第 49 卷 第 3 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 49 No. 3
2010 年 5 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　May 2010

离散时滞 KdV 类方程的群不变解*

赵志红[1]，徐远通[2]，葛渭高[1]
（1. 北京理工大学理学院，北京 100081；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘　要：研究时滞 KdV 类方程 $u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)+u_{xxx}(t,x)=g(x,u,u(t-\tau,x))$ 的群不变解。主要方法是根据时滞微分方程等价 Lie 群的定义，可构造时滞 KdV 类方程相应的决定方程和容许 Lie 群，从而得到时滞 KdV 类方程的群不变解。

关键词：时滞 KdV 类方程；容许 Lie 群；群不变解
中图分类号：O175.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2010）03－0005－03

The Group Invariant Solutions of KdV Type Equation with Discrete Delay

ZHAO Zhihong [1], *XU Yuantong*[2], *GE Weigao*[1]
(1. Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;
2. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The group invariant solutions of the KdV type equation with discrete delay $u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)+u_{xxx}(t,x)=g(x,u,u(t-\tau,x))$ are studied. According to the definition of an equivalence Lie group for delay differential equations, we construct the determining equations and admitted Lie groups of delay KdV type equation. Then the group invariant solutions of the delay KdV type equation are obtained.

Key words: KdV type equation with discrete delay; admitted Lie group; group invariant solution

长期以来，有大量的研究工作是利用 Lie 群理论求出微分方程的不变性来解决其定性或定解问题，特别是寻求微分方程的精确解[1-3]。然而，我们发现对于含有时滞的各类偏泛函微分方程，这种研究途径尚未有具体的进展，主要是由于时滞微分方程的非局部项直接利用经典 Lie 群作用处理相当困难。群分析（Group Analysis）是构造微分方程精确解的另外一种方法，关于群分析理论可以参阅［4］。容许 Lie 群（Admitted Lie Group）在群分析方法中起了主导作用。只要得到容许 Lie 群，就可以通过它来构造方程的不变解，例如研究反应扩散型微分方程的群分类[5]。

最近，我们根据分布时滞的特殊形式，利用经典 Lie 群理论研究了分布时滞 KdV 方程的对称及群不变解[6]。文献［7－8］给出了泛函微分方程容许 Lie 群的概念，并利用群分析法可以构造离散时滞反应扩散方程的群分类和群不变解。本文，我们将运用泛函微分方程容许 Lie 群理论讨论具有如下形式的离散时滞 KdV 类方程的群不变解

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)+u_{xxx}(t,x)=g(x,u,u(t-\tau,x)),\ t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

1　预备知识

在这一节中，我们给出泛函微分方程容许 Lie 群的概念及相应的决定方程（Determine Equation）。由于泛函微分方程的非局部性，在这里我们就不能利用流形的方式将容许 Lie 群的概念引入泛函微分方程中，但是在这种情形下，我们可以利

* 收稿日期：2009－05－15
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10871213，10671012）
作者简介：赵志红（1981 年生），女，博士后；E-mail：zhaozhihong01@yahoo.com.cn.

用容许对称群（Admitted Symmetry Group）的另外一种定义。

一个 Lie 群是容许的，若它将方程的任意一个解作用为同样方程的解，即容许 Lie 群是将方程的解变为解。为简单起见，我们介绍只有一个独立变量的泛函微分方程容许 Lie 群的构造[5-6]。

$$S \equiv x'(t) - F(t,x_t) = 0,\ t \in J \tag{2}$$

这里，$x(t)$ 为至少定义在区间 $[t-\tau,t]$ 上的函数，则函数 $x_t:[-\tau,0] \to D$，即

$$x_t(s) = x(t+s), s \in [-\tau,0]$$

其中 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集，J 为 $\mathbb{R}$ 中某个开区间，F 为一个函数。对于时滞微分方程，F 可表示为

$$F(t,x_t) \equiv f(t,x(g_1(t)),\cdots,x(g_m(t)))$$

其中 $f:[t_0,\beta] \times D^m \to \mathbb{R}^n$，且当 $t_0 \leqslant t < \beta$ 时，$g_i(t) \leqslant t, i = 1,\cdots,m$。

假定单参数变换群 G 对应的变换 $T_a: = T(t,x;a)$ 为

$$\bar{t} = T^t(t,x;a),\ \bar{x} = T^x(t,x;a)$$

其中，a 为参数，满足 $t = T^t(t,x;0)$，$x = T^x(t,x;0)$。T_a 将方程（2）的解变为另外一个解。通常只需考虑单参数 Lie 群 G 相应的无穷小生成元

$$X = \xi(t,x)\partial_t + \eta(t,x)\partial_x \tag{3}$$

其中 $\xi(t,x) = \dfrac{\partial T^t}{\partial a}(t,x;0)$，$\eta(t,x) = \dfrac{\partial T^x}{\partial a}(t,x;0)$。

定义1 对应于变换（3）的单参数 Lie 群 G 为方程（2）的容许对称 Lie 群[7-8]，若 G 满足方程

$$(\bar{X}S)(t,x(t)) = 0 \tag{4}$$

对方程（2）的任意解 $x(t)$ 均成立。这里，方程（4）称为决定方程，算子 $\bar{X}$ 为等价于算子 X 的 Lie-Bächlund 算子的延拓[3]

$$\bar{X} = \zeta^x\partial_x + \zeta^{x'}\partial_{x'} + \cdots$$

其中 $\zeta^x = \eta - x'\xi$，$\zeta^{x'} = D_t\zeta^x$，D_t 为对 t 的全导数。

2 主要结论

由定义1可知，决定方程（4）必须对方程（1）的任意解均成立。由［9］可证明方程（1）

$$u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) + u_{xxx}(t,x) = g(x,u,u(t-\tau,x)),\ t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}$$

的 Cauchy 问题的解的存在性。如，初始条件为 $u(x,s) = \varphi(x,s)$，$-\tau \leqslant s \leqslant 0$，其中函数 $\varphi(x,s)$ 为 $C([-\tau,0];H^s(\mathbb{R}))$ 中任意函数。因此由 $\varphi(x,s)$ 的任意性可认为 $u(0,x_0)$，$u(-\tau,x_0)$，$u_x(0,x_0)$，$u_x(-\tau,x_0)$，$u_{xxx}(0,x_0)$，$u_{xxx}(-\tau,x_0)$，及其它一些导数的值是任意的，由此可以对决定方程进行分解。

方程（1）的容许 Lie 群的生成元为 $X = \xi\partial_x + \eta\partial_t + \zeta\partial_u$，其中 ξ,η 和 ζ 都是关于 x,t,u 的函数。根据构造容许 Lie 群的决定方程的算法，可得

$$\zeta^{u_t} + (u_x - g_u)\zeta^u - g_{\bar{u}}\zeta^{\bar{u}} + u\zeta^{u_x} + \zeta^{u_{xxx}} = 0 \tag{5}$$

其中 $u = u(x,t)$，$\bar{u} = u(x,t-\tau)$，$u_t = u_t(x,t)$，$u_x = u_x(x,t)$，$u_{xxx} = u_{xxx}(x,t)$，且 $\zeta^u = \zeta - u_x\xi - u_t\eta$，$\zeta^{\bar{u}} = \bar{\zeta} - \bar{u}_x\bar{\xi} - \bar{u}_t\bar{\eta}$，$\zeta^{u_x} = D_x\zeta^u$，$\zeta^{u_{xx}} = D_x\zeta^{u_x}$，$\zeta^{u_{xxx}} = D_x\zeta^{u_{xx}}$，$\zeta^{u_t} = D_t\zeta^u$。这里带横杠的函数 $\bar{f}(x,t) = f(x,t-\tau)$。决定方程（5）应满足对方程（1）的任意解 $u(x,t)$ 都成立，因此，$\bar{f}(x,t,u)$ 的值应定义为 $\bar{f}(x,t,u) = f(x,t-\tau,u(x,t-\tau))$。

将由方程（1）得到的导数 $u_t, u_{xt}, u_{tt}, \bar{u}_t$ 及它们的延拓带入

$$\zeta^{u_t} = D_t(\zeta - u_x\xi - u_t\eta)$$

$$\zeta^{u_x} = D_x(\zeta - u_x\xi - u_t\eta)$$

$$\zeta^{u_{xxx}} = D_{xxx}(\zeta - u_x\xi - u_t\eta)$$

并将这些式子代入决定方程（5）中，可得

$$\begin{gathered}
-\zeta g_u - \bar{\zeta} g_{\bar{u}} + (\bar{\eta} - \eta)\bar{g}g_{\bar{u}} - \xi g_x + \zeta_{xxx} - g\eta_t - \\
g\eta_{xxx} + \zeta_t + g\zeta_u - g^2\eta_u - 3g_{xx}\eta_x - 3g_x\eta_{xx} + uu_x(\eta_t + \\
g\eta_u + \eta_{xxx} - \xi_x) + \bar{u}\bar{u}_x g_{\bar{u}}(\eta - \bar{\eta}) + \bar{u}_{xxx}g_{\bar{u}}(\eta - \bar{\eta}) + \\
\bar{u}_x((\bar{\xi} - \xi)g_{\bar{u}} - 3g_{\bar{u}}\eta_{xx} - 6g_{x\bar{u}}\eta_x) + u(\zeta_x - g\eta_x) + \\
3u_{xx}(\zeta_{xu} - g_x\eta_u - g_u\eta_x - g\eta_{ux} - \xi_{xx}) + u_{xxx}(\eta_t + \\
g\eta_u + \eta_{xxx} - 3\xi_x) + 3uu_{xx}^2\eta_u - 3u_{xx}^2\xi_u + 3u_{xx}u_{xxxx}\eta_u - \\
3\bar{u}_x u_{xx}g_{\bar{u}}\eta_u + 4uu_{xxx}\eta_x + 3u_{xxxxx}\eta_x - 3\bar{u}_x^2 g_{\bar{u}\bar{u}}\eta_x - \\
3\bar{u}_{xx}g_{\bar{u}}\eta_x + 3u_{xx}u_{xxx}\eta_{xu} + 3uu_{xx}\eta_{xx} + 3u_{xxxx}\eta_{xx} + \\
uu_x^4\eta_{uuu} + u_x^4(3\eta_{uu} - \xi_{uuu}) + u_x^3(\zeta_{uuu} - 3g_{uu}\eta_u - \\
3g_u\eta_{uu} - g\eta_{uuu} + 6\eta_{xu} - 3\xi_{xuu}) + u_x^3 u_{xxx}\eta_{uuu} + \\
3uu_x^3\eta_{xuu} + 3u_x^2(\zeta_{xuu} - 2g_{xu}\eta_u - g_x\eta_{uu} - g_{uu}\eta_x - \\
2g_u\eta_{xu} - g\eta_{xuu} + \eta_{xx} - \xi_{xxu}) + 6u_x^2 u_{xx}(2\eta_u - \xi_{uu}) - \\
3u_x^2\bar{u}_x(2g_{u\bar{u}}\eta_u + g_{\bar{u}}\eta_{uu}) + 6uu_x^2 u_{xx}\eta_{uu} + 3u_x^2 u_{xxxx}\eta_{uu} + \\
3u_x^2 u_{xxx}\eta_{xuu} + 3uu_x^2\eta_{xxu} + u_x(\zeta + 3\zeta_{xxu} - 3g_{xx}\eta_u - \\
6g_{xu}\eta_x - 6g_x\eta_{xu} - 3g_u\eta_{xx} - 3g\eta_{xxu} - \xi_t - g\xi_u - \xi_{xxx}) + \\
3u_x u_{xx}(\zeta_{uu} - 2g_u\eta_u - g\eta_{uu} + 3\eta_x - 3\xi_{xu}) + \\
3uu_x u_{xxx}\eta_u + 3u_x u_{xxxxx}\eta_u - 6u_x\bar{u}_x(g_{x\bar{u}}\eta_u + g_{u\bar{u}}\eta_x + \\
g_{\bar{u}}\eta_{xu}) - 3u_x\bar{u}_x^2 g_{\bar{u}\bar{u}}\eta_u - 3u_x\bar{u}_{xx}g_{\bar{u}}\eta_u + 3u_x u_{xx}u_{xxx}\eta_{uu} + \\
u^2u_x\eta_x + 9uu_x u_{xx}\eta_{xu} + 6u_x u_{xxxx}\eta_{xu} + \\
3u_x u_{xxx}(\eta_{xxu} - \xi_u) = 0
\end{gathered}$$

其中 $\bar{g} = g(x,u(x,t-\tau),u(x,t-2\tau))$。根据 u_x，u_{xx}，u_{xxx}，$\bar{u}_x$ 等将决定方程进行分解，即令它们的系数为零，并且利用性质 $g_{\bar{u}} \neq 0$，得到

$$\eta_t + g\eta_u + \eta_{xxx} - \xi_x = 0 \tag{6}$$

$$\eta - \bar{\eta} = 0 \tag{7}$$

$$(\bar{\xi} - \xi)g_{\bar{u}} - 3g_{\bar{u}}\eta_{xx} - 6g_{x\bar{u}}\eta_x = 0 \tag{8}$$

$$\eta_u=0,\eta_x=0,\xi_u=0,\eta_{xu}=0,\eta_{xx}=0,$$
$$\eta_{uuu}=0,\eta_{xuu}=0,\eta_{xxu}=0 \quad (9)$$
$$\zeta+3\zeta_{xxu}-3g_{xx}\eta_u-6g_x\eta_{xu}-6g_u\eta_{xx}-3g_u\eta_{xx}$$
$$-3g\eta_{xxu}-\xi_t-g\xi_u-\xi_{xxx}=0 \quad (10)$$
$$\zeta g_u+\bar{\zeta}g_{\bar{u}}-(\bar{\eta}-\eta)\bar{g}g_{\bar{u}}+g_x\xi-\zeta_{xxxx}+g\eta_t+$$
$$g\eta_{xxx}-\zeta_t-g\zeta_u+g^2\eta_u+3g_{xx}\eta_x+3g_x\eta_{xx}=0 \quad (11)$$
等一系列等式。

由（7）、（8）和（9），可知 $\eta_u=\eta_x=\xi_u=0,\eta(t-\tau)=\eta(t),\xi(t-\tau)=\xi(t)$，因此，$\eta$ 与 x,t,u 无关，即 $\eta=$ 常数。由（6），可得 $\xi_x=0$，因此，ξ 与 x,t,u 无关，即 $\xi=$ 常数。由（10），可知 $\zeta=0$。

从而，有
$$\xi=\alpha,\eta=\beta,\zeta=0 \quad (12)$$
其中 α,β 为任意常数。将（12）代入方程（11），则（11）化简为 $\alpha g_x=0$。所以，
$$g(x,u,\bar{u})=g(u,\bar{u})$$
因此，有

定理 1　时滞 KdV 类方程
$$u_t(x,t)+u(x,t)u_x(x,t)+u_{xxx}(x,t)=$$
$$g(u(x,t),u(x,t-\tau)),t\geqslant 0,x\in\mathbb{R} \quad (13)$$
的容许 Lie 群的群体生成元为
$$X=\alpha\partial_x+\beta\partial_t \quad (14)$$
其构成了两维 Lie 代数，并有下列一组基：$X_1=\frac{\partial}{\partial x},X_2=\frac{\partial}{\partial t}$，与它们相应的单参数容许 Lie 变换群为
$$G_1:(x,t,u)\to(x+\varepsilon,t,u),$$
$$G_2:(x,t,u)\to(x,t+\varepsilon,u)$$
若容许 Lie 群的生成元为 $X_3=X_1+cX_2$，其中 c 为给定常数，则相应的容许 Lie 群为
$$G_3:(x,t,u)\to(x+\varepsilon,t+c\varepsilon,u)$$
由容许 Lie 群的定义，有

定理 2　若 $u=f(x,t)$ 是时滞 KdV 类方程（13）的解，则
$$u_1=f(x-\varepsilon,t),\ u_2=f(x,t-\varepsilon),$$
$$u_3=f(x-\varepsilon,t-c\varepsilon)$$
也是方程（13）的解，它们分别表示了 x 轴平移不变性，t 轴平移不变性和行波解。

注：最近，Meleshko[10] 首先根据泛函微分方程容许 Lie 群的定义给出了时滞反应扩散方程的群分类，本文首次将容许 Lie 群的定义运用于时滞 KdV 类方程，给出时滞 KdV 类方程的容许 Lie 群和群不变解。

参考文献：

[1] OLVER P J. Applications of Lie groups to differential equations [M]. GTM, No. 107, New York: Springer-Verlag, 1986.

[2] 田畴. 李群及其在微分方程中的应用[M]. 北京：科学出版社，2001.

[3] BLUMAN G W, KUMEI S. Symmetries differential equations [M]. Applied Mathematical Sciences, 81, New York: Springer-Verlag, 1989.

[4] IBRAGIMOV N H. CRC handbook of Lie group analysis of differential equation [M]. Volume 1, Boca Raton: CRC Press, 1985.

[5] ANRIOPOULOS K, LEACH P G L. Symmetry and singularity properties of second-order ordinary differential equations of Lie's type III [J]. J Math Anal Appl, 2007, 328 (2): 860－875.

[6] 赵志红，徐远通. 分布时滞 KdV 方程的对程及群不变解[J]. 中山大学学报：自然科学版，2008, 47(1): 9－12.

[7] TANTHANUCH J, MELESHKO S V. Application of group analysis to delay differential equations [C] // Proceedings of ISNA-16(Moscow, 2002), Nonlinear Acoustics at the Beginning of the 21st Century, 2002: 607－610.

[8] TANTHANUCH J, MELESHKO S V. On definition of an admitted Lie group for functional differential equations [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2004, 9(1): 117－125.

[9] JANHONG W. Theory and applications of partial functional differential equations [M]. Applied Mathematical Sciences, 119, New York: Springer-Verlag, 1996.

[10] MELESHKO S V, MOYO S. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay [J]. J Math Anal Appl, 2008, 338(1): 448－466.