

基于校验节点的 LDPC 码 的消息加权均值串行译码算法*

韩国军^{1,2}, 刘星成¹

(1. 中山大学电子与通信工程系, 广东 广州 510275)
(2. 广东工业大学信息工程学院, 广东 广州 510006)

摘要: 中短长度 LDPC 码在采用 BP 算法译码时, 由于短环的存在会导致某些比特 LLR 值出现振荡现象, 从而影响了译码性能。针对这一现象, 提出了一种采用消息加权均值来修正校验节点到变量节点消息传递的改进译码算法。该译码算法将上次校验节点到变量节点的消息和本次计算所得的校验节点到变量节点的消息进行加权求和后作为当前最新的消息。通过对本次计算所得的校验节点到变量节点的消息赋予比上次校验节点到变量节点消息更高的权值, 从而减弱消息加权均值对正常 BP 消息传递的影响, 有效抑制比特 LLR 值的振荡。仿真结果表明, 与传统的串行迭代译码算法相比, 改进的译码算法在计算复杂度增加极少的情况下, 有效提高了中高信噪比区的译码性能。

关键词: 低密度校验 (LDPC) 码; 置信传播; 迭代译码; 因子图

中图分类号: TN911.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2010) 03-0047-05

Serial Update Scheduling Based on Weighted Average Message of Check Nodes for LDPC Codes

HAN Guojun^{1,2}, LIU Xingcheng¹

(1. Department of Electronic and Communications Engineering, Sun Yat-sen University,
Guangzhou 510275, China)

(2. Faculty Information Engineering, Guangdong University of Technology,
Guangzhou 510006, China)

Abstract: For short and middle length LDPC codes, the oscillation of LLR owing to cycles degrades the performance of BP algorithm. In order to minimize the oscillation of LLR during BP decoding process, an improved BP algorithm with serial update scheduling using weighted average message to update the message of check-to-variable node is proposed. Currently computed message of check-to-variable node and the message of old check-to-variable node are weighted and then added up to update the message of check-to-variable node. By higher weighted currently computed message of check-to-variable node than the message of old check-to-variable node, the improved algorithm effectively minimizes oscillation of LLR, at the same time, keeps normal BP message propagation and low compute complexity. Simulation results show that, for short and middle length LDPC codes, the improved algorithm achieves more noticeable error performance than CSBP algorithm at middle to high signal to noise ratio.

Key words: LDPC codes; belief-propagation; iterative decoding; factor graph

低密度奇偶校验 (LDPC, Low-Density Parity-Check) 码^[1] 采用置信传播 (BP, belief-propaga-

* 收稿日期: 2009-05-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60673086, 60970041); 广东省科技计划资助项目 (2006B50101003)

作者简介: 韩国军 (1974 年生), 男, 博士生; 通讯作者: 刘星成; E-mail: isslxc@mail.sysu.edu.cn.

tion) 算法进行迭代译码时, 在无环因子图上可以实现最大似然译码^[2]。在有环因子图上, 其译码性能将会受到环的影响^[3]。对于中短长度 LDPC 码, 由于存在大量的短环, 导致 BP 译码过程中会出现某些比特对数似然比 (LLR, Log-Likelihood-Ratio) 值出现振荡, 从而降低了译码性能^[4]。Lee 等^[5]研究了 BP 译码过程中比特消息变化的三种类型及其在不同信噪比下的变化规律, Alghonaim 等^[6]研究了 BP 译码过程中不可纠正错误比特数变化的三种类型及其在不同码结构中的分布情况, 文献 [5-6] 研究结果说明译码过程中 LLR 值的振荡现象与不同的码结构和信噪比有关。Landner 等^[7]提出了一种抑制消息振荡的译码算法, 但该算法需要增加大量的存储空间, 同时存在着对多个译码参数进行优化选择的问题。

针对 BP 迭代译码过程中 LLR 值的振荡现象, 我们在文献 [8] 提出了一种基于变量节点的消息加权均值串行译码算法。但由于基于校验节点的串行译码算法对准循环结构的 LDPC 码进行迭代译码时, 可实现半并行译码, 从而能够提高数据吞吐率, 因此本文在分析了基于校验节点串行消息译码算法的基础上, 对其进行了改进, 提出了一种基于校验节点的消息加权均值串行译码算法。同时, 深入分析了错误帧的震荡特性和加权系数对译码性能的影响。仿真结果显示, 该算法有效的抑制了比特 LLR 值的振荡, 改善了中高信噪比区的译码性能, 同时译码复杂度增加量极低。

1 基于校验节点的串行译码算法消息更新规则

LDPC 码校验矩阵 H 可以用二分图来描述。设校验矩阵 H 为 $M \times N$ 的矩阵, 那么相应的二分图 G 是由 N 个变量节点和 M 个校验节点以及一定数量连接变量节点和校验节点的边组成的。在二分图中一边的节点为变量节点, 另一边为校验节点, 与变量节点相连的边数和与校验节点相连的边数分别称为变量节点的度和校验节点的度。

LDPC 码采用基于二分图的 BP 译码算法进行迭代译码时, 其消息的更新策略一般可分为并行消息更新策略和串行消息更新策略。并行消息更新策略能够实现大的数据吞吐率, 但需要耗费大量的硬件资源, 同时算法收敛速度慢。串行消息更新策略可分为基于变量节点的消息更新策略和基于校验节点的消息更新策略^[9-10], 串行消息更新策略的特

点是算法收敛速度快^[11], 耗费硬件资源少, 数据吞吐率低。但对准循环 LDPC 码, 在采用基于校验节点的串行译码算法进行译码时, 其消息更新策略可实现部分并行, 从而在硬件资源和数据吞吐率之间获得良好的折中。

设二进制输入高斯信道 (AWGN) 下, 有一个长度为 N 的码字 $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)$, $c_n = 0$ 或 1 , 采用 BPSK 调制后的信号为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_n = 2c_n - 1$ 。该信号经过均值为零、功率谱为 $N_0/2$ 的高斯信道后, 接收端收到的信号为 $y_n = x_n + n$, n 是均值为零, 方差为 $N_0/2$ 的随机数。 P_n 表示从接收信号获得的变量 x_n 的 LLR 信息

$$P_n = \log \frac{P(x_n = 1 | y_n)}{P(x_n = 0 | y_n)} = 4 \frac{y_n}{N_0}$$

则基于校验节点的串行迭代译码算法中校验节点到变量节点消息更新规则为^[10]:

$$S_m = \sum_{n' \in N(m)} \varphi(Q_{n'} - R_{mn'}^{\text{old}}) \quad (1)$$

$$R_{mn}^{\text{new}} = \varphi^{-1}(S_m - \varphi(Q_n - R_{mn}^{\text{old}})) \quad (2)$$

上式中: $\varphi(x) = (\text{sign}(x), -\log \tanh \frac{|x|}{2})$,

$\varphi^{-1}(x) = (-1)^{\text{sign}(x)} \times (-\log \tanh \frac{x}{2})$ 。 $N(m) = \{n: H_{mn} = 1\}$ 表示与校验节点 m 相连的所有变量节点的集合; R_{mn} 表示从校验节点 m 发送到变量节点 n 的 LLR 信息; Q_n 表示变量节点 n 的 LLR 信息。

变量节点的消息更新规则为:

$$Q_n^{\text{new}} = Q_n^{\text{old}} - R_{mn}^{\text{old}} + R_{mn}^{\text{new}} \quad (3)$$

2 基于校验节点的消息加权均值串行译码算法

BP 算法在有环因子图上进行迭代译码时, 由于短环的存在将导致信息之间的相关, 从而会影响 BP 迭代译码的性能。同时短环的存在有可能造成消息在同一环内的循环振荡, 这也会降低译码性能。

2.1 振荡特性分析

通过对 PEG 方法构造的 1/2 码率的 QC-PEG (1008, 504)、QC-PEG (504, 252) 和 QC-PEG (256, 128) 准循环 LDPC 码在 AWGN 信道下进行仿真^[12-13], 发现 LLR 均值随迭代次数的变化可分为如图 1 所示的 4 种类型:

第一类: LLR 均值随迭代次数单调增加;

第二类: LLR 均值经历最初几次迭代后保持恒定;

第三类：LLR 均值随迭代次数大幅波动；
第四类：LLR 均值随迭代次数小幅波动。

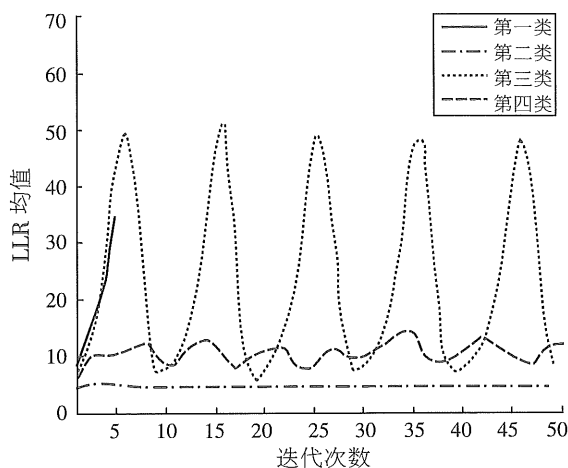


图1 LLR 均值随迭代次数变化的模式

Fig. 1 Variation patterns of mean LLR with iterations

在低信噪比时，大量的不可纠正错误帧的 LLR 均值随迭代次数的变化可归为第二类。随着信噪比的增加，具有第三类和第四类变化特征的错误帧占错误帧的比例逐渐增加。在高信噪比区，不同类型 LLR 均值变化特征的错误帧占总错误帧的比例将和码结构有关。

LLR 均值随迭代次数的波动反映了 BP 译码过程中消息在环内的循环振荡。对于 LLR 均值随迭代次数小幅波动的错误帧，可以采用滤波技术对其进行处理，从而减弱消息的波动，实现正确译码。但对 LLR 均值随迭代次数大幅振荡的错误帧，单独的过滤处理很难实现正确译码，因此本算法将主要解决小幅波动的错误帧。

2.2 振荡消息的过滤

LLR 均值随迭代次数的波动说明了变量节点消息发生了振荡，为了抑制这种振荡现象，可以通过对 BP 译码过程中变量节点消息更新规则 (3) 进行如下修正：

$$Q_n = \lambda_1 Q_n^{\text{new}} + \lambda_2 Q_n^{\text{old}} \quad (4)$$

该式实质上是一个一节无限长单位冲击响应 (IIR) 数字滤波器，通过调整加权系数可以调整滤波效果，达到抑制振荡的目的。由于考虑到 BP 收敛后，前后两次迭代过程中消息将保持一致，因此有 $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 = \lambda$ ， $\lambda_2 = 1 - \lambda$ ，则公式 (4) 可变为：

$$Q_n = \lambda Q_n^{\text{new}} + (1 - \lambda) Q_n^{\text{old}} \quad (5)$$

将 (3) 式带入 (5) 式，并进行化简，可以

得到如下的变量节点消息更新规则：

$$Q_n = Q_n^{\text{old}} - \lambda R_{mn}^{\text{old}} + \lambda R_{mn}^{\text{new}} \quad (6)$$

2.3 算法步骤

完整的基于校验节点的 LDPC 码的消息加权均值串行迭代译码算法步骤如下：

初始化：

对所有的 $n \in N$ ， $m \in M$ $R_{mn} \downarrow 0$ ， $Q_{mn} \downarrow P_n$

设置迭代变量 $I=1$ ，设置最大迭代次数为 I_{MAX}

迭代运算：

步骤 1 判断迭代次数是否达到 I_{MAX} ，若是则结束迭代，否则执行步骤 2；

步骤 2 在 k 次迭代中，对 $m=1, 2, 3, \dots, M$ ，顺序更新校验节点信息，如果 $m < M$ ，则执行步骤 3，否则执行步骤 5；

步骤 3 对校验节点 m ，进行如下计算

$$S_m = \sum_{n' \in N(m)} \varphi(Q_{n'} - R_{mn'}^{\text{old}})$$

对所有 $n \in M(m)$ ，进行如下计算

$$R_{mn}^{\text{new}} = \varphi^{-1}(S_m - \varphi(Q_n - R_{mn}^{\text{old}}))$$

$$Q_n = Q_n^{\text{old}} - \lambda R_{mn}^{\text{old}} + \lambda R_{mn}^{\text{new}}$$

$$R_{mn}^{\text{new}} = \lambda R_{mn}^{\text{new}} + (1 - \lambda) R_{mn}^{\text{old}}$$

步骤 4 返回步骤 2

步骤 5 对每一变量节点，如果 $Q_n < 0$ ，则 $\hat{x}_n = 0$ ，否则 $\hat{x}_n = 1$ ，从而得到码字 $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 。如果 $\hat{x}H^T \pmod{2} = 0$ 或译码迭代次数已达到最大迭代次数，则停止译码，否则 $I \downarrow I + 1$ ，返回步骤 1 继续迭代译码。

与标准的基于校验节点的串行迭代译码算法相比，改进译码算法在计算变量节点到校验节点消息时，需要增加两次浮点乘法和一次浮点加法。为了方便后续的比较分析，本文用 CSBP 表示标准的基于校验节点的串行译码算法，用 CSBP-AVG- λ 表示加权系数为 λ 的基于校验节点的消息加权均值串行译码算法。

2.4 加权系数选择

加权系数的选择需要考虑以下几个方面的因素：

1) 对正常 BP 消息传递的影响：如果加权系数过大，会减缓 BP 消息传递速度，导致在有限迭代次数内能够通过常规译码算法纠正的错误帧通过改进算法而不能纠正；

2) 平均迭代次数：过大的加权系数将导致平均迭代次数的增加，从而加大了译码复杂度；

用 $FER_{c(E_b/N_0)}$ 表示在一定的 E_b/N_0 下，采用 CSBP 译码算法时的误帧率，则采用 CSBP-AVG- λ

译码时的误帧率 $FER_{a(Eb/N0)}$ 可以表示为:

$$FER_{a(Eb/N0)} = \frac{FER_{c(Eb/N0)} \times T_{nb} + E_{ad} - C_a}{T_{nb}} \quad (7)$$

式中 T_{nb} 为总的仿真帧数, E_{ad} 为 CSBP-AVG- λ 导致迭代次数增加而新引入的错误帧数, C_a 为 CSBP-AVG- λ 算法纠正的错误帧数。 C_a 随着 λ 的减小逐渐增大, 但 C_a 的最大值与码结构和信噪比有关。 E_{ad} 也随着 λ 的减小逐渐增大。在一定的信噪比下存在着最优的 λ 值, 但综合考虑消息振荡随信噪比的变化关系, 本文通过在中等信噪比下的仿真获得了比较有效的 λ 取值, 其值为 0.9。

3 仿真结果分析

为了比较改进译码算法的译码性能, 对 QC-PEG (256, 128) 和 QC-PEG (504, 252) 准循环 LDPC 码在 AWGN 信道下进行了仿真, BP 译码最大迭代次数为 50, 调制方式为 BPSK。图 2 是 QC-PEG (504, 252) 准循环 LDPC 码, 在 E_b/N_0 为 2.5 dB 时, CSBP 译码算法与 CSBP-AVG-0.9 译码算法分别对相同两帧进行译码过程中 LLR 均值随迭代次数的变化曲线, 实线为 CSBP-AVG-0.9 译码算法, 虚线为 CSBP 译码算法, 由图 2 可以看出, 对 LLR 均值小幅振荡的错误帧, 改进译码算法能够有效的抑制振荡, 实现成功纠错。

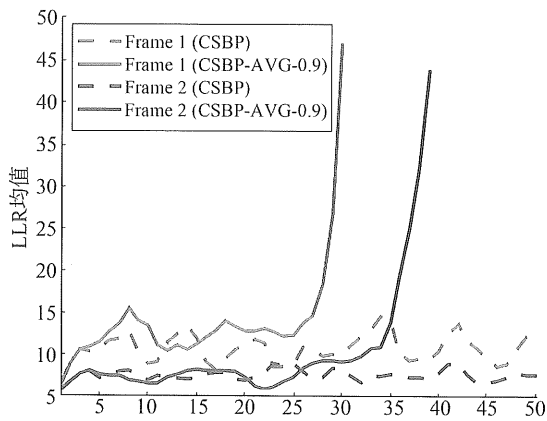


图 2 CSBP 译码算法与 CSBP-AVG 译码算译码效果对比
Fig. 2 Decoding process comparison of CSBP algorithm and CSBP-AVG- λ algorithm

图 3 - 4 分别为 QC-PEG (256, 128) 和 QC-PEG (504, 252) 准循环 LDPC 码在 CSBP、CSBP-AVG- λ 译码算法下的误码性能曲线, 其中实线为误帧率, 虚线为误比特率。由图 3 - 4 可以看出, 改进的译码算法相对 CSBP 译码算法, 误码率和误

帧率都得到了改善, 并且随着 E_b/N_0 增加改进译码算法的译码性能得到不断提高, 其原因是信噪比由低到高变化时, 由比特 LLR 值振荡造成的不可纠正错误数占总错误数的比例不断增加^[5], 改进译码算法通过对消息加权均值, 抑制了比特 LLR 值的振荡, 从而减少了因比特 LLR 值振荡造成的不可纠正错误帧数, 改善了译码性能。通过分析图 3 中误码性能和加权系数的关系, 可以看出在不同信噪比下, 加权对误码性能影响不同, 因此, 还可以采取类似于 Turbo 码的自适应信噪比估计方法进一步改善不同信噪比下的误码性能^[14]。

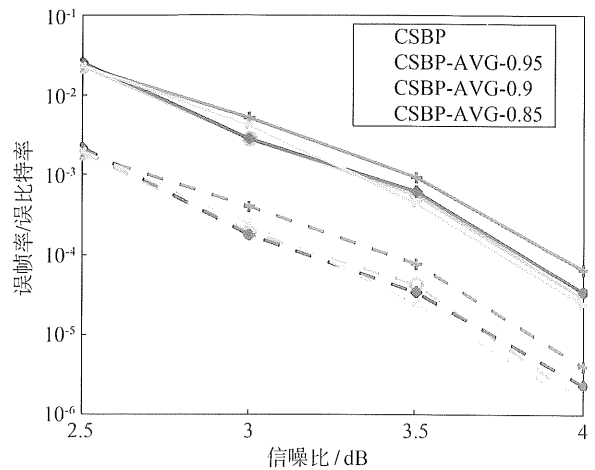


图 3 CSBP 和 CSBP-AVG- λ 译码算法的译码性能比较 (QC-PEG (256, 128))

Fig. 3 Error performance comparison of CSBP and CSBP-AVG- λ algorithm for QC-PEG (256, 128)

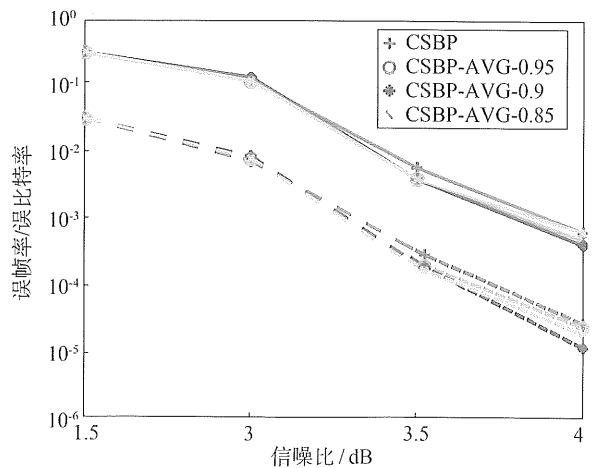


图 4 CSBP 和 CSBP-AVG- λ 译码算法的译码性能比较 (QC-PEG (504, 252))

Fig. 4 Error performance comparison of CSBP and CSBP-AVG- λ algorithm for QC-PEG (504, 252)

5 结 语

中短长度 LDPC 码在 BP 迭代译码过程中由于短环的影响会出现比特 LLR 值的振荡现象, 导致译码性能的下降。为了抑制比特 LLR 值的振荡, 改善译码性能, 本文提出了基于校验节点的消息加权均值串行迭代译码算法。该译码算法在每次更新校验节点到变量节点消息时, 将上次校验节点到变量节点消息和本次计算所得的校验节点到变量节点消息进行加权求和后作为当前校验节点到变量节点的最新消息。通过合理选择加权系数, 该译码算法在计算复杂度增加极少的情况下, 能够有效减少因比特 LLR 值振荡而产生的错误帧, 改善译码性能。仿真结果显示, 对于 QC-PEG (504, 252) 准循环 LDPC 码, λ 为 0.9 时的改进译码算法相对 CSBP 译码算法, 在误比特率为 10^{-5} 时, 获得了 0.15 dB 的编码增益。

参考文献:

- [1] GALLAGER R G. Low density parity check codes [J]. IRE Transactions Information Theory, 1962, 8 (1): 21 ~ 28.
- [2] MCELIECE R J, MACKAY D J C, CHENG J F. Turbo decoding as an instance of Pearl's "belief propagation" algorithm [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1998, 16 (2): 140 - 152.
- [3] KSCHISCHANG F R, FREY B J R, LOELIGER H A. Factor graphs and the sum-product algorithm [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47 (2): 498 - 519.
- [4] LECHNER G, SAYIR J. On the convergence of log-likelihood values in iterative decoding [C] // Proceedings of Mini-Workshop on Topics in Information Theory. Essen, Germany, 2002: 1 - 4.
- [5] LEE S H, LEE W H, BAE J J, et al. Bit probability transition characteristics of LDPC code [C] // Proceedings of 10th International Conference on Telecommunications. Tahiti, Papeete-French Polynesia, 2003: 553 - 557.
- [6] ALGHONAIM E, AIMAN E M, MOHAMED A L. New technique for Improving performance of LDPC codes in the presence of trapping sets [C]. Eruasip Journal on Wireless Communications and Networking, 2008: 1 - 10
- [7] LANDER S, MILENKOVIC O. Algorithmic and combinatorial analysis of trapping sets in structured LDPC codes [C] // Proceedings of the IEEE International Conference on Wireless Networks Communications and Mobile Computing. Maui, Hawaii, USA, 2005: 630 - 635.
- [8] 韩国军, 刘星成. LDPC 码的信道自适应迭代译码算法 [J]. 电路与系统学报, 2010, 15(1): 102 - 107.
- [9] ZHANG J, FOSSORIER M. Shuffled belief propagation decoding [J]. IEEE Transactions on Communications, 2005, 2(53): 209 - 213.
- [10] SHARON E, LITSYN S, GOLDBERGER J. An efficient message-passing schedule for LDPC decoding [C]. The 23rd IEEE Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel, Sept, 2004: 223 - 226.
- [11] GOLDBERGER J, KFIR J H. Serial schedules for belief-propagation: analysis of convergence time [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54 (3): 1316 - 1319.
- [12] HU X Y, ELEFTHERIOU E, AMOLD D M. Regular and irregular progressive edge-growth tanner graphs [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(1): 386 - 398.
- [13] 刘星成, 程浩辉. 基于 PEG 算法的准循环 LDPC 码构造方法研究 [J]. 电路与系统学报, 2009, 14(4): 115 - 119.
- [14] 刘星成, 王康, 黄志军. 基于自适应估计 SNR 的分组 Turbo 码译码算法 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2009, 48(5): 33 - 37.