曼图计算中有重要用途；在统计物理中，关联函数的形式定义了关联长度 ξ 与临界指数 η。对于自由标量场理论，关联函数是可以有解析表达式的[1-9]。其中文献［1］对三维欧氏空间中自由标量场的关联函数进行了解析推导，该文献先在球坐标下对动量积分进行了计算，得到一个只依赖于动量大小 k 的积分，再将其转化为在复平面上的围道积分，从而求得显式的解析表达式。本文一方面将文献［1］的计算方法应用推广到 d 维欧氏空间，并得到 d 维欧氏空间中关联函数的解析表达式，这种方法我们称之为在 d 维动量空间直接计算的方法；另一方面，我们也提出了另一种推导方

* 收稿日期：2009-07-09
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10747165）；教育部博士点专项基金资助项目（200805581030）；中央高校基本业务费中山大学青年教师培育项目；中山大学物理学基地项目；中山大学教学改革资助项目
作者简介：方锡岩（1965 年生），男，博士，副教授；通讯作者：张宏浩；E-mail：zhh98@mail.sysu.edu.cn

法，即将 d 维动量的积分约化为（$d-1$）维动量的积分，再进行解析计算。这两种方法虽然思路不同，用到的技巧不同，但经过复杂推导之后得到的解析表达式是一致的，并且当我们取 d 为特定值时就恰好回到了前人文献中的结果。下面我们先应用文献［1］的方法，即在 d 维动量空间直接计算的方法，把前人的结果推广到任意维欧氏空间；再应用我们的新方法来推导验证这一结果。

1　d 维动量空间直接计算的传统方法

在 d 维欧氏空间的量子场论中，自由标量场 $s(x)$ 的关联函数定义为：

$$D(x) = \langle s(x)s(0)\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot \boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{k}^2+m^2} \tag{1}$$

现在在 d 维动量空间作广义球坐标变换：$\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_d) \rightarrow (k, \theta_1, \cdots, \theta_{d-1})$，则 d 维动量的积分测度可表示为：

$$\int \mathrm{d}^d \boldsymbol{k} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_{(d-1)}\int_0^{\pi}\sin\theta_{(d-2)}\mathrm{d}\theta_{(d-2)} \cdot \int_0^{\pi}\sin^2\theta_{(d-3)}\mathrm{d}\theta_{(d-3)}\cdots\int_0^{\pi}\sin^{d-2}\theta_1\mathrm{d}\theta_1\int_0^{\infty}k^{d-1}\mathrm{d}k \tag{2}$$

由于被积函数 $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})/(\boldsymbol{k}^2+m^2) = \exp(ikr\cos\theta_1)/(k^2+m^2)$ 只依赖于 k 和 θ_1，可以将其余的（$d-1$）维立体角先作积分而得到：$2\pi^{(d-1)/2}/\Gamma((d-1)/2)$。为简化符号，下面将 θ_1 记为 θ，则

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \cdot \int_0^{\pi}\sin^{d-2}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}k^{d-1}\mathrm{d}k\frac{\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}}{k^2+m^2} \tag{3}$$

下面再对 θ 积分：

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin^{d-2}\theta\,\mathrm{e}^{ikr\cos\theta} = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{kr}\right)^{(d-2)/2}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)J_{(d-2)/2}(kr) \tag{4}$$

因此，

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)}\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{r}\right)^{(d-2)/2} \cdot \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\int_0^{\infty}\mathrm{d}k k^{d/2}\frac{1}{k^2+m^2}J_{(d-2)/2}(kr) \tag{5}$$

运用文献［10］的恒等式 6.566（2），可将对 k 的积分化为变形 Bessel 函数的表达式：

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}k k^{d/2}\frac{1}{k^2+m^2}J_{(d-2)/2}(kr) = m^{d/2-1}K_{d/2-1}(mr) \tag{6}$$

最后得到：

$$D(x) = D(r) = \frac{1}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \cdot \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{r}\right)^{(d-2)/2}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)m^{d/2-1}K_{d/2-1}(mr) \tag{7}$$

对上式因子进行化简可得到：

$$D(r) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\left(\frac{m}{r}\right)^{d/2-1}K_{d/2-1}(mr) \tag{8}$$

这样，我们就求得了 d 维欧氏空间中自由标量场 $s(x)$ 的关联函数的解析表达式。在下一节我们将用另一种方法进行求解，对以上结果进行验证。

2　将 d 维动量积分约化为（$d-1$）维动量积分的方法

在这一节，我们尝试降低关联函数中动量积分的维数。首先，将 d 维欧氏空间中的直角坐标系基矢记为 $\hat{e}_i$（其中 $i = 1,2,\cdots,d$），在选取直角坐标系时不妨使得第一个坐标轴基矢 $\hat{e}_1$ 与位矢 $\boldsymbol{x}$ 垂直，即 $\boldsymbol{x} = x_2\hat{e}_2 + \cdots + x_d\hat{e}_d$，而动量矢量可写为 $\boldsymbol{k} = k_1\hat{e}_1 + \boldsymbol{k}'$，其中 $\boldsymbol{k}' = k_2\hat{e}_2 + \cdots + k_d\hat{e}_d$，这样显然有 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}$。因此，关联函数 $D(x)$ 可写为：

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{k}'\exp(i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}) \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k_1\frac{1}{k_1^2+\boldsymbol{k}'^2+m^2} \tag{9}$$

运用恒等式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}，\text{其中 } \mathrm{Re}(a) > 0 \tag{10}$$

我们可将（9）式中对 k_1 的积分求解出来而得到：

$$D(x) = \frac{\pi}{(2\pi)^d}\int\mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{k}'\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{k}'^2+m^2}}\exp(i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

为简化符号，以下将上式的积分变量 $\boldsymbol{k}'$ 简记为 $\boldsymbol{k}$，在（$d-1$）维球坐标系下进行求解可得：

$$D(x) = \frac{\pi}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{(d-2)/2}}{\Gamma((d-2)/2)} \cdot \int_0^{\pi}\sin^{d-3}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}k^{d-2}\mathrm{d}k\frac{\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{12}$$

再对 θ 积分：

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin^{d-3}\theta\exp(ikr\cos\theta) = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{kr}\right)^{(d-3)/2}\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)J_{(d-3)/2}(kr) \tag{13}$$

可得：

$$D(x) = \frac{\pi}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{(d-2)/2}}{\Gamma((d-2)/2)}\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{r}\right)^{(d-3)/2} \cdot$$

$$\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)\int_0^\infty \mathrm{d}k\,\frac{k^{(d-1)/2}}{\sqrt{k^2+m^2}}J_{(d-3)/2}(kr) \tag{14}$$

对上式中的积分作变量替换：$k \to x \equiv \sqrt{k^2+m^2}/m$，可得：

$$\int_0^\infty \mathrm{d}k\,\frac{k^{(d-1)/2}}{\sqrt{k^2+m^2}}J_{(d-3)/2}(kr) =$$

$$m^{(d-1)/2}\int_1^\infty \mathrm{d}x(x^2-1)^{(d-3)/4}J_{(d-3)/2}(mr\sqrt{x^2-1}) \tag{15}$$

运用文献［10］的恒等式 6.645（2），可将等式右边对 x 的积分用变形 Bessel 函数来表示，即：

$$\int_0^\infty \mathrm{d}k\,\frac{k^{(d-1)/2}}{\sqrt{k^2+m^2}}J_{(d-3)/2}(kr) =$$

$$m^{(d-1)/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(mr)^{-1/2}K_{d/2-1}(mr) \tag{16}$$

因此有

$$D(r) = \frac{\pi}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{(d-2)/2}}{\Gamma((d-2)/2)}\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{r}\right)^{(d-3)/2}\cdot$$

$$\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)m^{(d-1)/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(mr)^{-1/2}K_{d/2-1}(mr)$$

对上式复杂的因子进行化简可得到：

$$D(r) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\left(\frac{m}{r}\right)^{d/2-1}K_{d/2-1}(mr) \tag{17}$$

上式与在上一节用传统方法求得的（8）式完全一致。

3 讨 论

本文用两种方法对 d 维欧氏空间中自由标量场 $s(x)$ 的关联函数进行了解析推导，所得结果完全一致。我们用到的第一种方法与文献［1］的推导方法基本相同，不过我们进一步将文献［1］中在三维空间中的结果推广到了任意维空间。本文用到的第二种方法是我们提出的一种新的思路：先将在动量空间的积分作降低维数的处理，然后再进行计算，这种新方法虽然计算过程以及用到的数学恒等式与第一种方法不相同，但得到的结果与第一种传统方法完全一致。特别地，我们可以取（8）式或（17）式中的 $d=3$，考虑到半奇数阶的变形 Bessel 函数 $K_{1/2}(mr) = \sqrt{\pi/(2mr)}\exp(-mr)$，可得：

$$D(r) = \frac{1}{4\pi r}\mathrm{e}^{-mr}，(d=3) \tag{18}$$

上式与文献［1］中的三维空间的结果完全一致，这进一步验证了我们结果的可靠性。本文建立了欧氏空间的自由标量场关联函数与 Bessel 函数的联系，事实上 Bessel 函数在很多的物理实际问题中都有用到（如文献［11］）。对关联函数的求解虽然仅仅局限于欧氏空间，但以上的计算方法原则上也可以用以求解闵氏空间中的关联函数，以及旋量关联函数等等，这些计算都是直截了当的，本文由于篇幅所限不再展开讨论。值得提出的是，我们实际上还可以将这里的 d 维动量的积分约化为更低维动量的积分，例如：$(d-2)$ 维动量的积分，…，直至 1 维动量的积分，所得到的关联函数的解析表达式应该仍然是一致的，本文提出的将动量积分约化的方法可作为一种新的计算思路，以期引起读者的关注。

参考文献：

［1］ ZEE A. Quantum field theory in a nutshell [M]. New Jersey: Princeton, 2003.

［2］ DEWITT B S. Dynamical theory of groups and fields [M]. New York: Gordon & Breach, 1965.

［3］ GREINER W, REINHARDT J. Quantum electrodynamics [M]. Berlin: Springer, 1992.

［4］ PESKIN M E, SCHROEDER D V. An introduction to quantum field theory [M]. Massachusetts: Perseus Books, 1995.

［5］ HUANG K. Quantum field theory: from operators to path integrals [M]. New York: John Wiley & Sons, 1998.

［6］ DI SESSA A. Quantization of a field with mass in two-dimensional Euclidean space [J]. Phys Rev D, 1974, 9: 2926.

［7］ BEKENSTEIN J D, PARKER L. Path integral evaluation of Feynman propagator in curved space-time [J]. Phys Rev D, 1981, 23: 2850.

［8］ MCKAY D W, MUNCZEK H J. Study of quark propagator solutions to the Dyson-Schwinger equation in a confining model [J]. Phys Rev D, 1997, 55: 2455.

［9］ GUTZWILLER M. Calculation of Feynman diagrams in space and time by stationary phase [J]. Phys Stat Sol B, 2003, 237: 39.

［10］ GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Tables of integrals, series, and products [M]. 6th ed. New York: Academic, 2000.

［11］ 方奕忠，林琼桂. 绳摆一般振动［J］. 中山大学学报：自然科学版，2008，47(2)：32－36.