

# 两类高斯超几何多项式零点的渐近分布\*

周建荣<sup>1</sup>, 黄民海<sup>2</sup>, 王红勇<sup>3</sup>

- (1. 佛山科学技术学院理学院数学系, 广东 佛山 528000;
- 2. 肇庆学院数学与信息科学学院, 广东 肇庆 526061;
- 3. 南华大学数理学院, 湖南 衡阳 421001)

**摘要:** 利用经典的分析方法导出了两类高斯超几何多项式:  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$  和  ${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z)$  零点的渐近分布. 应用 Mathematica 软件, 给出了相关定理的直观说明.

**关键词:** 高斯超几何多项式;  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$  的零点;  ${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z)$  的零点; 零点的渐近分布

**中图分类号:** O174    **文献标志码:** A    **文章编号:** 0529-6579 (2011) 02-0028-04

## Asymptotic Distribution of the Zeros of Two Classes of Gauss Hypergeometric Polynomials

ZHOU Jianrong<sup>1</sup>, HUANG Minhai<sup>2</sup>, WANG Hongyong<sup>3</sup>

- (1. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China;
- 2. School of Mathematics and Information Science, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, China;
- 3. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang 421001, China)

**Abstract:** Some classical analytic methods and techniques are used to analyze the asymptotic distribution of zeros of certain classes of Gauss hypergeometric polynomials:  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$  and  ${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z)$ . Numerical evidence and graphical illustrations of the clustering of zeros on certain curves are generated by Mathematica.

**Key words:** Gauss hypergeometric polynomials; zeros of  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$ ; zeros of  ${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z)$ ; asymptotic distribution of zeros

近年来, 关于超几何多项式零点渐近行为的研究引起了国内外许多专家学者的广泛兴趣和关注<sup>[1-4]</sup>. 对此类问题的研究通常有如下几种方法: 其一, 基于  ${}_2F_1$  类多项式与经典的 Jacobi 正交多项式的联系, 可以获得关于零点位置及其渐近分布等重要信息<sup>[5]</sup>. 其二, 利用经典的复分析方法直接研究超几何多项式零点的渐近行为<sup>[6]</sup>. 其三, 从超几何函数所满足的欧拉积分替换出发, 应用鞍点法导出其零点的渐近性质<sup>[7-8]</sup>.

本文从欧拉积分替换出发, 采用经典的复分析方法探讨了超几何多项式  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$  零点的渐近分布, 进一步借助于 Pfaff 的恒等公式, 得到了

${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z)$  零点的渐近行为. 此外, 应用 Mathematic 软件, 给出了相关定理的直观说明.

### 1 高斯超几何多项式

高斯超几何函数的定义如下:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k z^k}{(\gamma)_k k!}, |z| < 1 \quad (1)$$

其中

$$(\nu)_k = \nu(\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + k - 1) =$$

\* 收稿日期: 2010-08-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10871212); 广东高校优秀青年创新人才培育资助项目 (LYM08101); 广东省自然科学基金资助项目 (10452800001004255); 数学天元青年基金资助项目 (11026205)

作者简介: 周建荣 (1978 年生), 男, 讲师, 博士; E-mail: zhoujianrong2008@yahoo.com.cn

$$\frac{\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\gamma)}, k \geq 1, k \in \mathbb{N}$$

是 Pochhammer 符号。当  $\alpha = -n$  为负整数时，(1) 中的级数退化为一个  $n$  次多项式，此多项式称为高斯超几何多项式。

高斯超几何函数有如下欧拉积分替换

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt, \operatorname{Re}\{\gamma\} > \operatorname{Re}\{\beta\} > 0 \quad (2)$$

选取  $\alpha = -n, \beta = a > 0$  并且  $\gamma = b > a$ ，则有

$${}_2F_1(-n, a; b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} (1-zt)^n dt \quad (3)$$

## 2 零点的渐近分布

以下，我们基于高斯超几何函数的欧拉积分替换 (2)，采用经典的复分析方法，得到了超几何多项式  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$  零点的渐近分布 (定理 1)，进一步借助于 Pfaff 的恒等公式 (13)，得到了  ${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z)$  零点的渐近行为 (定理 2)。

**定理 1** 对任意常数  $b > a > 0$ ，超几何多项式  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$  的零点渐近分布于如下曲线  $|z - 1| = 1, n \rightarrow \infty$ 。(如图 1)

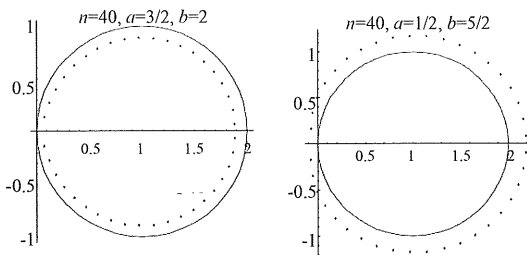


图 1  ${}_2F_1(-40, \frac{3}{2}; 2; z)$  和  ${}_2F_1(-40, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; z)$  的零点及渐近曲线  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

Fig. 1 Zeros of hypergeometric polynomials  ${}_2F_1(-40, \frac{3}{2}; 2; z)$  and  ${}_2F_1(-40, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; z)$  and their asymptotic curves  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

**证明** 为了讨论  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$  零点的渐近行为，需先得到如下积分的渐近展开式

$$I(z) := \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} (1-zt)^n dt = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} [f(t)]^n dt \quad (4)$$

其中  $f(t) = 1 - zt$ 。令

$$I(z) = \int_0^{\frac{1}{z}} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} [f(t)]^n dt + \int_{\frac{1}{z}}^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} [f(t)]^n dt = I_1(z) + I_2(z) \quad (5)$$

此处  $I(z)$  的积分区间  $(0, 1)$  用 0 到  $\frac{1}{z}$  直线段以及  $\frac{1}{z}$  到 1 直线段来替换。

首先计算  $I_1(z)$ ，作变量替换  $r = 1 - zt$ ，从而有

$$I_1(z) = \frac{1}{z^{b-1}} \int_0^1 (1-r)^{a-1} (z-1-r)^{b-a-1} r^n dr \quad (6)$$

由于

$$(z-1+r)^{b-a-1} = z^{b-a-1} \left\{ 1 + \frac{(b-a-1)(r-1)}{z} + \frac{(b-a-1)(b-a-2)(1-r)^2}{2!z^2} + \dots \right\}$$

从而， $I_1(z)$  有如下渐近展开式

$$I_1(z) = \frac{\Gamma(a)n!}{z^a \Gamma(n+1+a)} \left\{ 1 - \frac{(b-a-1)a}{z(n+1+a)} + \frac{(b-a-1)(b-a-2)(a+1)a}{2!z^2(n+2+a)(n+1+a)} + \dots \right\} \quad (7)$$

下面再考虑  $I_2(z)$ ，作变量替换  $r = \frac{1-zt}{1-z}$ ，有

$$I_2(z) = \frac{(-1)^n (z-1)^{n+b-a}}{z^{b-1}} \int_0^1 [1 - (1-z)r]^{a-1} (1-r)^{b-a-1} r^n dr \quad (8)$$

由于

$$[1 - (1-z)r]^{a-1} = z^{a-1} - \frac{(a-1)(1-z)(r-1)}{z^{2-a}} + \frac{(a-1)(a-2)(1-z)^2(r-1)^2}{2!z^{3-a}} + \dots$$

因此， $I_2(z)$  的渐近展开式为

$$I_2(z) = \frac{(-1)^n (z-1)^{n+b-a} \Gamma(b-a)n!}{z^{b-a} \Gamma(n+b-a+1)} \left\{ 1 + \frac{(a-1)(1-z)(b-a)}{nz} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \quad (9)$$

由 (3) - (5) 式，可知  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$  的每一个零点均满足

$$I_1(z) + I_2(z) = 0 \quad (10)$$

从 (7)、(9) 式以及 Stirling 公式：当  $z \rightarrow +\infty$  时， $\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z} e^{-z} z^z$ ，即有

$$(z-1)^n = \frac{(-1)^{n+1} z^{b-2a} \Gamma(a)}{(z-1)^{b-a} \Gamma(b-a)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \quad (11)$$

式 (11) 两边取模并且开  $n$  次方, 容易得出, 当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$|z-1| = 1 \quad (12)$$

引理 1 (Enestrom-Kakeya Theorem<sup>[9][136]</sup>) 若  $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$ , 则多项式  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  的所有零点均落在单位圆盘:  $|z| < 1$  内部。

为了方便起见, 我们将用到如下的 Pfaff 恒等公式<sup>[10]</sup>

$${}_2F_1(-n, \alpha; \beta; z) = \frac{(\beta - \alpha)_n}{(\beta)_n} \cdot$$

$${}_2F_1(-n, \alpha; -n + 1 + \alpha - \beta; 1 - z) \quad (13)$$

定理 2 对任意的常数  $\lambda > 0$  且  $\mu < 1$ , 超几何多项式  ${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z)$  的零点渐近分布于单位圆周:  $|z| = 1$ 。而且当  $0 < \mu < 1, \lambda > 1$  时, 其所有零点均在单位圆盘:  $|z| < 1$  之内; 当  $\mu < 0, 0 < \lambda < 1$  时, 其所有零点均在单位圆盘:  $|z| < 1$  之外 (如图 2)。

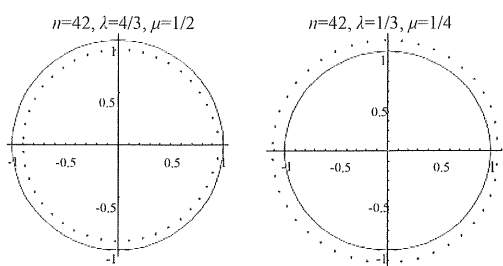


图 2  ${}_2F_1(-42, \frac{4}{3}; -42 + \frac{1}{2}; z)$  和  ${}_2F_1(-42, \frac{1}{3}; -42 - \frac{1}{4}; z)$  的零点及渐近曲线  $x^2 + y^2 = 1$

Fig. 2 Zeros of hypergeometric polynomials

${}_2F_1(-42, \frac{4}{3}; -42 + \frac{1}{2}; z)$  and  ${}_2F_1(-42, \frac{1}{3}; -42 - \frac{1}{4}; z)$  and their asymptotic curves  $x^2 + y^2 = 1$

证明 式 (13) 的左边令  $\alpha = \lambda, \beta = -n + \mu$  可得

$${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z) = \frac{(-n + 1 - \bar{b})_n}{(-n + 1 + \bar{a} - \bar{b})_n} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; z) \quad (14)$$

其中  $\bar{a} = \lambda, \bar{b} = 1 + \lambda - \mu, \bar{z} = 1 - z$ 。由 (14) 式和定理 1 可知,  ${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z)$  的零点渐近分布于单位圆周:  $|z| = 1$ 。设

$${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z) = 1 + \sum_{k=1}^n a_{n,k} z^k = \sum_{k=0}^n a_{n,k} z^k \quad (15)$$

由超几何函数的定义 (1) 可知,  $a_{n,k} > 0, k = 0, \dots, n$  并且当  $\frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{(n-k)(\lambda+k)}{(n-k-\lambda)(k+1)}, k = 0, \dots, n-1$ 。当  $0 < \mu < 1$  且  $\lambda > 1$  时, 易知  $\frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}} > 1$ , 即有  $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$ 。由引理 1 知,  ${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z)$  的所有零点均落在单位圆盘内。设

$$\bar{F}(z) = z^n {}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z^{-1}) = \sum_{k=1}^n a_{n,n-k} z^k \quad (16)$$

当  $\mu < 0$  且  $0 < \lambda < 1$  时, 易知  $\frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}} < 1$ 。从而有  $0 < a_{n,n} < a_{n,n-1} < \dots < a_{n,1}$ 。由引理 1 知  $\bar{F}(z)$  的所有零点均落在单位圆盘内, 即  ${}_2F_1(-n, \lambda; -n + \mu; z)$  的所有零点均落在单位圆盘外。

由 (14) 式和定理 2, 容易得出如下推论。

- 推论 1 (i) 当  $1 < a < b, b < 1 + a$  时, 超几何多项  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$  的所有零点均在圆盘:  $|z-1| \leq 1$  之内且渐近分布于圆周:  $|z-1| = 1$ ;  
 (ii) 当  $0 < a < 1, 1 + a < b$  时, 超几何多项  ${}_2F_1(-n, a; b; z)$  的所有零点均在圆盘:  $|z-1| \leq 1$  之外且渐近分布于圆周 (如图 1):  $|z-1| = 1$ 。

参考文献:

[1] DRIVER K, JORDAAN K. Separation theorems for the zeros of certain hypergeometric polynomials [J]. J Comput Appl Math, 2007, 199: 48-55.  
 [2] DRIVER K, JORDAAN K. Pólya frequency sequences and real zeros of some  ${}_3F_2$  polynomials [J]. J Math Anal Appl, 2007, 332: 1045-1055.  
 [3] MARTÍNEZ-GONZÁLEZ P, ZARZO A. Higher order hypergeometric Lauricella function and zero asymptotics of orthogonal polynomials [J]. J Comput Appl Math, 2010, 233: 577-1583.  
 [4] DOMINICI D, DRIVER K, JORDAAN K. Polynomial solutions of differential-difference equations [J] J Approx Theory, 2011 163:41-48  
 [5] DRIVER K, DUREN P. Zeros of the hypergeometric polynomials  $F(-n, b; 2b; z)$  [J]. Indag Math (New Ser), 2000, 11: 43-51.

(下转第 35 页)

- [2] SUGAHARA Y, TOKI H. Relativistic mean field theory for lambda hypernuclei and neutron stars[J]. Prog Theor Phys, 1994, 92(4):803-813.
- [3] SHARMA M M, NAGARAJAN M A, RING P. Rho meson coupling in the relativistic mean field theory and description of exotic nuclei[J]. Phys Lett B, 1993, 312(4):377-381.
- [4] GLENDENNING N K. Neutron stars are giant hypernuclei? [J]. Ap J, 1985, 293: 470.
- [5] GLENDENNING N K. Compact stars: nuclear physics, particle physics, and general relativity[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [6] TSANG M B, FRIEDMAN W A, GELBKE C K, et al. Isotopic scaling in nuclear reactions[J]. Phys Rev Lett, 2001, 86(22):5023-5026.
- [7] ONO A, DANIELEWICZ P, FRIEDMAN W A, et al. Isospin fractionation and isoscaling in dynamical simulations of nuclear collisions[J]. Phys Rev C, 2003, 68(5):051601.
- [8] LI Bao an. Neutron-proton differential flow as a probe of isospin-dependence of the nuclear equation of state[J]. Phys Rev Lett, 2000, 85(20):4221-4224.
- [9] LI Bao an. Probing the high density behaviour of nuclear symmetry[J]. Phys Rev Lett, 2002, 88:192701.
- [10] CHEN Lie wen, GRECO V, KO C M, et al. Effects of symmetry energy on two-nucleon correlation functions in heavy-ion collisions induced by neutron-rich nuclei[J]. Phys Rev Lett, 2003, 90(16):162701.
- [11] TAN W P, LI Bao an, DONANGELO R, et al. Fragment isotope distributions and the isospin dependent equation of state[J]. Phys Rev C, 2001, 64(5):051901(R).
- [12] MULLER H, SEROT B D. Phase transitions in warm, asymmetric nuclear matter[J]. Phys Rev C, 1995, 52(4):2072-2091.
- [13] LI Bao an, KO C M. Chemical and mechanical instability in hot isospin-asymmetric nuclear matter[J]. Nucl Phys A, 1997(618):498-508.
- [14] BARAN V, COLONNA M, TORO M D, et al. Spinodal decomposition of low-density asymmetric nuclear matter[J]. Nucl Phys A, 1998, 632(2):287-303.
- [15] XU H S, TSANG M B, LIU T X, et al. Isospin fractionation in nuclear multifragmentation[J]. Phys Rev Lett, 2000, 85(4):716-719.
- [16] TSANG M B, LIU T X, SHI L, et al. Isospin diffusion and the nuclear symmetry energy in heavy ion reactions[J]. Phys Rev Lett, 2004, 92(6):062701.

~~~~~

(上接第 30 页)

- [6] DRIVER K, MÖLLER M. Zeros of the hypergeometric polynomials  $F(-n, b; -2n; z)$  [J]. J Approx Theory, 2001, 110: 74-87.
- [7] BOGGS K, DUREN P. Zeros of hypergeometric functions [J]. Comput Methods Funct Theory, 2001, 1: 275-287.
- [8] DUREN P, GUILLOU B J. Asymptotic properties of zeros of hypergeometric polynomials [J]. J Approx Theory, 2001, 111: 329-343.
- [9] MARDEN M. Geometry of polynomials [M]. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.
- [10] ANDREWS G, ASKEY R, ROY R. Special function, encyclopedia of mathematics and its applications [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.